数理解析研究所講究録
第 350 巻 1979 年 125-133

非可換Hardy空間における分解定理とその応用

新潟大 理　　斉藤 吉助

§1. 序. 本講演では finite maximal subdiagonal 環における分解定理を示し、その応用として、非可換Hardy 空間の性質や不変部分空間の構造を示すのが目的である。

記号や定義などはこの講究録の"非可換Hardy 空間の最近の結果"を参照のこと。

§2. M を faithful normal normalized trace τ をもつ von Neumann 環とする。$1 \leq p < \infty$ に対して、$L^p(M,\tau)$ を定義する。Φ を M から M の中への faithful normal expectation で $\tau\circ\Phi = \tau$ をみたすものとする。H^∞ を Φ に関する M の finite maximal subdiagonal 環とする。$H_0^\infty = \{x \in H^\infty : \Phi(x) = 0\}$ とおき、$H^p = [H^\infty]_p$, $H_0^p = [H_0^\infty]_p$ として、非可換Hardy 空間を定義する。また $D = H^\infty \cap H^{\infty *}$ とする。このとき、

Proposition 1. (1) $L^2(M,\tau) = H^2 \oplus H_0^{2*} = H_0^2 \oplus H^{2*}$

(2) $H^\infty = \{x \in M : \tau(xy) = 0 \ (\forall y \in H_0^\infty)\}$.

証明. (1). $H^\infty + H^{\infty *} = H^\infty + H_0^{\infty *}$はMでσ-弱稠密であることからわかる。

(2) まず$x \in M$とする。このとき

$$\tau(xy) = 0 \ (\forall y \in H_0^\infty) \iff xH^2 \subset H^2$$

が示せる。そこで $\mathfrak{A} = \{x \in M : xH^2 \subset H^2\}$ とおくと、$\mathfrak{A}$ はMのσ-weakly closed subalgebraで$H^\infty \subseteq \mathfrak{A} \subsetneq M$であることは明らか。$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^*$はMでσ-弱稠密故、Φが$\mathfrak{A}$上乗法的であることを示せば、$\mathfrak{A}$はΦに関するsubdiagonal環になるので、$H^\infty$のsubdiagonal環としてのmaximalityから、$\mathfrak{A} = H^\infty$. 従って、$\mathfrak{A}_0 = \{x \in \mathfrak{A} : \Phi(x) = 0\}$が$\mathfrak{A}$の2-sided idealであることを示せばよい。$x \in \mathfrak{A}_0 \iff x \in M \mid xH^2 \subset H_0^2$を示すことにより示せされる。 ∎

§3. この節では分解定理について示す。

1967年にArveson[1]は $\forall k \in M \cap M^{-1}$ならば $k = ua$, $a^{-1} \in H^\infty$をみたすMのunitary operator uと$a \in H^\infty$が存在することを示した。1977年. McAsey, Muhly and Saito [7]によって. $k \in M$, $k^{-1} \in L^2(M, \tau)$ならば $k = ua$をみたすMのunitary operator uと$a \in H^\infty$が存在することを示した。さらに、筆者[2]が$a^{-1} \in H^2$であることも証明した。

定理1. $h \in M$, $h^{-1} \in L^2(M,\tau)$ ならば, $h = ua$, $a^{-1} \in H^2$ をみたす M の unitary operator u と $a \in H^\infty$ が存在する。

これを示すために, $x \in M$, $y \in L^2(M,\tau)$ に対して,

$$L_x y = xy, \quad R_x y = yx.$$

とおく。$\mathcal{L} = \{L_x\}_{x \in M}$, $\mathcal{R} = \{R_x\}_{x \in M}$ とすると, $\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ は finite von Neumann 環で $\mathcal{L}' = \mathcal{R}$, $\mathcal{R}' = \mathcal{L}$ をみたす。

定義1. $\xi \in L^2(M,\tau)$ が right-wandering とは $\xi \perp [\xi H_0^\infty]_2$ であるときにいう。

Lemma 1. [1, Lemma 4. 2. 2]. $\xi \in L^2(M,\tau)$ で right-wandering とする。このとき $u\xi \in [D]_2$, $L_{u^*u} = P_{[\mathcal{R}\xi]_2}$ をみたす M の partial isometry u がある。但し, $P_{[\mathcal{R}\xi]_2}$ は $L^2(M,\tau)$ から $[\mathcal{R}\xi]_2$ の上への projection とする。

定理1の証明. まず $h^{-1} \in L^2(M,\tau)$ より, $h \notin [hH_0^\infty]_2$。そこで, $P_{[hH_0^\infty]_2}$ を $L^2(M,\tau)$ より $[hH_0^\infty]_2$ の上への projection とする。$\eta = P_{[hH_0^\infty]_2} h$ とおく。$\xi = h - \eta$ は right-wandering であることがわかる。よって, Lemma 1 から, $u\xi \in [D]_2$, $L_{u^*u} = P_{[\mathcal{R}\xi]_2}$ をみたす M の partial isometry u がある。このとき, u は M の unitary

で $ux = a$ とおくとき，$a \in H^\infty$, $a^{-1} \in H^2$ であることが，[1, Theorem 4.4.1] の証明を見直すことによって示される。 //

§4. この節では，H^p と H^p_0 の基本的性質を調べる。まず，Proposition 1 から，次の Lemma が成り立つ。

Lemma 2. $H^1 \cap L^2(M, \tau) = H^2$, $H^1_0 \cap L^2(M, \tau) = H^2_0$.

Lemma 3. $H^1 = \{x \in L^1(M, \tau) : \tau(xy) = 0 \ (\forall y \in H^\infty_0)\}$.

証明. $\subseteq$ は明らか。そこで，$\forall y \in H^\infty_0$ に対して $\tau(xy) = 0$ をみたす $x \in L^1(M, \tau)$ をとる。このとき，$x = |x^*|v$ を x の極分解とする。但し $|x^*| = (xx^*)^{\frac{1}{2}}$ とする。$0 \leq t \leq 1$ のとき，$f(t) = 1$，$t > 1$ のとき $f(t) = 1/t$ なる $[0, \infty)$ 上の連続関数 f をとる。今 $k = f(|x^*|^{\frac{1}{2}})$ とおくと，$k \in M$ で $k^{-1} \in L^2(M, \tau)$ であることが示せる。そこで，定理1より，$k = ua$, $a^{-1} \in H^2$ をみたす M の unitary operator u と $a \in H^\infty$ が存在する。しかも，$|x^*|^{\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \lambda de_\lambda$ とすると $k|x^*|^{\frac{1}{2}} = \int_0^\infty f(\lambda)\lambda de_\lambda \in M$ 故，$ax \in L^2(M, \tau)$ で，さらに $\forall y \in H^\infty_0$ に対して

$$(ax, y^*) = \tau(axy) = \tau(xya) = 0.$$

従って，Prop. 1 より，$ax \in H^2_0$。そこで

$$x = a^{-1}ax \in H^2H^2 \subset H^1.$$

これから、Lemma 3 が成り立つ。 ///

$\forall x \in M$ に対して、$\Phi(x) = V|\Phi(x)|$ $(V \in D)$ より、

$$\|\Phi(x)\|_1 = \tau(|\Phi(x)|) = \tau(V^*\Phi(x)) = \tau(V^*x) \leq \|x\|_1$$

これから、Φ を $L^1(M,\tau)$ から $[D]_1$ の上への expectation に一意に拡張できる。従って、このとき、次の Lemma が容易にわかる。

Lemma 4. $H_0^1 = \{x \in L^1(M,\tau) : \tau(xy) = 0 \ (\forall y \in H^\infty)\}$
$= \{x \in H^1 : \Phi(x) = 0\}$.

定理 2. $1 \leq p \leq \infty$ とする。

(1) $H^1 \cap L^p(M,\tau) = H^p$, $H_0^1 \cap L^p(M,\tau) = H_0^p$.

(2) $H^p = \{x \in L^p(M,\tau) : \tau(xy) = 0 \ (\forall y \in H_0^\infty)\}$.

(3) $H_0^p = \{x \in L^p(M,\tau) : \tau(xy) = 0 \ (\forall y \in H^\infty)\}$.

証明(1). Prop 1 と Lemma 2 より、$p = \infty, 2$ のときはすでに示した。そこで $1 < p < 2$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{2} = \frac{1}{p}$ とする。このとき、$H^p \subseteq H^1 \cap L^p(M,\tau)$ は自明, $\forall x \in H^1 \cap L^p(M,\tau)$ とする。$x = |x^*|V = |x^*|^{\frac{p}{2}}|x^*|^{\frac{p}{r}}V$ とおくと、Lemma 3 における連続関数 f に対して、$k = f(|x^*|^{\frac{p}{2}})$ とおくと、$k \in M$, $k^{-1} \in L^2(M,\tau)$.
そこで、定理 1 より、$k = ua$, $a^{-1} \in H^2$ をみたす M の unitary operator u と $a \in H^\infty$ がある。このとき、

$$ax = u^* k |x^*|^{\frac{p}{2}} |x^*|^{\frac{p}{r}} v \in L^r(M,\tau)$$

で又，

$$ax \in H^1 \cap L^r(M,\tau) \subset H^1 \cap L^2(M,\tau) = H^2 \subset H^p.$$

そこで

$$x = a^{-1}ax \in H^2 ax \subset [H^\infty ax]_p \subset H^p$$

従って，$1 \leq p < 2$ のとき，$H^1 \cap L^p(M,\tau) = H^p$

同様にして，$1 < p < 2$ のとき，$H_0^1 \cap L^p(M,\tau) = H_0^p$ が成り立つ。

次に $2 < p < \infty$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする。$H^p \subset H^1 \cap L^p(M,\tau)$ は自明．このとき，$y \perp H^p \Rightarrow \tau(yx) = 0\ (\forall x \in H^\infty)$

Lemma 4 より，$y \in H_0^1 \cap L^q(M,\tau) = H_0^q$。これから，

$y \perp H^1 \cap L^p(M,\tau)$ がわかる。よって，$H^p = H^1 \cap L^p(M,\tau)$.

(2) と (3) は (1) から自明． ///.

§5. $\mathfrak{M}$ を $L^2(M,\tau)$ の closed subspace とする。$\mathfrak{M}$ が left-invariant とは，$H^\infty \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$ をみたすときにいう。このとき，[7] で $\mathfrak{M}$ が left-invariant ならば $\mathfrak{M} \cap M \neq \{0\}$ を示したが，分解定理の1つの応用として，$[\mathfrak{M} \cap M]_p = \mathfrak{M}$ を示す。

定理 3. $1 \leq p < \infty$ とする。$\mathfrak{M}$ を $L^p(M,\tau)$ の任意の left-invariant closed subspace ならば $[\mathfrak{M} \cap M]_p = \mathfrak{M}$。

証明. (1) $2 \leq p < \infty$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする。$[\mathfrak{M} \cap M]_p \subsetneqq \mathfrak{M}$ と

仮定する。今 Hahn–Banach の定理より，$\tau(\xi x)\neq 0$，$\tau(yx)=0$ $(\forall y\in[\mathfrak{M}\cap M]_p)$ をみたす $^\exists\xi\in M$，$^\exists x\in L^q(M,\tau)$ が存在する。$\xi=|\xi^*|v$ とすると，$\xi\in L^p(M,\tau)\subset L^2(M,\tau)$ より，Lemma 3 における f によって，$k=f(|\xi^*|)$ とおく。$k\in M$ で $k^{-1}\in L^p(M,\tau)\subset L^2(M,\tau)$．よって，定理1から，$k=ua$，$a^{-1}\in H^2$ をみたす M の unitary operator u と $a\in H^\infty$ がある。そこで定理2より，

$$a^{-1}\in L^p(M,\tau)\cap H^2=H^p,\quad a\xi(\neq 0)\in\mathfrak{M}\cap M.$$

$\mathfrak{M}$ は left-invariant 故 $\forall b\in H^\infty$ に対して，$ba\xi\in\mathfrak{M}\cap M$．そこで，$\tau(ba\xi x)=0$．定理2より，$a\xi x\in H_0^q$．よって，$\tau(\xi x)=\tau(a^{-1}a\xi x)=0$．これは矛盾．

(2) $1\leq p<2$ とする。$1/p+1/q=1$，$1/r+1/2=1/p$ と q，r を選ぶ。このとき，もしも $[\mathfrak{M}\cap M]_p\subsetneqq\mathfrak{M}$ ならば，$\tau(\xi x)\neq 0$ で $\forall y\in[\mathfrak{M}\cap M]_p$ に対して，$\tau(yx)=0$ をみたす $\xi\in\mathfrak{M}$，$x\in L^q(M,\tau)$ がある。このとき，定理1より，$a\xi\in L^p(M,\tau)\cap\mathfrak{M}\subset L^2(M,\tau)\cap\mathfrak{M}$ で $a^{-1}\in H^2$ をみたす $a\in H^\infty$ がある。さらに，(1) のようにして，$ba\xi(\neq 0)\in\mathfrak{M}\cap M$ で $b^{-1}\in H^r$ なる $b\in H^\infty$ がある。そこで，$\forall c\in H^\infty$ に対して，$cba\xi\in\mathfrak{M}\cap M$．よって，$\tau(cba\xi x)=0$．定理2から，$ba\xi x\in H_0^q$，で $(ba)^{-1}=a^{-1}b^{-1}\in H^2H^r\subset H^p$ より

$$\tau(\xi x)=\tau((ba)^{-1}ba\xi x)=0$$

これは矛盾．よって定理が示された。 ///

参考文献

[1] W. B. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math., 89(1967), 578-642.

[2] W. B. Arveson, On groups of automorphisms of operator algebras, J. Funct. Anal., 15(1974), 217-243.

[3] H. Helson, Analyticity on compact abelian groups, in "Algebras in analysis", Academic Press, New York, 1975.

[4] S. Kawamura and J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras, J. Math. Soc. Japan, 29(1977), 73-90.

[5] R. I. Loebl and P. S. Muhly, Analyticity and flows in operator algebras, J. Funct. Anal., 29(1978), 214-252.

[6] M. McAsey, Invariant subspaces of non-self-adjoint crossed products, Doctor Thesis.

[7] M. McAsey, P. S. Muhly and K. -S. Saito, Non-self-adjoint crossed products, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[8] P. S. Muhly and K. -S. Saito, Non-self-adjoint crossed products II, in preparation.

[9] K. -S. Saito, The Hardy spaces associated with a periodic flow on a von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 29(1977), 69-75.

[10] K. -S. Saito, On non-commutative Hardy spaces associated with flows on finite von Neumann algebras, Tohoku Math. J., 29(1977), 585-595.

[11] 斉藤吉助, crossed productにおける非可換Hardy空間について, 数理解析研究所講究録, 314, (作用素環の研究とその応用),

49-64 (1977年12月).

[12] K. -S. Saito, A note on invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[13] L. Zsido, Spectral and ergodic properties of the analytic generators, J. Approximation theory, 20(1977), 77-138.