数理解析研究所講究録
第351巻 1979年 39-49

パラメーターを含む Pfaff 方程式について

東大 理　　下村 俊

ここでは常微分方程式論における *singular perturbation* の結果を全微分方程式系に拡張することを試みる。すなわち，考えるのは次のような形の完全積分可能な方程式である。

$$\text{(A)} \qquad dz = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{A^i(x,\varepsilon)}{\varepsilon^{\mu(i)}} dx_i \right) z$$

ここで次のような仮定をする。

1) $x = (x_1, \ldots, x_n)$ は $\mathbb{C}^n$ における complex variables

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu)$ は $\mathbb{C}^\nu$ における small parameters

$\mu(i) = (\mu_1(i), \ldots, \mu_\nu(i))$ は non-negative integers を成分にもつベクトルで $\mu_1(i) + \cdots + \mu_\nu(i) > 0$ かつ

$$\varepsilon^{\mu(i)} = \varepsilon_1^{\mu_1(i)} \cdots\cdots \varepsilon_\nu^{\mu_\nu(i)}$$

2) $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$ unknown m-vector

3) $A^i(x,\varepsilon)$: $m\times m$ 行列函数でその成分は

$$(x,\varepsilon)\in U(r_0)\times \Sigma(\varepsilon_0,\varphi,\alpha)$$

$$U(r_0)=\{x \mid \|x\|=\max_{1\le j\le n}|x_j|<r_0\}$$

$$\Sigma(\varepsilon_0,\varphi,\alpha)=\{\varepsilon \mid 0<\|\varepsilon\|<\varepsilon_0,\ |\arg\varepsilon_j-\varphi_j|<\alpha_j\}$$

$$(\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_\nu),\quad \alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_\nu))$$

において正則かつ有界である。

4) $A^i(x,\varepsilon)$ は ε の巾級数に一様に漸近展開される。

$$A^i(x,\varepsilon)\simeq\sum_{|k|\ge 0}A^i_k(x)\,\varepsilon^k \qquad \begin{array}{c}\varepsilon\longrightarrow 0\\ \cap\\ \Sigma(\varepsilon_0,\varphi,\alpha)\end{array}$$

$A^i_k(x)$: $U(r_0)$ で正則かつ有界

$$\left[\begin{array}{lll}\text{但し,} & |k|=k_1+\cdots+k_\nu & k=(k_1,\cdots,k_\nu)\\ & \varepsilon^k=\varepsilon_1^{k_1}\cdots\varepsilon_\nu^{k_\nu} & \end{array}\right]$$

すなわち，任意の自然数 N に対し，ある定数 C_N が存在して，

$$\left|A^i(x,\varepsilon)-\sum_{|k|\le N}A_k(x)\,\varepsilon^k\right|\le C_N\|\varepsilon\|^{N+1}$$

$$(x,\varepsilon)\in U(r_0)\times\Sigma(\varepsilon_0,\varphi,\alpha)$$

が成立。

我々の目標は次の二つの定理である。

<u>Theorem A (Main Theorem)</u>　次の仮定を考える。

<u>Assumption $\mathfrak{A}$</u>　$\forall i$ に対して，$A_0^i(0)$ の固有値 $\{\lambda_1^i, \dots, \lambda_m^i\}$ はある p $(1 \leqq p \leqq m-1)$ に対して

$$\{\lambda_1^i, \dots, \lambda_p^i\} \cap \{\lambda_{p+1}^i, \dots, \lambda_m^i\} = \phi$$

をみたす。つまり，$\alpha \leqq p$，$\beta > p$ であるかぎり $\lambda_\alpha^i \neq \lambda_\beta^i$。

このとき，$\Sigma(\varepsilon_0, \varphi, \alpha)$ の中における任意の方向 $\arg \varepsilon_j = \theta_j$ $(\theta = (\theta_1, \dots, \theta_\nu))$ に対して，

$$(D') \qquad U(r_0') \times \Sigma(\varepsilon_0', \theta, \alpha') \subset U(r_0) \times \Sigma(\varepsilon_0, \varphi, \alpha)$$

において nonsingular な行列による変換

$$z = \mathfrak{U}(x, \varepsilon) v$$

により，(A) は次のような完全積分可能系に変換される。

$$(C) \qquad dv = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{C^i(x, \varepsilon)}{\varepsilon^{h(i)}} dx_i \right) v$$

$$C^i(x, \varepsilon) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} C^{i,1}(x, \varepsilon) & 0 \\ 0 & C^{i,2}(x, \varepsilon) \end{array} \right] \begin{array}{l} \}p \\ \}m-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad\qquad}_{p} & \underbrace{\qquad\qquad}_{m-p} \end{array} \end{array}$$

ここで $\mathfrak{U}(x, \varepsilon)$ は (D') で正則有界で，漸近展開

$$\mathfrak{U}(x, \varepsilon) \simeq \sum_{|k| \geq 0} \mathfrak{U}_k(x) \varepsilon^k$$

$$\mathfrak{U}_k(x) \ : \ U(r_0') \text{ で正則、有界}$$

また，$C^{i,1}(x)$，$C^{i,2}(x)$ は (D') において，正則，有界で

$$C^{i,1}(x,\varepsilon) \simeq \sum_{|k|\geq 0} C_k^{i,1}(x)\,\varepsilon^k$$

$$C^{i,2}(x,\varepsilon) \simeq \sum_{|k|\geq 0} C_k^{i,2}(x)\,\varepsilon^k$$

$$C_k^{i,1}(x),\quad C_k^{i,2}(x) \ : \ U(r_0') \text{ で正則、有界}$$

なる漸近展開をもち，さらに，

$C_0^{i,1}(0)$ の eigenvalues は $\lambda_1^i, \cdots, \lambda_p^i$，

$C_0^{i,2}(0)$ の eigenvalues は $\lambda_{p+1}^i, \cdots, \lambda_m^i$

である。

<u>Theorem B (General solution)</u> 任意の i に対して，$A_0^i(0)$ は互いに相異る固有値をもつとする。このとき $\Sigma(\varepsilon_0, \varphi, \alpha)$ に含まれる任意の方向 $\arg \varepsilon_j = \theta_j$ $(\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_\nu))$ に対して $\Sigma(\varepsilon_0', \theta, \alpha') \subset \Sigma(\varepsilon_0, \varphi, \alpha)$ が存在して，次のような (A) の解の基本行列を構成できる。

$$U(x,\varepsilon) = P(x,\varepsilon)\exp\left(\frac{Q(x,\varepsilon)}{\varepsilon^{\mu(0)}}\right)$$

ここで，

1) $\mu(0) = \{\max_{1\leq i\leq n} \mu_j(i)\}_{j=1}^{\nu}$ $\quad$ (ν-vector)

2) $P(x,\varepsilon)$ は nonsingular，$Q(x,\varepsilon)$ は diagonal な

行列であって

(D) $\quad U(r_0') \times \Sigma(\varepsilon_0', \theta, \alpha')$

において正則，有界であり，次のような漸近展開をもつ。

$$P(x,\varepsilon) \simeq \sum_{|k|\geq 0} P_k(x)\varepsilon^k$$

$$Q(x,\varepsilon) \simeq \sum_{|k|\geq 0} Q_k(x)\varepsilon^k$$

$P_k(x)$, $Q_k(x)$: $U(r_0')$ で正則，有界。

Theorem B は Theorem A をくりかえし適用することにより得られる。以下の節においては Theorem A について説明する。

§1 Formal block-diagonalization

(A) において $A^i(x,\varepsilon)$ を $\sum_{|k|\geq 0} A^i_k(x)\varepsilon^k$ でおきかえた系を formal system，そして，それらが形式的巾級数の意味で積分可能条件をみたすとき formally integrable system と呼ぶことにする。このとき，

Proposition 1.1 *Assumption* $\mathfrak{A}$ の下では formal system (A)

に対して，次のような formal power series による変換

$$z = \gamma(x,\varepsilon)\, u \qquad \gamma(x,\varepsilon) \doteqdot \sum_{|k|\geq 0} \gamma_k(x)\,\varepsilon^k \quad (\text{formal})$$

が存在する。

1) $\gamma_k(x)$ は $U(r_0)$ で正則かつ有界

2) この変換により (A) は formal system

$$\text{(B)} \qquad du = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B^i(x,\varepsilon)}{\varepsilon^{H(i)}}\, dx_i\right) u \qquad (\text{formally integrable})$$

に変換される。但し，

2.a) $B^i(x,\varepsilon) = \sum_{|k|\geq 0} B^i_k(x)\,\varepsilon^k$ と表わされ，$B^i_k(x)$ は $U(r_0)$ で正則，有界である。そして

$$B^i_k(x) = \begin{bmatrix} B^{i,11}_k(x) & 0 \\ B^{i,21}_k(x) & B^{i,22}_k(x) \end{bmatrix} \qquad (|k|\geq 1)$$

$$B^i_0(x) = \begin{bmatrix} B^{i,11}_0(x) & 0 \\ 0 & B^{i,22}(x) \end{bmatrix} \qquad (k=0)$$

2.b) $B^{i,11}_0(0)$ の固有値は $\lambda^i_1, \dots, \lambda^i_p$，
$B^{i,22}_0(0)$ の固有値は $\lambda^i_{p+1}, \dots, \lambda^i_m$ である。

さらに，

<u>Proposition 1.2</u> 同様な変換 $u = \tau(x,\varepsilon)\, v$

$$\tau(x,\varepsilon) = \sum_{|k|\geq 0} \tau_k(x)\,\varepsilon^k$$

により，(B) は formally integrable system (C)

(C) $$dv = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{C^i(x,\varepsilon)}{\varepsilon^{H(i)}} dx_i \right) v$$

に変換される。ここで

$$C^i(x,\varepsilon) = \sum_{|k|\geq 0} C^i_k(x)\varepsilon^k \qquad (\text{formal})$$

$$C^i_k(x) = \begin{bmatrix} C^{i,11}_k(x) & 0 \\ 0 & C^{i,22}_k(x) \end{bmatrix}$$

であり，$C^{i,11}_0(0)$，$C^{i,22}_0(0)$ の固有値はそれぞれ $\lambda^i_1, \dots, \lambda^i_p$，および $\lambda^i_{p+1}, \dots, \lambda^i_m$ である。

この節で与えられた形式的変換の解析的な意味づけは次の節においてなされる。

§2. Analytic block-diagonalization

<u>Proposition 2.1</u> $\Sigma(\varepsilon_0, \varphi, \alpha)$ に含まれる勝手な方向 $\arg \varepsilon_j = \theta_j$ に対して $(\theta = (\theta_1, \dots, \theta_\nu))$

(*) $$U(r') \times \Sigma(\varepsilon_0', \theta, \alpha') \subset U(r_0) \times \Sigma(\varepsilon_0, \varphi, \alpha)$$

において正則な行列函数 $\gamma(x,\varepsilon)$ で次の性質をもつものが存在する。

1) $\Upsilon(x,\varepsilon)$ は 領域 (*) で $\varepsilon \longrightarrow 0$ のとき 漸近展開

$$\Upsilon(x,\varepsilon) \simeq \sum_{|k|\geq 0} \Upsilon_k(x)\,\varepsilon^k$$

をもつ。ここで $\Upsilon_k(x)$ は Proposition 1.1 で得られたものである。

2) $z = \Upsilon(x,\varepsilon)\,u$ により (A) は積分可能系

$$\text{(B)} \qquad du = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B^i(x,\varepsilon)}{\varepsilon^{\mu(i)}}\, dx_i\right) u$$

に変換される。ここで、

$$B^i(x,\varepsilon) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \}\, p \\ \}\, m-p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{p} & \underbrace{\quad}_{m-p} \end{array} & \end{array}$$

の形であり、(*) で

$$B^i(x,\varepsilon) \simeq \sum_{|k|\geq 0} B^i_k(x)\,\varepsilon^k$$

と、Proposition 1.1 で得られた級数に漸近展開される。

さらに、Proposition 1.2 で得られた formal な変換 $u = \mathcal{T}(x,\varepsilon)\,v$ の解析的意味づけを与える変換 $u = \mathcal{T}(x,\varepsilon)\,v$ も

$$U(r'') \times \Sigma(\varepsilon_0'', \theta, \alpha'') \subset U(r') \times \Sigma(\varepsilon_0', \theta, \alpha')$$

において与えることが出来る。そしてこの変換により，(B) は block-diagonal な system

$$\text{(C)} \qquad dv = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{C^i(x,\varepsilon)}{\varepsilon^{H(i)}} dx_i \right) v$$

に変換される。このようにして Theorem A が得られる。

最後に，この節の解析的な意味づけを与えるのに用いられる補題をあげておこう。

<u>Lemma 2.2</u> 非線形全微分方程式系

$$\text{(N.E)} \qquad dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon^{H(i)}} f^i(x, w, \varepsilon)\, dx_i$$

を考える。ここで次のように仮定する。

1) $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix}$, $\mu(i) = (\mu_1(i), \dots, \mu_\nu(i))$ $\quad \mu_j(i) \geq 0$

$\mu_1(i) + \cdots + \mu_\nu(i) > 0$

2) $f^i(x, w, \varepsilon)$ は M-vector でその成分は

$$(x, w, \varepsilon) \in U(r_0) \times \{ w \mid \|w\| < w_0 \} \times \sum(\varepsilon_0, \varphi, d)$$

で正則。

3) さらに，そこで

$$f^i(x, w, \varepsilon) \simeq \sum_{k \geq 0} f^i_k(x, w)\, \varepsilon^k$$

$f^i_k(x, w)$: $\|w\| < w_0$, $x \in U(r_0)$ で正則，有界.

なる漸近展開をもつ。

4) 任意の i に対し Jacobian

$$\Lambda^i = \frac{\partial f^i}{\partial w}(0, 0, 0)$$

は nonsingular かつ upper triangular.

5) formal solution

$$w = \sum_{|k| \geq 1} c_k(x)\, \varepsilon^k$$

$$c_k(x) : U(r_0) \text{ で正則, 有界}$$

をもつ。

このとき, $\sum(\varepsilon_0, \varphi, \alpha)$ に含まれる任意の方向 $\arg \varepsilon_j = \theta_j$ に対し, 適当に

$$U(r') \times \sum(\varepsilon_0', \theta, \alpha') \subset U(r_0) \times \sum(\varepsilon_0, \varphi, \alpha)$$

なる領域をとると, そこで正則で

$$\phi(x, \varepsilon) \simeq \sum_{|k| \geq 1} c_k(x)\, \varepsilon^k$$

なる漸近展開をもつ解 $w = \phi(x, \varepsilon)$ が存在する。

参考文献

[1] R. Gérard, Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe, J. Math. Pures Appl., 47 (1968), 321-404.

[2] M. Hukuhara, Sur les points singuliers d'une équation différentielles ordinaire du premier ordre, I, Mem. Fac. Eng. Kyushu Imp. Univ., 8 (1937), 203 - 247.

[3] Y. Sibuya, Sur réduction analytique d'un système d'équation différentielles linéaires contenant un paramètre, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, (1), 7 (1958), 527 - 540.

[4] W. Wasow, Asymptotic expansions for ordinary differential equation, Interscience Publishers, 1965.

[5] M. Yoshida and K. Takano, On a linear system of Pfaffian equations with regular singular points, Funkcial. Ekvac. 19, (1976), 175 - 189.