数理解析研究所講究録
第 352 巻 1979 年 1-15



# Dirichlet 問題の固有値と境界変動

東大 理, 藤原大輔

序.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな境界をもつ有界領域とする。その境界を $\gamma$ とする。2次元の Dirichlet 問題の固有値問題を考える。

$$(1) \quad \begin{cases} (-\Delta - \lambda)\, u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u|_\gamma = 0 \end{cases}$$

$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots$ を, (1) の固有値とすると, これらは, 領域 $\Omega$ の汎関数である。簡単のため, 以後 $\Omega$ は単連結とする。すると, $\lambda_j$ は $\Omega$ の境界 $\gamma$ の汎関数であるとして良い。かかる $\gamma$ の全体は, 可分な Hilbert 多様体 $\Gamma$ を成す。$\Gamma$ の部分集合 B が residual であるとは, 開かつ稠密な可算個の集合の共通集合となることである。

私が, 谷川政雄氏, 堂田修一氏と得た結果を紹介する.

<u>定理 1</u>, $\Gamma$ のある residual な部分集合 B が

あって、$\forall \gamma \in B$ に対して、(1)の固有空間は、すべて1次元になるように出来る。

これは、領域が対称性等がなく、扱く一般な型をしているならば、すべての固有値が単純であることを示している。同様な結果は、Uhlenbeck [4] によって、ポテンシャル摂動の場合とか、Riemann空間の Laplace-Beltrami 作用素について、計量が摂動される場合について知られている。

定理1は、より強い形で Arnold [1] に予想が述べられている。

§1. 境界の作る Hilbert 多様体 Γ.

$S^1$を、1次元の単位円周 $=\{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ とする。
Γを、埋め込み：

$$S^1 \ni \theta \longrightarrow \gamma(\theta)$$

の作る Hilbert 多様体とする。但し、$x_1(\theta)$, $x_2(\theta)$ は、Sobolev 空間 $H^5(S^1)$ の元とする。Sobolev の埋蔵定理により、$x_1(\theta)$, $x_2(\theta)$ は $C^4$ 級である。Γでの距離を

(1.1) $$\rho(\gamma, \gamma') = \left( \|x_1 - x_2'\|_5^2 + \|x_2 - x_2'\|_5^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

で定義する。ここで $\| \ \|_5$ は Sobolev 空間 $H^5(S^1)$

での Sobolev norm である。

$^\forall\gamma\in\Gamma$ は $C^4$ 級の simple Jordan curve を定義する。従って，$\mathbb{R}^2$ の単連結領域 $\Omega_\gamma$ を囲む。$\gamma$ への単位外法線ベクトル場を $\nu(\theta)$ とする。$\gamma$ については，Tubular neighbourhood theorem が成立するから，ある $\varepsilon(\gamma)>0$ が存在して，任意の $\gamma'\in\Gamma$ で $\rho(\gamma,\gamma')<\varepsilon(\gamma)$ となるものについては，

(1.2) $$\omega_\gamma^{\gamma'}\ ;\ \overline{\Omega}_\gamma \longrightarrow \overline{\Omega}_{\gamma'}$$

という $C^4$ 級の微分同相が存在する。そして $\omega_\gamma^{\gamma'}$ を $\gamma$ に制限したものは $\gamma'\circ\gamma^{-1}$ に一致するとして良い。さらに，必要ならば，$\varepsilon(\gamma)$ をさらに小さくとって，$(\gamma,\gamma')\to\omega_\gamma^{\gamma'}$ は，$C^4$ 級であると仮定して良い。従って，$\gamma_t$ ; $t\in[0,1]$ が Hilbert 多様体 $\Gamma$ 上の $\gamma=\gamma_0$ を通る曲線とするとき，1-パラメターの微分同相族 $\{\omega_\gamma^{\gamma_t}\}_{t\in[0,1]}$ を得る。

$^\forall x\in\overline{\Omega}_\gamma$ において，

(1.3) $$X(x)=\frac{\partial\omega_\gamma^{\gamma_t}(x)}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

とおく。$X(x)=(X_1(x),X_2(x))$ は $\overline{\Omega}_\gamma$ 上の vector 場である。$\omega_\gamma^{\gamma'}$ は，$(\gamma\ \gamma')$ に対し一意的には定まらぬ。従って vector 場 $X(x)$ は $\gamma_t$ によって，一意的に定まるわけではない。しかし，その $\gamma$ 上への制限，$\delta\gamma(\theta)=X(\gamma(\theta))$

は，$\delta\gamma$によって，定まる。さらに，$\delta\gamma(\theta)$の法線方向の成分

(1.4) $\{\delta\gamma(\theta), \nu_\theta\} = \langle X(\gamma(\theta)), \nu_\theta \rangle$

をとることによって，$S^1$のパラメーター$\theta$の取り方による多義性をなくすことが出来る。かくて，Hilbert 多様体$\Gamma$の$\gamma$における接ベクトル空間$T_\gamma\Gamma$として

$$T_\gamma \Gamma = \{\delta\gamma(\theta), \nu_\theta\} = \langle X(\gamma(\theta)), \nu_\theta \rangle \mid X(\gamma(\theta)) \in H^5(S^1) \times H^5(S^1)\}$$

を同一視することが出来る。

## §2 Main theorem の証明

$\gamma \in \Gamma$，$\Omega_\gamma$を上述の如くとする。問題1を考えるとき$\Omega = \Omega_\gamma$とする。多様体$\Gamma$は separable であるから，定理1は局所化出来る。

Theorem 1′ $\forall \tilde{\gamma} \in \Gamma$に対して，ある開近傍$U(\tilde{\gamma})$が存在して，その residual な部分集合$B(\tilde{\gamma})$があり，$\forall \gamma \in B(\tilde{\gamma})$に対して，$\Omega_\gamma$で考えた問題(1)の固有空間はすべて次元が1である。

定理1′の証明をスケッチする。$g_\gamma(x, x')$を$\Omega_\gamma$における，Dirichlet 問題のグリーン関数とする。グリーン

作用素を

(2.1) $$G_\gamma u(x) = \int_{\Omega_\gamma} g_\gamma(x, x')\, u(x')\, dx'$$

で定義する。固有値問題 (1) は、$G_\gamma$ を用いて

(2.2) $$(\lambda G_\gamma - I)\, u(x) = 0$$

に変換される。微分同相(1.2)を用いる。$L^2(\Omega_\gamma)$ の元 $u(x)$ をこれによって $\Omega_{\tilde\gamma}$ 上の関数に引き戻すと

$$\omega_\gamma^{\tilde\gamma *} u(x) = u(\omega_\gamma^{\tilde\gamma}(x)) \in L^2(\Omega_{\tilde\gamma})$$

であり、$\tilde u(x) = \omega_\gamma^{\tilde\gamma *} u(x)$, $\tilde v(x) = \omega_\gamma^{\tilde\gamma *} v(x)$ とすると内積の変換は、

(2.3) $$\int_{\Omega_\gamma} u(y)\, v(y)\, J_\gamma^{\tilde\gamma}(y)\, dy = \int_{\Omega_{\tilde\gamma}} \tilde u(x)\, \tilde v(x)\, dx.$$

である。$J_\gamma^{\tilde\gamma}(y)$ は $\omega_\gamma^{\tilde\gamma -1}$ の Jacobian 行列式である。

(2.2)は

(2.4) $$(I - \lambda G_{\tilde\gamma}^{\gamma})\, \tilde u(x) = 0,$$

where $\tilde u(x) = (\omega_\gamma^{\tilde\gamma *} u)(x)$ and $G_{\tilde\gamma}^{\gamma} = \omega_\gamma^{\tilde\gamma *} G_\gamma (\omega_\gamma^{\tilde\gamma *})^{-1}$.

(2.4) 式は、固定した Hilbert 空間 $L^2(\Omega_{\tilde\gamma}) = \mathfrak{H}$ で考えればよい。そこで、$\mathfrak{H}$ の単位球を

$$\mathfrak{S} = \left\{ \tilde u \in L^2(\Omega_{\tilde\gamma});\ \int_{\Omega_{\tilde\gamma}} |\tilde u(x)|^2 dx = 1 \right\}.$$

とおく。

$\mathfrak{S}$ も可分の Hilbert 多様体である。

次のような写像を考える。

(2.5) $$\begin{array}{rcl} \Phi;\ U(\bar{\gamma})\times\mathfrak{S}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{H} \\ (\gamma,\ \tilde{u},\ \lambda) & \longrightarrow & \Phi(\gamma,\tilde{u},\lambda)=(\tilde{u}-\lambda G_{\gamma}^{\gamma}\tilde{u}) \end{array}$$

さらに，ここで $\gamma$ を固定して，次の写像を考える。

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{\gamma};\ \mathfrak{S}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{H} \\ (\tilde{u},\lambda) & \longrightarrow & \Phi(\gamma,\tilde{u},\lambda). \end{array}$$

これについて，

命題1　上の写像 $\Phi_{\gamma}$ は $C^4$ 級の Fredholm 写像で，その指数は0である。

さて，$(\gamma,\tilde{u},\lambda)\in U(\bar{\gamma})\times\mathfrak{S}\times\mathbb{R}$ をとる。写像 $\Phi$ のこの点での接写像は，

(2.6) $$\delta\Phi(\gamma,\tilde{u},\lambda)=\delta\lambda\, G_{\gamma}^{\gamma}\tilde{u}+(1-\lambda G_{\gamma}^{\gamma})\delta\tilde{u}+\lambda(\delta G_{\gamma}^{\gamma})u$$

である。$\delta\tilde{u}\in T_{\tilde{u}}\mathfrak{S}$ は，

(2.7) $$\int_{\Omega_{\gamma}}\tilde{u}(x)\,\delta\tilde{u}(x)\,dx=0$$

を満足する。(2.6) 式の最後の項は，境界の変動 $\delta\gamma(\theta)$ で生じる変動に相当する。この部分は，きちんと，計算される。

命題2 (Hadamard's variational formula).

任意の $u \in L^2(\Omega_\gamma)$ に対し、

(2.8) $$(\omega_\gamma^{\gamma *})^{-1}(\delta G_\gamma^{\gamma})\,\omega_\gamma^{\gamma *} u(y) = V_{\delta\gamma} u(y)$$

とおけば、

(2.9) $$V_{\delta\gamma} u(y) = -\iint_{\Omega_\gamma} \frac{\partial g_\gamma(y, \gamma(\theta))}{\partial \nu_\theta} \frac{\partial g_\gamma(\gamma(\theta), y')}{\partial \nu_\theta} \langle X(\gamma(\theta)), \nu_\theta \rangle d\sigma_\theta\, u(y')\, dy'$$

$$+ \langle \operatorname{grad} G_\gamma u(y), X(y) \rangle - G_\gamma(\langle X, \operatorname{grad} u \rangle)(y).$$

ここで $d\sigma_\theta$ は $\gamma$ の線素で、$\langle X(\gamma(\theta)), \nu_\theta \rangle \in T_\gamma \Gamma$。

つぎに我々は次の定理を証明する。

定理2: $\mathfrak{h}_\gamma \ni 0$ は、写像

$$\Phi;\quad V(\tilde{\gamma}) \times \mathfrak{S} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{h}_\gamma$$

の regular value である。

証明. $\Phi(\gamma, \tilde{u}, \lambda) = 0 \in \mathfrak{h}_\gamma$ と仮定する。すると、

(2.10) $$(I - \lambda G_\gamma^{\gamma})\tilde{u} = 0.$$

$u(x) = (\omega_\gamma^{\gamma *})^{-1}\tilde{u}$ として、

(2.11) $$(I - \lambda G_\gamma)u = 0 \quad \text{in } L^2(\Omega_\gamma)$$

証明すべきことは，$\delta\Phi(\gamma, \tilde{u}, \lambda)$ の像が $H_{\gamma}=L^{2}(\Omega)_{\gamma}$ と一致することである。それには $\delta\Phi(\gamma, \tilde{u}, \lambda)$ の像が稠密であることを示せば良い。$\tilde{v} \in H_{\gamma}$ が $\mathrm{Im}\,\delta\Phi(\gamma, \tilde{u}, \lambda)$ に直交すると仮定する。すると

(2.12) $$0=\delta\lambda\int_{\Omega_{\tilde{\gamma}}} G_{\tilde{\gamma}}^{\gamma}\tilde{u}(x)\tilde{v}(x)dx+\int_{\Omega_{\tilde{\gamma}}}(I-\lambda G_{\tilde{\gamma}}^{\gamma})\delta\tilde{u}(x)\tilde{v}(x)dx$$

$$+\lambda\int_{\Omega_{\tilde{\gamma}}}(\delta G_{\tilde{\gamma}}^{\gamma})\tilde{u}(x)\tilde{v}(x)dx .$$

である，ただし，$\delta u \in T_{\tilde{u}}\mathfrak{S}$ である。この条件は，

(2.13) $$\int_{\Omega_{\gamma}} u(y)\delta u(y)J_{\gamma}^{\tilde{\gamma}}(y)dy=0$$

$\delta\tilde{u}=(\omega_{\gamma}^{\tilde{\gamma}*})^{-1}\delta u$ である。(2.12) 式は，次の三つの連立方程式系と同値である：

(2.14) $$\int u(y)w(y)dy=0$$

(2.15) $$\int_{\Omega_{\gamma}}((I-\lambda G_{\gamma})\delta\tilde{u})(y)w(y)dy=0$$

(2.16) $$\int_{\Omega_{\gamma}} V_{\delta\gamma}u(x)w(x)dx=0$$

ここで，

(2.17) $$w(y)=(\omega_{\gamma}^{\tilde{\gamma}*})^{-1}\tilde{v}(y)J_{\gamma}^{\tilde{\gamma}}(y).$$

とおいた。

$\delta\tilde{u}$ は，条件 (2.13) を満す任意の関数であるから，

(2.15) より，$C$ を定数として，

(2.18) $$(I-\lambda G_\gamma)w(y) = C\,u(y)J_\gamma^{\delta}(y).$$

$I-\lambda G_\gamma$ の対称性を用いると，任意の $u\in\ker(I-\lambda G_\gamma)$ に対し，

$$0=\int u(y)(I-\lambda G_\gamma)w(y)\,dy = C\int |u(y)|^2 J_\gamma^{\delta}(y)\,dy$$

これから，$C=0$ を得る。従って，

(2.19) $$(I-\lambda G_\gamma)w(y)=0$$

即ち $w\in C^4(\bar{\Omega}_\gamma)$ で

(2.　) $$\begin{cases} (-\Delta-\lambda)w(y)=0 & \text{in } \Omega_\gamma \\ w|_\gamma = 0 & . \end{cases}$$

が成立する。(2.11) と (2.16), (2.19) を用いると，

(2.21) $$\lambda^{-1}\int \frac{\partial u}{\partial\nu_\theta}(\gamma(\theta))\frac{\partial w}{\partial\nu_\theta}(\gamma(\theta))\langle X(\gamma(\theta)),\nu_\theta\rangle\,d\sigma_\theta = 0$$

$\langle X(\gamma(\theta)),\nu_\theta\rangle=\delta\gamma(\theta)$ は任意であるから，$u\neq 0$ により

(2.22) $$\frac{\partial w}{\partial\nu_\theta}(\gamma(\theta))\equiv 0 .$$

が，ある $\gamma$ 上の開集合で成立する。これと　　をあわせて，Aronszajn's 定理を用いると $w(y)\equiv 0$ on $\Omega_\gamma$ がいえる。従って，$\tilde{u}(x)\equiv 0$. 定理 2 は示された。

定理 1′ は，この定理 2 と Uhlenbeck [4] の横断性定理 2 によって示される。

## §3 Hadamard 変分公式の証明のスケッチ.

前節で用いた Hadamard 変分公式は，Hadamard [5] によって述べられたが，そこにおける証明は，$\rho(\theta)=\langle X(\gamma(\theta)), \nu(\theta)\rangle$ が，正又は負の定符号のときのみしか有効でない。その後厳密な証明は，幾通りも得られているが，（例えば [6] [7] [8]）いずれも単純ではなく，Hadamard の最初の証明の着想に比べると，不満を感じる。最近，筆者は，小沢真氏と協力して，Hadamard の最初の着想を，極めて少しだけ修正すれば，殆んど，Hadamard の最初の着想そのままで $\rho(\theta)$ が符号を変える一般の場合も，Hadamard の公式が証明出来ることを指摘した。[7]。ここでは，それに少し触れてみたい。もう一度情況を明確にしよう。

$\Omega$ を $\mathbb{R}^2$ の有界領域で，$\partial\Omega=\gamma$ でその境をあらわす。$\rho(x)$ を $\gamma$ 上で定義された $C^\infty$ の実関数とする（$\gamma$ は $C^\infty$ としておく。）$\nu_x$ を $x\in\gamma$ での $\gamma$ の外単位法線とする。$\varepsilon\geqq 0$ に対して

$$\gamma_\varepsilon=\{x+\varepsilon\rho(x)\nu_x\,;\ x\in\gamma\}$$

は、$\varepsilon$が十分小さければ、ある有界領域$\Omega_\varepsilon$を囲む。

$g_\varepsilon(x,y)$ を $\Omega_\varepsilon$における Dirichlet問題のグリーン関数とする。即ち

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \Delta_x g_\varepsilon(x,y) = -\delta(x-y) \\ g_\varepsilon(x,y)|_{x\in\gamma_\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

をみたすものとする。Hadamardの変分公式は、次のように述べることが出来る。（これは§2と少し形が違うが、Hadamardのもとの公式のままである。）

定理 3.1 (Hadamard's variational formula)

$x, y \in \Omega$, $x \neq y$ に対して

$$(3.2)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}(g_\varepsilon(x,y) - g_0(x,y)) = \int_\gamma \frac{\partial g_0(x,z)}{\partial \nu_z}\cdot\frac{\partial g_0(y,z)}{\partial \nu_z}\,\rho(z)\,d\sigma_z$$

ここで、$d\sigma_z$ は $z\in\gamma$ での$\gamma$の線素。

証明. $y\in\Omega$ を固定する。$g_0(x,y)$ を$x$の関数と思えば、$\bar\Omega\setminus\{y\}$で、$C^\infty$関数である。したがって、Whitneyの拡張定理により、$g_0(x,y)$を $R^2\setminus\{y\}$に

$C^\infty$ に拡張しておく。その関数を $\tilde{g}_\varepsilon(x,y)$ とおく。

$$\Delta_x \tilde{g}_0(x,y) = \delta(x-y) + h(x,y)$$

が、任意の $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ で成立する。但し $h(x,y)$ は $x \in \mathbb{R}^2$ ; の $C^\infty$ 関数で、$x \in \overline{\Omega}$ のとき $h(x,y) \equiv 0$ である。それゆえ、任意の $\alpha$ に対して

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha h(x,y)\right| \leq C_\alpha\, |\mathrm{dist}(x,\gamma)|^2$$

という式が成立する。$\mathrm{dist}(x,\gamma)$ は $x$ と $\gamma$ の距離。

$C_\alpha$ は正定数。Green-Stokes の公式から、$x, y \in \Omega$ のとき

$$g_\varepsilon(x,y) - g_0(x,y)$$

$$(3.3) \quad = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\Delta_z g_\varepsilon(x,z)\, \tilde{g}_0(z,y) - \Delta_z \tilde{g}_0(z,y)\, g_\varepsilon(x,z)\right) dz$$

$$+ \int_{\Omega_\varepsilon} h(z,y)\, g_\varepsilon(x,z)\, dz.$$

$$= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left\{\frac{\partial g_\varepsilon(x,z)}{\partial \nu_z^\varepsilon} \cdot \tilde{g}_0(z,y) - \frac{\partial \tilde{g}_0(z,y)}{\partial \nu_z^\varepsilon}\, g_\varepsilon(x,z)\right\} d\sigma_z^\varepsilon$$

$$+ \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}} h(z,y)\, g_\varepsilon(x,z)\, dz$$

$$= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial g_\varepsilon(x,z)}{\partial \nu_z^\varepsilon} \cdot \tilde{g}_0(z,y)\, d\sigma_z^\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}} h(z,y)\, g_\varepsilon(x,z)\, dz.$$

ここで、$d\sigma_z^\varepsilon$ は $\gamma^\varepsilon$ の線素をあらわす。この第3の等号では、(3.1)式の境界条件を用いた。この(3.3)式の右辺の第2項は、$K$ の上述の不等式を用いると

(3.4) $$\left|\int_{\Omega_\varepsilon \setminus \bar{\Omega}} K(z,y)\, g_\varepsilon(x,z)\, dz\right| \le O(\varepsilon^2)$$

である。$\mathrm{dist}(z,\gamma) \leqq \varepsilon$ が任意の $z \in \Omega_\varepsilon - \bar{\Omega}$ に対し成立するからである。従って

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}\left(g_\varepsilon(x,y) - g_0(x,y)\right)$$

(3.5) $$= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial g_\varepsilon(x,z)}{\partial \nu_z^\varepsilon} \cdot \tilde{g}_0(z,y)\, dz$$

を得る。$\tilde{g}_0(z',y) = 0$ for $\forall z' \in \partial\Omega_0 = \gamma$ であるから、$z \in \partial\Omega_\varepsilon = \gamma_\varepsilon$ を $z = z' + \varepsilon \rho(z) \nu_z$ とすると、

$$\tilde{g}_0(z,y) = \varepsilon \rho(z') \frac{\partial \tilde{g}_0(z',y)}{\partial \nu_z} + O(\varepsilon^2)$$

である。従って、(3.5)に代入すると

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}\left(g_\varepsilon(x,y) - g_0(x,y)\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_\varepsilon} \varepsilon\, \rho(z') \frac{\partial \tilde{g}_0(z',y)}{\partial \nu_z} \cdot \frac{\partial g_\varepsilon(x,z)}{\partial \nu_z^\varepsilon}\, dz$$

となって、定理3.1を証明出来る。

以上の証明には，楕円型方程式の a priori 評価，グリーン核の存在，Whitney 拡張定理のみを用いているから，n次元の場合で，しかも Schechter 等の論じた properly elliptic な楕円型方程式の場合にも，証明は容易に拡張出来る。詳しくは [7] を御覧いただきたい。

<u>注意.</u> 序文中に述べた我々の主定理1に極く良く似た結果が Micheletti 氏によって，既に得られていることを Univ. Paris Sud. の Saut 教授から御指摘いただきました。同教授に感謝いたします。

## 文献表


[1] Arnold, V.I., Modes and quasi-modes. Functional Anal. and its appl. vol. 6, 94-101 (1972).

[2] Garabedian, P. R.; Partial differential equations. John-Wiley & Sons, New York (1964).

[3] Hadamard, J.; Memoire sur le probleme d'analyse relatif a l'equilibre des plaques elastiques encastrees. Oeuvres, C.N.R.S. tom 2. 515-631 (1968).

[4] Uhlenbeck, K., Generic properties of eigen functions. Amer. J. Math. vol. 98. 1057-1078 (1976).

[5] Garabedian, p.R., & Schiffer., Convexity of domain functionsls. J. Anal. Math., vol.2., 281-368 (1978).

[6] Aomoto, K., Formule variationnelle d'Hadamard et modele euclidien des varietes differentiable plongees. ( to appear in J. Functional analysis)

[7] Fujiwara & Ozawa, Hadamard's variational formula for the Green functions of some normal elliptic boundary problems. Proc. Japan Acad. 54 A, 215-220 (1978).

[8] Fujiwara, Tanikawa & Yukita, The spectrum of the Laplacian and boundary perturbation. I. Proc. Japan Acad. vol.54A, 87-91 (1978).

[9] Ozawa. S., Perturbation of domains and Green kernels of heat equations. Proc. Japan Acad. 54A, 322-325 (1978).

[10] Micheletti, Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace, inrelazione ad una variazione del campo, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, vol 26. (1972)

[11] --------, Petrica per famiglie di domini limitati e proprieta generiche deglu auto valori, Ann. Scuola Norma. Sup. Pisz, vol. 26, (1973).