数理解析研究所講究録
第352巻 1979年 16-26

Calabi 予想の解決（S. T. Yau）とその応用

阪大 教養部 満渕 俊樹

最近、S. T. Yau [3] によって Calabi 予想が解かれたが、その骨子になっているのは T. Aubin の労作 [1] である。ある意味で、Yau は Aubin の仕事を簡易化し、正しく理解することによって Calabi 予想の解決にこぎつけたと言える。それ故我々は Yau による簡易化された Aubin の仕事を通して、Calabi 予想解決の軌跡を追ってみようと思う。ここでは特に色々ある Calabi 予想の中で次の予想に焦点をあててみる。

<u>予想</u>： M を compact complex manifold で $c_1(M) < 0$ とする。このとき M 上に Einstein Kähler metric が unique (up to constant multiple) に存在する。

但し、ここで $c_1(M) < 0$ とは $c_1(M)$ の Dolbeault cohomology class が $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{\alpha,\beta}(-g_{\alpha\bar{\beta}})\,dz^{\alpha}\wedge dz^{\bar{\beta}}$ ($(g_{\alpha\bar{\beta}})$ は positive definite Hermitian

matrix）の形に represent されるということを意味している。
さて、この予想は次のことを示すのに reduce される。

<u>Reduction</u>： $\lambda \in \mathbb{R}$ を正の定数とする。Compact complex manifold M 上に Kähler metric $\{g_{\alpha\bar\beta}\}$ と C^∞-real valued function $f \in C^\infty(M)$ が与えられているとする。このとき方程式

(1) $$\det\left(g_{\alpha\bar\beta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)\cdot \det\left(g_{\alpha\bar\beta}\right)^{-1} = \exp(\lambda\varphi + f)$$

が "$\left(g_{\alpha\bar\beta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)$ is positive definite everywhere on M" を満たすような unique solution $\varphi \in C^\infty(M)$ をもつ。（但しここで $C^\infty(M)$ とは M 上の C^∞-real valued function 全体のことを表すこととする。）

まず、如何にしてこの(1)の方程式がとければ上の予想が導き出されるか、それをここに述べよう。そこで、M を上の予想に於ける M とする。このとき上でも述べたように、$C_1(M)$ の代表元は $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{\alpha,\beta}(-g_{\alpha\bar\beta})\,dz^\alpha\wedge dz^{\bar\beta}$ の形のものがとれるが、一方、M の上で Kähler metric $\{g_{\alpha\bar\beta}\}$ を考えてでてくる Ricci form $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\left(-\log\det(g_{\alpha\bar\beta})\right)$ も $C_1(M)$ を represent している。

i.e., $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{\alpha,\beta}(-g_{\alpha\bar\beta})\,dz^\alpha\wedge dz^{\bar\beta} \underset{\text{(cohomologous)}}{\sim} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\left(-\log\det(g_{\alpha\bar\beta})\right)$.

$\therefore\ \exists f \in C^\infty(M)$ s.t. $\partial\bar\partial\left(\log\det(g_{\alpha\bar\beta})\right) + \partial\bar\partial f = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar\beta}\,dz^\alpha\wedge dz^{\bar\beta}$.

こうして定められた$\{g_{\alpha\bar\beta}\}$, f, そして$\lambda=1$ に対して上の方程式(1)を解く。そして$\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)$ が positive definite になるような unique solution $\varphi\in C^\infty(M)$ を考える。このとき

$$\log\det\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\partial z^{\bar\beta}}\right)-\log\det(g_{\alpha\bar\beta})=\varphi+f$$

$$\therefore\ \partial\bar\partial\left(\log\det\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\partial z^{\bar\beta}}\right)\right)=\partial\bar\partial\left(\log\det(g_{\alpha\bar\beta})\right)+\partial\bar\partial f+\partial\bar\partial\varphi$$

$$=\sum_{\alpha,\beta}\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\partial z^{\bar\beta}}\right)dz^\alpha\wedge dz^{\bar\beta}$$

即ち、これはMの上の Kähler metric $\left\{g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\partial z^{\bar\beta}}\right\}$ が Einstein Kähler metric であること示している。故にMの上に Einstein Kähler metric が存在するが、その一意性 (up to constant multiple) も(1)の方程式における$\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\partial z^{\bar\beta}}\right)$ が positive definite になるような solution φ の uniqueness から困難なく導き出せる。

そこで問題の焦点は上の(1)の方程式を解くことにうつるのであるが、(1)の方程式で$\lambda=0$ のときの solution をみつけることが"良く知られた Calabi 予想"を解くことと同値である。しかし、それは$\lambda>0$ のときに(1)を解くのよりはるかに難かしい。(S. T. Yau の 仕事は$\lambda=0$のときも含めて(1)の方程式を解いたことである。)しかし、$\lambda>0$ のときを扱うことによって、実際$\lambda=0$ のときにはどうやればよいかは、かなりはっきりした image ができると思われるので、ここでは$\lambda>0$ のときだけを述べておく。(更に$\lambda<0$の場合、方程

式(1)が解ける事はかなり疑わしい。)

<u>(1)の C^2-solution の uniqueness</u>: $\varphi, \psi \in C^2(M)$ を(1)の方程式の解で、しかも $\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)$, $\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)$ がともに positive definite everywhere on M となっていたとする。Then

$$\det\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)\cdot\det(g_{\alpha\bar\beta})^{-1}=\exp(\lambda\varphi+f)$$

$$\det\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)\cdot\det(g_{\alpha\bar\beta})^{-1}=\exp(\lambda\psi+f)$$

$$\therefore\ \frac{\det\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)}{\det\left(\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)+\left(\frac{\partial^2(\psi-\varphi)}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)\right)}=\exp\{\lambda(\varphi-\psi)\}.$$

今 $\varphi-\psi$ が点 $P_0\in M$ で maximum をとったとすると $\left(\frac{\partial^2(\psi-\varphi)}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)$ は positive semi-definite matrix になるから

$$1 \geqq \text{上式左辺} = \text{上式右辺} = \exp\lambda(\varphi(P_0)-\psi(P_0))$$

ここで $\lambda>0$ の条件がきいてきて、 $0\geqq\varphi(P_0)-\psi(P_0)$.

故に $\varphi\geqq\psi$ everywhere on M.

今とまったく同じ議論をくり返して、 $\psi\geqq\varphi$ everywhere on M.

結局 $\varphi=\psi$ everywhere on M を得る。

<u>(1)の C^∞-solution の existence</u>:

Step 1: $0<\alpha<1$ なる定数 α (例えば $\alpha=\frac{1}{2}$ とせよ)をひとつ定める。また、M を open set U_λ; $\lambda\in\Lambda$ で覆う。但し、U_λ は $U_\lambda=\{(z_1^{(\lambda)}, z_2^{(\lambda)},\cdots, z_m^{(\lambda)})\in\mathbb{C}^m;\ |z_i^{(\lambda)}|<1,\ i=1,2,\cdots,m\}$ とい

う形に書け、しかも local coordinate system $(z_1^{(\lambda)},\cdots,z_m^{(\lambda)})$ は U_λ の M に於ける closure をちょっとこえた外の所でも定義されているとする。このとき任意の整数で $k\geq 0$ なるものに対して次のような２つの norm を定義する。即ち $g\in C^k(M)$ に対して

$$\|g\|_k \overset{\text{defn}}{=} \max_{\lambda\in\Lambda}\ \max_{p\in U_\lambda}\ \max_{\substack{I=(i_1,\cdots,i_m,i_1',\cdots,i_m') \text{ is such} \\ \text{that } |I|(=i_1+\cdots+i_m+i_1'+\cdots+i_m')\leq k}} \left\{ \frac{\partial^{|I|} g}{\partial z_1^{(\lambda)i_1}\partial z_2^{(\lambda)i_2}\cdots\partial z_m^{(\lambda)i_m}\partial \overline{z_1^{(\lambda)}}^{i_1'}\cdots\partial \overline{z_m^{(\lambda)}}^{i_m'}}(p) \right\}$$

$$\|g\|_{k,\alpha} \overset{\text{defn}}{=} \max\left(\|g\|_k ,\ \max_{\lambda\in\Lambda}\ \max_{\substack{p,p'\in U_\lambda \\ I=(i_1,\cdots,i_m') \text{ with } |I|=k}} \left\{ \# \right\} \right)$$

但し、$$\# = \left(\frac{\partial^{|I|} f}{\partial z_1^{(\lambda)i_1}\cdots\partial \bar{z}_m^{(\lambda)i_m'}}(p) - \frac{\partial^{|I|} f}{\partial z_1^{(\lambda)i_1}\cdots\partial \bar{z}_m^{(\lambda)i_m'}}(p') \right) \Big/ |p-p'|^{\alpha}$$

ここで $p=(p_1,\cdots,p_m)$, $p'=(p_1',\cdots,p_m')\in U_\lambda$ に対して

$$|p-p'| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |p_j-p_j'|^2}$$ とおいた。

さて、$C^{k,\alpha}(M)=\{ g\in C^k(M)\ ;\ \|g\|_{k,\alpha}<+\infty \}$ とおくと、この $C^{k,\alpha}(M)$ が Banach space になることは見やすい。こうして notation を fix したところで次のことを考える。即ち、$k\geq 2$ なる任意の整数 k に対し、方程式(1)の $C^{k,\alpha}$-solution $\varphi_{(k)}$（もちろん $(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi_{(k)}}{\partial z^\alpha\partial \bar z^\beta})$ が positive definite な matrix になるような）が存在したと仮定すれば、それらはすべて等しい M 上の関数を定めているであろうか？答は Yes である。これはすぐ上で証明した(1)の C^2-solution の一意性から即座に従う。

よって $\varphi_{(2)}=\varphi_{(3)}=\varphi_{(4)}=\cdots\cdots$. 即ち $\varphi_{(2)}$ がはじめから方程式(1)の C^∞-solution であることを示している。だから(1)の C^∞-solution の存在をいうには(1)の $C^{k,\alpha}$-solution の存在を各 $k=2,3,4,\cdots$ に対して示すことに帰着される。

Step 2: (A priori estimate)

(1)の方程式をみたす $\varphi\in C^{k,\alpha}(M)$ (もちろん $\left(g_{\alpha\bar{\beta}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta}\right)$ が positive definite on M となるような) ($k\geqq 4$) とする。このときこの φ は自動的に $^\exists B=B(\cancel{k},\|f\|_{k+4})\in\mathbb{R}$ (即ち φ には depend せず、M や M の上の Kähler metric $\{g_{\alpha\bar{\beta}}\}$ や $f\in C^\infty(M)$ の C^{k+4}-norm $\|f\|_{k+4}$ だけに depend する定数 $B\in\mathbb{R}_+$) が存在して $\|\varphi\|_{k,\alpha}\leqq B$ と上からおさえられることをいうのがこの step の目的であるが、これが最も困難な部分である。詳しくは Yau の論文を見ればよい (cf. [3])。その mood だけがわかるように $\|\varphi\|_0$ を estimate してみよう。(その評価を $\|\varphi\|_{k,\alpha}$ にまであげていくのに Schauder estimate, interior Schauder estimate などを使う)。$\|\varphi\|_0=\max_{p\in M}|\varphi(p)|$ に注意する。例えば $\varphi(p_0)=\varphi_{max}$ (resp. φ_{min}) とすると $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta}(p_0)\right)$ は negative semi-definite (resp. positive semi-definite) だから、

$$1\geqq \det\left(g_{\alpha\bar{\beta}}(p_0)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta}(p_0)\right)\cdot\det\left(g_{\alpha\bar{\beta}}(p_0)\right)^{-1}=\exp\left(\lambda\varphi(p_0)+f(p_0)\right)$$

$$\left(\text{resp. } 1\leqq \det(\cdots\quad)\cdot\det(\cdots)^{-1}=\exp\left(\lambda\cdot\varphi(p_0)+f(p_0)\right)\right)$$

$\therefore\ \lambda\varphi(p_0)+f(p_0) \leqq 0 \quad \therefore\ \varphi_{max} = \varphi(p_0) \leqq \dfrac{|f|_{max}}{\lambda}$

(resp. $\lambda\varphi(p_0)+f(p_0) \geqq 0 \quad \therefore\ \varphi_{min} = \varphi(p_0) \geqq -\dfrac{|f|_{max}}{\lambda}$)

故に φ は上から (resp. 下から) おさえられる。(実際、我々は $\|\varphi\|_0 \leqq \dfrac{|f|_{max}}{\lambda} \left(= \dfrac{\|f\|_0}{\lambda}\right)$ を示したわけである。)

Step 2: さていよいよ方程式(1)の $C^{k,\alpha}$-solution が存在することを continuity method を使うことによって示そう。そこで次のような continuous map を定義する。

$$G : C^{k,\alpha}(M) \longrightarrow C^{k-2,\alpha}(M)$$
$$\varphi \longmapsto G(\varphi) = \det\left(g_{\alpha\bar\beta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)\cdot \det(g_{\alpha\bar\beta})^{-1}\cdot \exp(-\lambda\varphi)$$

$$\gamma : I = [0,1] \longrightarrow C^{k-2,\alpha}(M)$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = \exp(tf)$$

また Ⓗ $= \left\{ \varphi \in C^{k,\alpha}(M) ;\ \left(g_{\alpha\bar\beta} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right) \text{ is positive definite everywhere on } M \right\}$

とおくと、もちろん Ⓗ は $C^{k,\alpha}(M)$ の open subset である。今

$$T = \left\{ t \in [0,1] ;\ \det\left(g_{\alpha\bar\beta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)\cdot(\det g_{\alpha\bar\beta})^{-1} = \exp(\lambda\varphi + tf) \text{ has a solution in Ⓗ} \right\}$$

とおくとき、方程式(1)が $C^{k,\alpha}$-solution をもつということを示すには $T \ni 1$ を示せばよい。これを次のようにして示す。

Ⓐ まず $T \ni 0$ に気をつける。($\because$ $t=0$ のときは方程式は $\det\left(g_{\alpha\bar\beta} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar\beta}}\right)\cdot(\det g_{\alpha\bar\beta})^{-1} = \exp(\lambda\varphi)$ となり $\varphi = 0$ が解である。)

Ⓑ 次にTが[0,1]のopen subsetであることを示す。そのためにinverse function theoremを使う。そこで任意の$\varphi_0 \in \Theta$をfixし、$G(\varphi_0+\varepsilon\psi)$を$\varepsilon$に関してTaylor展開すると、

$$G(\varphi_0+\varepsilon\psi) = \det\left(g_{\alpha\bar\beta} + \frac{\partial^2(\varphi_0+\varepsilon\psi)}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta}\right)\cdot \det(g_{\alpha\bar\beta})^{-1}\cdot \exp(-\lambda(\varphi_0+\varepsilon\psi))$$

$$= G(\varphi_0) + \varepsilon \det\left(g_{\alpha\bar\beta} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta}\right)\cdot \det(g_{\alpha\bar\beta})^{-1}\cdot \exp(-\lambda\varphi_0)\cdot(\Delta_{\varphi_0}\psi - \lambda\psi)$$

$$+ \varepsilon^2(\,--\,) + \cdots$$

但し、$\Delta_{\varphi_0} = \sum_{\alpha,\beta} \tilde g^{\alpha\bar\beta} \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta}$; $(\tilde g^{\alpha\beta})$は$\left(g_{\alpha\bar\beta} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta}\right)$のinverse matrix. よってmapping $G : C^{k,\alpha}(M) \to C^{k-2,\alpha}(M)$の$\varphi_0$におけるdifferential G_*は次のように書ける。

$$G_* : C^{k,\alpha}(M) \longrightarrow C^{k-2,\alpha}(M)$$

$$\psi \longmapsto \det\left(g_{\alpha\bar\beta} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta}\right)\cdot \det(g_{\alpha\bar\beta})^{-1}\cdot \exp(-\lambda\varphi_0)\cdot(\Delta_{\varphi_0}\psi - \lambda\psi)$$

ここで$\lambda > 0$がきいてきて、Δ_{φ_0} has only non-positive eigen valuesに注意するとG_*はone-to-one onto 即ちlinear homeomorphismとなっている。$\varphi_0 \in \Theta$は任意なのでinverse mapping theoremにより、$G|_\Theta$はopen mapping. さて、

$$T = \{ t \in I = [0,1] ;\ G(\varphi) = \gamma(t) \text{ has a solution } \varphi \text{ in } \Theta \}$$

$$= \{ t \in I ;\ \gamma(t) \in G(\Theta) \} = \gamma^{-1}(G(\Theta))$$

$$= \text{open subset in } [0,1].$$

Ⓒ $T \ni 1$を示すには、[0,1]のconnectednessにより T: closed subset in [0,1]を示せばよい。そこで$t_n \in T$; $n=1,2,3,\cdots$でかつ、$t_n \to t \in [0,1]$ (as $n\to\infty$)としたとき$t \in T$を示せ

ばよい。 $t_n\in T$; $n=1,2,\cdots\cdots$ であるから $\exists\varphi_n\in\textcircled{H}$ s.t.

$$\det\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial z^\alpha\partial \bar z^\beta}\right)\cdot\det(g_{\alpha\bar\beta})^{-1}=\exp(\lambda\varphi_n+t_nf).$$

ここで $|t_n|\leqq 1$ だから $\|t_nf\|_{k+4}\leqq\|f\|_{k+4}$. よって Step 2 の Apriori estimate により、どんな $n=1,2,\cdots$ に対しても

$$\|\varphi_n\|_{k,\alpha}\leqq B(\cancel{M},\|f\|_{k+4}).$$

よって各 coordinate chart U_λ の M での closure $\overline{U_\lambda}$ の上では、φ_n の k 回偏微分は一様有界かつ、同等連続である。（ここで Hölder continuity をつかった。）よって Ascoli-Arzela の定理によって一様収束する部分列が存在するが、その部分列を、最初の $\{\varphi_n ; n=1,2,\cdots\}$（の k 回偏微分）と同一視しても一般性を失わない。よって $\exists\varphi\in C^k(M)$ s.t. $\varphi_n\to\varphi$ in $C^k(M)$.

今、$p,p'\in U_\lambda$ に対し、$\|\varphi_n\|_{k,\alpha}\leqq B$, $\forall n=1,2,\cdots$ であるから、

$$\left|\frac{\partial^{|I|}\varphi_n}{\partial z_1^{(\lambda)i_1}\cdots\partial\overline{z_m^{(\lambda)}}^{i'_m}}(p)-\frac{\partial^{|I|}\varphi_n}{\partial z_1^{(\lambda)i_1}\cdots\partial\overline{z_m^{(\lambda)}}^{i'_m}}(p')\right|\leqq B\cdot|p-p'|^\alpha.$$

（但し、$|I|=i_1+\cdots+i'_m=k$）

ここで $n\to\infty$ とすると、

$$\left|\frac{\partial^{|I|}\varphi}{\partial z_1^{(\lambda)i_1}\cdots\partial\overline{z_m^{(\lambda)}}^{i'_m}}(p)-\frac{\partial^{|I|}\varphi}{\partial z_1^{(\lambda)i_1}\cdots\partial\overline{z_m^{(\lambda)}}^{i'_m}}(p')\right|\leqq B|p-p'|^\alpha.$$

これは $\|\varphi\|_{k,\alpha}\leqq B\,(<+\infty)$ を示している。$\therefore\ \varphi\in C^{k,\alpha}(M)$.

また $\varphi_n\to\varphi$ in $C^k(M)$ だから（もちろん $k\geqq 2$ のときを考えて） $\det\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta}\right)\cdot\det(g_{\alpha\bar\beta})^{-1}=\exp(\lambda\varphi_n+t_nf)$ で $n\to\infty$ として $\det\left(g_{\alpha\bar\beta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta}\right)\cdot\det(g_{\alpha\bar\beta})^{-1}=\exp(\lambda\varphi+tf)$ を得

る。しかも各$\varphi_n \in \Theta$であるから今得た等式も考えあわせると、$\varphi \in \Theta$がわかる。これはとりもなおさず$t \in T$を示している。よって、Tは closed subset in $[0,1]$となっている。 Q.E.D.

以上で Reduction の解き方の outline を述べた。

そこで Calabi 予想の種々の応用を証明なしで羅列してみる。（最も一般的な Calabi 予想の応用も含めて。）

(い) Mを compact complex manifold of dim $=2$ で$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$と homeo だとする。このとき$M \simeq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (biholomorphic)

(ろ). Mを compact complex manifold of dim $=n$ でしかも Kähler だとする。もしMが$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$と homeo ならMは$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$と biholomorphic.

(は) Mを compact complex manifold of dim $=n$ で $c_1(M) \lessgtr 0$ or $c_1(M)=0$だとする。このとき次の不等式が成りたつ。

$$(-1)^{n-2} \cdot 2(n+1)\, c_2(M)\, c_1(M)^{n-2}[M] \geqq (-1)^{n-2} \cdot n\, c_1(M)^n [M]$$

ここで等号成立はMの universal covering が open ball $\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n;\ |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<1\}$となっている時（もちろん holomorphic に cover される。）

$n=2$のときは所謂 miyaoka の不等式である。

(に) Mを compact complex manifold で $c_1(M)>0$ とする。このときMは simply connected である。

(ほ) M を compact Kähler manifold で $c_1(M)=c_2(M)=0$ だとする。このとき M は complex torus で cover (unramified covering) される。

A priori estimate の詳しいことは Yau の原論文[3]、outline は Bourguignon [2] を見よ。応用は Bourguignon に詳しい。

Reference

[1] T. Aubin --- Métriques riemanniennes et courbure, J. Diff. Geom. 4 (1970), p.p. 383-424.

[2] J.P. Bourguignon --- Premières formes de Chern des variétés Kählériennes compactes, Séminaire Bourbaki, November 1977.

[3] S.T. Yau -- On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978) p.p. 339-411