数理解析研究所講究録
第 352 巻 1979 年 62-79

一階の擬微分作用素達をLie環に持つ無限次元Lie群とSchrödingerの相対論的量子力学

都立大・理　大森 英樹

まず、物理学を離れて、純粋数学的に、一般相対論の方がNewton力学よりも無限次元Lie群論的に閉じた体系であることを示す。次にこれを量子化した場合どういう問題が生ずるのかを論ずる。量子化したものが表題で述べたものとなるのだが、完全にはできていない。

§1 Hamilton力学

Hamilton力学とは古典力学の持つ数学的側面を非常に美しく述べたものであり、これまで表れたすべての力学はこの中に包括されてしまうので、今日ではかなり原理的なものと解釈されているものである。細部を無視して公理臭く述べれば次のようになる：

(1) 考察されている力学系に対応して、相空間と呼ばれるシンプレクティック多様体 (M,Ω) が定まる。

(2) 考察されている力学系に対応して、Hamiltonianと呼ばれ

るある函数 H が存在する。

(3) 上の Hamiltonian H によって統括される力学的運動は、X_H なる Hamiltonian vector field の積分曲線として記述される。但、X_H は $dH = \Omega \lrcorner X_H$ で定義される M上の vector field である。

さて、M内の点は、力学系の状態を表わす。従って、力学的に閉じている系を考えている限り、X_H の積分曲線はすべての時刻で定義できていないと困るだろう。従って、

(a) X_H は完備なベクトル場である。

と仮定するのは自然であろう。

一方、Hamilton 力学と同値なものに、Poisson 力学というのがある。これは次のように述べられる。f をM上の任意函数、φ_t を X_H より生成される one parameter 群とする。このとき、$f_t = \varphi_t^* f$ を f の時間発展という。

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_H(\varphi_t(x)) \iff \frac{d}{dt} f_t = -\{H, f_t\}.$$

但し、$\{\ ,\ \}$ Poisson 括弧積である。

古典的な Poisson 力学では f はM上の任意函数であるが、量子論からの影響を考慮して、f に 'Observable (観測可能量) という意味をつけよう。そうすれば、任意の函数が Observable とは考えにくいから、M上の C^∞ 函数全体の中の部分集合として、Observable $\mathcal{O}$ という集合があるものと考えてみよう。

ところで、Observable という概念は Hamiltonian と同様、数学

的には無定義語である。しかし、力学系を考える以上、次の事は約束されねばなるまい：

(b) Hamiltonian と称する函数 H は $\mathcal{O}$ の元である。

しかし、Hamiltonian の定義はないのだから、次もしようがあるまい：

(b′) $\mathcal{O}$ の元はすべて Hamiltonian になり得る。

このように考察を進めていけば、$\mathcal{O}$ としては次の性質はどうしても仮定しなければならなくなると思われる：

(A,1) $\mathcal{O}$ は Poisson 括弧積に関して Lie 環を成す。

(A,2) $\forall f \in \mathcal{O}$ に対し、X_f は完備なベクトル場となる。但、X_f は $df = \Omega \lrcorner X_f$ で定義される。

(A,3) $(\exp tX_f)^* \mathcal{O} = \mathcal{O}$ 但、$\exp tX_f$ は X_f により生成される one parameter 群。

《注》一寸した仮定があれば (A,1)⇔(A,3) だが一般にはこの二つは独立である。(A,3) は、$f \in \mathcal{O}$ の時間発展 f_t がある t で突然 Observable でなくなるのは不自然という理由による。

《注》M がコンパクトの時には、$\mathcal{O} = C^\infty(M)$ (C^∞ 函数全体) とすれば (A,1)〜(A,3) がみたされる。

§2 Newton 力学

M がコンパクトでないと様々なことが起る。一例として、

Mとして、配位空間Nの余接空間T^*Nをとって考えよう。$M=T^*N$は自然にシンプレクティック形式Ωを持つ。また、NにはC^ωな計量g_{ij}（これの逆行列をg^{ij}と記す）が定義されているものとする。さて、Newton力学とは、Hamiltonianとして

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j + V \qquad \cdots (☆)$$

の形の函数をとったHamilton力学である。但、VはN上のC^ω函数を自然に$M=T^*N$上のそれと思い直したもので、Newton力学の形式だけを論ずる時には任意にとってかまわない。ところが次の奇妙な定理が証明されてしまうのである：

《定理》 $\mathcal{O}$を(T^*N, Ω)上のObservable全体とし、(A,1), (A,2)をみたしているものとする。更に$\mathcal{O}$はNewton力学のHamiltonian H (☆)を一つでも含んでいるとする。このとき、次が成立つ：$f \in C^\omega(N) \cap \mathcal{O}$が点$x \in N$で$j_x^2 f = 0$ならば、すべての$k \geqq 2$で$j_x^k f = 0$。従って、Nも$g_{ij}$も$C^\omega$のときには$\dim C^\omega(N) \cap \mathcal{O} \leqq \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$　$n = \dim N$。

この定理は、$j_x^2 f = 0$で$j_x^k f \neq 0$　$k \geqq 3$とすると、$\mathcal{O}$は必ずある函数gでX_gが完備でないものを含むことを証明するのである。証明法の系として、

《系》 $N = \mathbb{R}^n$のとき、$T^*N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$上の自然な座標に関する2次式の全体を$\mathcal{P}_2$とすると、$\mathcal{P}_2$は(A,1)〜(A,3)をみたすが、$\mathcal{P}_2$を真に含むような$\mathcal{O}$で(A,1), (A,2)をみたすものは無い。

ことがわかる。ちなみに P_2 は調和振動子を含んでいる。

§3 相対論的 Hamiltonian

上の奇妙さを救う為には相対論を考えると良い。以下では簡単の為に N（配位空間）はコンパクトとする。$\mathbb{R}\times N$ を時空と考え。そこに次のような Lorentzian metric を入れる：

$$d\tau^2 = c(x)^2 dt^2 - h_{ij}(x) dx^i dx^j$$

$d\tau^2$ は t を陽に含まぬので、静線素と呼ばれる。このような時空のモデルは相対論に於てはそれ程特殊なものではない。この時空で測地線の方程式（特に時間的又は null 測地線）を扱う事は、T^*N 上で

$$H = c(x)\sqrt{1 + h^{ij} p_i p_j} \qquad \cdots (\star\star)$$

を Hamiltonian として X_H の積分曲線を扱うことが同等であることが良く知られている。(★★) を相対論的 Hamiltonian と呼ぶことにしよう。上のような静線素で考える限り、一般相対論的力学とは、Hamiltonian として (★★) の形のものをとった Hamilton 力学と同じものである。（Hamilton 力学は相対論をも許容しているのである。）Newton 力学では (★) のうち potential V はほゞ自由にとれた。相対論的 Hamiltonian (★★) に於ては、h_{ij} がほゞ自由にとれるのである。

(★★) に於ける $H = H(x,p)$ がどのような函数かを調べる為

に、Nに計量 g_{ij} を一つ固定し、$r=\sqrt{g^{ij}p_ip_j}$ とする。

《Lemma》すべての相対論的 Hamiltonian は次のような漸近展開を持つ:

$$H(x,p)\sim a_{-1}r+a_0+a_1r^{-1}+a_2r^{-2}+\cdots+a_mr^{-m}+\cdots$$

但し、a_j は g_{ij} で計った単位余接球 bundle 上の C^∞ 函数である。

$\mathcal{S}$ を上のような漸近展開を持つ T^*N 上の函数全体とする。

《定理》$\mathcal{S}$ は (A,1)〜(A,3) をみたす。即ち、相対論的な Hamiltonian を考えている限り、Newton 力学のような困難は生じない。

§4 Regular Fréchet-Lie groups

前章の定理は実はもっと強い形で書くことができる。即ち、$\mathcal{S}$ は、ある種の無限次元Lie群のLie環になっているのである。この事は、相対論の方がNewton力学よりも群論的に閉じた形をしていることを示している。その"ある種のLie群"というものを定義しよう。その為に少し、Lie群論の現情を見ることから始めよう。

有限次元Lie群論・Lie環論は今日の幾何学にとって必要不可欠の概念であるが、それとは別に無限次元Lie環論の方は数学や、数理物理学のあちこちに存在している。微分幾何学に

於ては、ベクトル場の芽の作る無限次元単純Lie環の分類理論がE. Cartanによって行われた。([18], [10], [5], [9], [17])
代数の中ではnon-associative algebraに関連してLie環の代数的側面がAmayo-Stewartの本[1]に詳しく論じられている。作用素解析に於ては、様々な条件下での単純Banach-Lie環の分類論がP. de la Harpe [3]によって論じられている。物理数学に於ては、無限次元Lie環の物理への応用がJoseph [6]によって論じられている。

このようなLie環論を見ていると当然わいてくる疑問は、"上で扱われているようなLie環は全部何かある"Lie群"のLie環であろうか?" ということであろう。これに対する答は、残念ながらnoである。Van Est-Korthagen [19]によって、「Banach-Lie環であって、いかなるBanach-Lie群のLie環にもならないものが存在する」が知られている。従って、次なる疑問は当然、"Lie群が対応しないようなLie環に、幾何学的又は物理的な意味があるのであろうか?"であろう。幾何学に於てはむしろLie群の方が"実在"していて、Lie環の方は、それを調べる為の代数的手段と理解されて来たのであり、物理に於てもそうであろう。従って、上のようなことを疑問として持てば、Lie環論ではなしに、Lie群論を作ることが急務となってくるのである。

ところで、最初から大域的な群として考察されたものがある。それはBanach-Lie群である。([4],[2]参照。)しかし、極めて残念な事に、Banach-Lie群は有限次元多様体に極めて作用しにくいのである。([11],[12]参照。作用する例は非常に少ない。)この理由によって、Banach-Lie群よりもっと広い概念で、かつ扱いやすい対象が要求される。筆者が、昔定義した強ILB-Lie群の概念はこの要求をある程度みたすものであった。これによって、Cartanのリストにある変換群はすべて含まれることになった。但し、考える多様体は全部コンパクトにしてである。(この辺については[13]参照。)副産物として、コンパクト多様体上のC^∞同相の群の様々な部分群が強ILB-Lie群となることもわかった。

しかし、一方、non-compact多様体上の変換群を扱うには、強ILB-Lie群の概念では狭すぎる場合も沢山出て来た。特に特異点集合を不変にするような群の場合にそうである。([14][15]参照。)例えば§2の記号を使って、$\mathcal{D}_\Omega(\overline{T^*N})$なる群を考えよう。これは、$T^*N$から自身へのsymplectic diffeomorphismであって、T^*Nの無限遠方にある余接球バンドル上に接触変換を引き起すものゝ全体である。この群を扱うのは、Ωが無限遠点の余接球バンドル上にまでは拡張できない為、[13]で扱ったような楕円型複体の枠で扱うことができないので難し

い。そこで、$\mathcal{D}_\Omega(\overline{T^*N})$ のような群はもう少し広い枠で扱った方が利口であろうという結論になるのである。

《定理》 $\mathcal{D}_\Omega(\overline{T^*N})$ は regular Fréchet-Lie 群である。前章の $\mathcal{S}$ は、上の群の Lie 環 Γ_Ω の余次元有限の閉 ideal に同形となる。

前章の定理は実は上の定理の系である。

さて、regular Fréchet-Lie 群の定義を始めよう。

Frechet-Lie 群というのは、Frechet 多様体と位相群の結合された概念であるのだから、これを定義するには写像の微分可能性の定義さえあれば良い。以下では Frechet 空間といえば、すべて局所凸性があるものと仮定する。

E, F を Frechet 空間、U を E の開集合とする。$f: U \mapsto F$ が C^r 写像 $(r>0)$ であるとは、(C^0 とは連続ということにして)

(イ) f は C^{r-1} 写像である。

(ロ) 各 $x \in U$ に対し、r-線形で連続な写像 $(D^r f)(x)$: $E \times \cdots \times E \mapsto F$ があって、

$$F(v) = f(x+v) - f(x) - (Df)(x)(v) \cdots - \frac{1}{r!}(D^r f)(x)(v, \cdots, v)$$

とするとき、

(ロ, i) $R(t, v) = \begin{cases} F(tv)/t^r, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ は $\mathbb{R} \times E$ の点 $(0,0)$ で連続、

(ロ, ii) $D^r f : U \times E \times \cdots \times E \mapsto F$ が連続。

となる場合を云う。

この微分可能性の定義で大体並通の場合と同様の計算ができる事がわかる。([7],[8]。) Frechet Lie群の概念はかなり広いのでこの辺まで概念を広げておけば十分のような気がするであろうが、Frechet-Lie群には一つ重大な欠点がある。それはLie環 $\mathfrak{g}$ からLie群 G への exponential map の存在が保証されていないという事である。(これは、多分一般の Frechet-Lie群では反例があるだろうと思われる。)そこで、次の性質(P.1)〜(P.4)をみたすような Fréchet-Lie 群を regular Fréchet-Lie 群と呼んで特別扱いをすることにしよう: G を Fréchet-Lie 群とする。

(P.1) G の Lie環 $\mathfrak{g}$ から G の中への exponential map と呼ぶ C^∞ 写像 exp があって、$(d\exp)_0 : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ は恒等写像。かつ $\exp tu$ は $\forall u \in \mathfrak{g}$ に対して G の one parameter subgroup である。

(P.2) G 内の C^∞ 曲線 $c(t)$, $t \in [0,\infty)$, で $c(0)=e$ (単位元) となるものに対して、$\lim_{n\to\infty} c(t/n)^n$ は $\exp t\dot{c}(0)$ に右一様位相に関して広義一様収束する。

(P.3) $a=t_0<t_1<\cdots<t_{m-1}<t_m=b$ を区間 $[a,b]$ の分割とする。v を $[a,b]$ から $\mathfrak{g}$ への C^∞ 写像とする。このとき積 $g_m(t)$ を

$$g_m(t) = \exp(t-t_{k-1})v(t_{k-1})\cdots \exp(t_2-t_1)v(t_1)\exp(t_1-t_0)v(t_0)$$

と定義する。但、k は $t_{k-1}<t\leq t_k$ となる数である。この $g_m(t)$ は $\Delta_m=\max|t_{j+1}-t_j|$ が 0 に行くとき、一様に収束する。極限を、$\prod_a^t(1+v(s)ds)$ と書き、積々分と呼ぶ。

(P.4) $P(\mathfrak{g})$を$[0,1]$から$\mathfrak{g}$へのC^∞写像全体とする。$\mathfrak{g}$は、locally convex Fréchet spaceだったから、$P(\mathfrak{g})$はC^∞-uniform topologyで再びlocally convex Fréchet spaceとなる。$\prod_0^t(1+v(t))dt$は、$[0,1]\times P(\mathfrak{g})$から$G$への$C^\infty$写像となる。かつ、$g(t)=\prod_0^t(1+v(t)dt)$は、微分方程式 $\frac{d}{dt}g(t)=v(t)\cdot g(t)$ $(=dR_{g(t)}v(t))$ の一意的な解である。

(P.1)〜(P.4)は、大体、非常に調子の良い性質をみたすexponential mapの存在を要求しているのである。$\mathcal{D}_\Omega(T^*N)$のような群は、強ILB-Lie群でこそないが、かなり調子が良いのである。次にregular Fréchet-Lie groupでどんな事が云えるかを見ておこう。

(1) 有限次元Lie群、Banach-Lie群、強ILH-Lie群、強ILB-Lie群はregular Fréchet Lie群である。(しかし、すべてのFréchet-Lie群がregularであることはないと思われる。)

(2) regular Fréchet Lie群の局所構造は、そのLie環(位相もこめて)により決定される。(しかし、いかなる位相Lie環がregular Fréchet Lie群のLie環であるかという特徴づけは何もわかっていない。)

(3) Gをregular Fréchet-Lie群、$\mathfrak{g}$をそのLie環、$\mathfrak{h}$を$\mathfrak{g}$の余次元有限の閉部分環とする。そうすれば、$\mathfrak{h}$をLie環として持つregular Frechet Lie群がGの中に作れる。

(4) Gをregular Fréchet-Lie群とし、HをGのFréchet-Lie

部分群（部分群で Fréchet submanifold となるもの）とすれば、
H は regular Fréchet-Lie 群である。

(5) G を regular Fréchet-Lie group、H を閉部分群とする。このとき、$\mathfrak{h} = \{u \in \mathfrak{g};\ \exp tu \in H,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$ とすれば $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の閉部分環となる。

(6) (5) に於て、$\operatorname{codim} \mathfrak{h} < \infty$ ならば H は regular Fréchet-Lie 群である。

（注意）factor group に関しては、Lie 環の部分環に対して、位相線形空間として直和因子があるかという問題と関連して一概に云えないが、一寸面白そうな問題が沢山みつかる。

この章の定理の証明は長くなるので別の機会にゆずる。

§5 量子化。

§3 の $\mathcal{S}$ が N 上の擬微分作用素の表象の空間であることに注目する。（作用素の order は 1 階である。）$\mathcal{S} = \mathcal{S}^{(1)}$ とし、$\mathcal{S}^{(k)}$, $k \leq 0$, を、

$$\mathcal{S}^{(k)} = \{ f(x,p) \in \mathcal{S} ;\ f \sim a_k r^{-k} + a_{k+1} r^{-k-1} + \cdots \}$$

と定義し、$\mathcal{S}^{(k)}$ の複素化を $\tilde{\mathcal{S}}^{(k)}$ とする。$\{\tilde{\mathcal{S}}^{(k)}, \tilde{\mathcal{S}}^{(l)}\} \subset \tilde{\mathcal{S}}^{(k+l-1)}$ である。$C^\infty(S_N^*)$ を N の単位余接球バンドル S_N^* 上の実数値 C^∞ 函数の全体とする。$\mathcal{S} = C^\infty(S_N^*)r \oplus \mathcal{S}^{(0)}$ に注意する。更に、

$$\mathcal{S}^{\#} = C^\infty(S_N^*)r \oplus \tilde{\mathcal{S}}^{(0)}$$

とおく。$a \in \mathcal{S}^{\#}$ に対して、N上の作用素 $P_\phi(a)$ を、

$$(P_\phi(a)f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T_x^*}\int_{T_x} a(x,p)e^{-i\langle p,\xi\rangle}\phi(\xi)f(\mathrm{Exp}_x \xi)\,d\xi\,dp$$

で定義し、a を表象とする擬微分作用素と呼ぶ。f はN上の複素数値函数、Exp_x はN上の C^∞ 接続からきまる exponential map $\xi \in T_x$（Mの x に於ける接空間）ϕ は $|\xi| \gg 0$ のとき 0 となる cut off 函数で、$|\xi| \fallingdotseq 0$ では $\phi \equiv 1$ となるもの。$p \in T_x^*$（T_x の dual space）で、$\langle p,\xi\rangle$ は自然な内積、$d\xi, dp$ は T_x, T_x^* 上の自然な体積要素である。

$L_{-\infty}$ を C^∞ な核 $K(x,y)$ で核表示された smoothing operator

$$(Kf)(x) = \int K(x,y)f(y)\,dV_y \quad (dV_y \text{ は N 上の体積要素})$$

の全体とする。上の $P_\phi(a)$ の定義は ϕ のとり方に依存しているが、実は、別の ϕ' を使っても

《Lemma》 $P_\phi(a) - P_{\phi'}(a) \in L_{-\infty}$

が成立する。一方 $\{P_\phi(a)\,;\,a \in \mathcal{S}^{\#}\} \supset L_{-\infty}$ はいえないので、階数1の擬微分作用素という時には、$\{P_\phi(a)\,;\,a\in\mathcal{S}^{\#}\} + L_{-\infty}$ の元のことだと定義する。これを $\mathcal{P}^{(1)}$ と書こう。

《Lemma》 $\mathcal{P}^{(1)}$ は次の括弧積に関して Lie 環と成す。

$$\{A,B\} = \frac{1}{\sqrt{-1}}[\sqrt{-1}A, \sqrt{-1}B], \quad ([\ ,\ ] \text{ は普通の交換子積.})$$

$\mathcal{P}^{(0)}$ を $\mathcal{P}^{(1)}$ の元で、特に $\{P_\phi(a)\,;\,a\in\mathcal{S}^{(0)}\} + L_{-\infty}$ の元であるもの（階数が0）の全体とする。$\mathcal{P}^{(0)}$ は $\mathcal{P}^{(1)}$ の中の ideal であるが、

《Lemma》 $\mathcal{P}^{(1)}/\mathcal{P}^{(0)}$ は S^*_N (単位余接球バンドル)上の接触変換群のLie環と同形である。従って、$\mathcal{P}^{(1)}/\mathcal{P}^{(0)}$ をLie環に持つ regular Fréchet-Lie group は存在する。

さて、$\mathcal{S}$ が相対論的Hamiltonianを含んでいたように、$\mathcal{P}^{(1)}$ は Schrödinger の相対論的量子力学に出てくる Hamiltonian

$$c(x)\sqrt{1-\frac{1}{\hbar^2}\Delta}$$

を含んでいる。そこで、相対論の場合と同様、$\mathcal{P}^{(1)}$ と Lie 環に持つ regular Frechet-Lie group は存在するかという事が問題となる。この問題を考えてみよう。

第一に、$\mathcal{P}^{(1)}$ に Fréchet space としての構造を入れねばならない。その為に、$\tilde{C}^\infty(S^*_N)$ を S^*_N 上の複素数値函数とし、$\mathcal{P}^{(-\ell)}$ を階数が $-\ell$ の擬微分作用素とする。$\mathcal{P}^{(1)}=\mathcal{P}'_\ell\oplus\mathcal{P}^{(-\ell)}$ 但し、$\mathcal{P}'_\ell$ は $\{P_\phi(a);\ a\in C^\infty(S^*_N)\Lambda\oplus\tilde{C}^\infty(S^*_N)\oplus\cdots\oplus\tilde{C}^\infty(S^*_N)\Lambda^{-(\ell-1)}\}$ である。ℓ が十分大きければ、$P^{(-\ell)}$ の元は、連続な核で核表示されるものと思われる($\ell\geq[\frac{n}{2}]+1$ で良い筈)。$\mathcal{P}^{(-\ell)}$ にはこの核を使って位相を導入する。$\mathcal{P}'_\ell$ の方は表象 a を使って位相を入れゝば良い。

第二に、$\mathcal{P}^{(-\ell)}$ をLie環に持つ regular Fréchet-Lie群を構成する必要がある。更に $\mathcal{P}^{(0)}$ を Lie 環に持つ regular Fréchet-Lie群を構成する。これ等はすべて、$I+\mathcal{P}^{(0)}$ の形の作用素として実現できる筈だからさほど問題はないと思われる。

問題は、この事と上のLemmaから $\mathcal{S}^{(1)}$ をLie環に持つLie群を構成することである。この場合そのLie群はFourier積分作用素で階数が0のものゝ中に含まれてしまう筈であることに注目しておく必要がある。多様体上でFourier積分作用素を書くには、そのphaseからきまる S^*_N 上の接触変換が十分単位元に近い時には一定のやり方がある。まず母函数なるものを仲介として、

《Lemma》 S^*_N 上の接触変換で単位元に近いものと、0に近い $C^\infty(S^*_N)$ の元の間には1:1対応がある。

$f(x,p)=a(x,\xi)r$, $a\in C^\infty(S^*_N)$ とし、T^*N 上の函数と見る。fはpositively homogeneous degree 1だから、必ず $\langle p, A(x,p)\rangle$ $(A(x,p)\in T_xN)$ の形に書ける。aは十分0に近いものとする。又、上のaより定まる接触変換を φ とする。Fourier integral operator order 0と、$b\in\mathcal{S}^{(0)}$ に対して、

$$(F_\phi(\varphi,b)h)(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T_x^*}\int_{T_x} b(x,p)\,e^{-i\langle p,\xi\rangle+if(x,p)}\phi(\xi)\,h(\mathrm{Exp}_x\xi)\,d\xi\,dp$$

と定義する。この場合、ϕ が $\equiv 1$ となっている範囲が、$\max \mathrm{dist}\,(x,\varphi(x))$ よりも大きいとしておかねばならない。(従って φ は非常に単位元に近い。) $b\equiv 1$ としたものを $F_\phi(\varphi)$ と書く。

次の分解定理が重要である。

《Lemma》 $F_\phi(\varphi,b)=P\cdot F_\phi(\varphi)$ と一意的に分解できる。但

Pは0階の擬微分作用素である。

この事を頭に於いて、構成すべき regular Frechet Lie群の単位元の近傍は、$P\cdot F_\phi(\varphi)$ の形で、Pは1に近い擬微分作用素、φは単位元に近い S^{+}_{N} 上の接触変換、の形に書けるとして良いと思われる。

今のところ、計算がうまくいかないのは、φ, φ' が十分単位元に近いとき、$F_\phi(\varphi)\cdot F_\phi(\varphi') = P\cdot F_\phi(\varphi\varphi')$ の形に書き、Pが、φ, φ' のどのような函数として表わされるかを書き下す方法が難しい為である。予想としては当然 φ, φ' の函数として C^∞であると思われる。これができれば、$P\cdot F_\phi(\varphi)\cdot P' F_\phi(\varphi')$ とか $(P\cdot F_\phi(\varphi))^{-1}$ とかを、$P'' F_\phi(\varphi\varphi')$, $P''' F_\phi(\varphi^{-1})$ の形に書き下して微分可能性を見るのは楽だし、(P,1)〜(P,4)の性質は、これまで擬微分作用素についてやられている解析学からの一寸した応用であると思われる。

これ等の問題は、近い将来論じたいと思う。群が構成できれば、次の問題は、その群の表現である。これは、場の量子論とかなり深い関係を持つ筈である。

参考文献

[1] Amayo, R., Stewart, I., Infinite dimensional Lie algebras, Noordhoff International Publ. 1974

[2] Birkhoff, G. Analytical groups, Trans. AMS. 43 (1938) 61–

101.

[3] de la Harpe, P. Classical Banach-Lie algebras and Banach-Lie groups of operators in Hilbert spaces. LN-Springer 285, 1972.

[4] Delsarte, J. Les groupes de transformations linéaires dans l' espace de Hilbert, Mem. des Sc. Math. LVII. Gauthiers-Villars 1932.

[5] Guillemin, V. Infinite dimensional primitive Lie algebras, J. Diff. Geom. 4, (1970) 257–282.

[6] Joseph, A. Infinite dimensional Lie algebras in mathematics and physics, Lecture Note, IHES. 1974.

[7] Leslie. J. On a differential structure for the group of diffeomorphisms, Topology 6 (1967) 263–271

[8] Leslie. J. Some Frobenius theorems in global analysis, J. Diff. Geom. 2. (1968) 279–297.

[9] Morimoto, T., Tanaka, N, The classification of the real primitive Lie algebras, J. Math. Kyoto Univ. 10 (1970) 207–243.

[10] Nagano, T., Kobayashi, S. On filtered Lie algebras and geometric structures I. II. III IV. V. J. Math. Mech. 13 (1964) 875–908, 14 (1964) 513–521, 14 (1964) 679–700, 15 (1966) 163–171, 15 (1966) 315–328.

[11] Omori. H., de la Harpe. P. About interactions between Banach-Lie groups and finite dimensional manifolds, J. Math. Kyoto Univ. 12 (1972) 543–570.

[12] Omori. H. On Banach-Lie groups acting on finite dimensional manifold, Tohoku Math. J. 30 (1978) 223-250.

[13] 大森英樹. 無限次元Lie群論. 紀伊国屋数学叢書. 1978.

[14] Omori. H, A method of classifying expansive singularities, to appear

[15] Omori, H, On the volume elements on an expansive sets, Tokyo, J. Math. 1. (1978) 21-39.

[16] Omori, H, Infinite dimensional Lie groups and general relativity, to appear.

[17] Shnider, S. The classification of real primitive Lie algebras, J. Diff. Geom. 4 (1970) 81-89.

[18] Singer, I. Sternberg. S. On the infinite groups of Lie and Cartan, J. Analyse Math. 15 (1965) 1-114

[19] VanEst, Korthagen, Non-enlargable Lie algebras, Indag. Math. 26 (1964) 15-31.