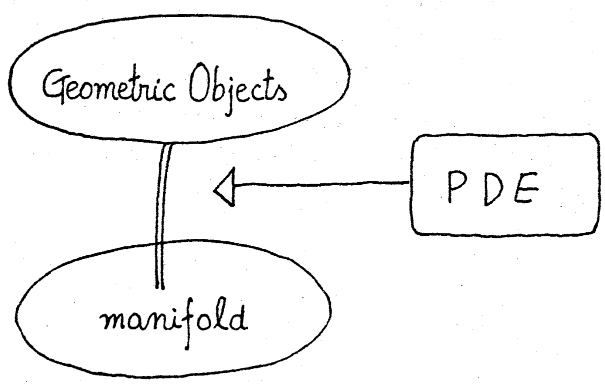
数理解析研究所講究録
第352巻 1979年 80-104

Harmonic map と Eells-Sampson の非線型放物型方程式

東大 理　西川 青季

多様体の幾何学を研究する際，考察される幾何学の対象自身が（非線型）偏微分方程式で定義されたり，あるいはそれを研究する手段として偏微分方程式がきわめて有効である場合にしばしば出会うことはよく知られている。



今回の研究集会でも取りあげられているように，たとえば複素 Monge-Ampère 方程式が Calabi 予想の解決に果した役割や，Laplace 方程式の固有値問題と多様体上の構造との関係の研究などはそのなかでも顕著なものである。これ以外に

も古来よく研究されているものとして，いわゆる Plateau 問題に現われる極小曲面の方程式や，Minkowski の問題の実 Monge-Ampère 方程式，流体力学の Navier-Stokes 方程式，電磁物理学の Yang-Mills 方程式などその例は多い。本稿ではこれらの問題のうち，Laplace 方程式や極小曲面の方程式を含む方程式として“幾何学と大域解析学”の舞台に登場した harmonic map の方程式に関する話題を，最近の結果を中心にしていくつか紹介してみたい。

§1. Harmonic map の方程式

Laplace 方程式や極小曲面の方程式がいわゆる変分問題からでてくるように，harmonic map の方程式も写像空間上の変分問題から定義されることをまず見てみよう。

(X, g), (Y, h) を Riemann 多様体とする。X, Y の局所座標をもちいるときは，それぞれを $(x^1, \dots, x^n) = (x^i)$, $(y^1, \dots, y^m) = (y^\alpha)$ であらわす。したがって，たとえば Riemann 計量 g, h は g_{ij}, $h_{\alpha\beta}$ と成分表示される。

写像空間 $\mathcal{M}(X, Y) = \{ f : X \to Y \,;\, C^\infty \text{写像} \}$ を考えよう。$f \in \mathcal{M}(X, Y)$ に対して，f の微分写像 $df : TX \to TY$ は X の接バンドル TX から Y の接バンドル TY への写像である。したがって df は X の余接バンドル T^*X と TY の f による引

きもどしバンドル $f^{-1}TY$ のテンソル積 $T^*X \otimes f^{-1}TY$ の切断面と考えられる： $df \in C^\infty(T^*X \otimes f^{-1}TY)$。そこで，エネルギー積分とよばれる汎函数 $E: \mathcal{M}(X, Y) \to R$ を

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_X |df|^2 * 1$$

で定義しよう。ここで X はコンパクト向きづけ可能とする。また $|df|$ は df の $C^\infty(T^*X \otimes f^{-1}TY)$ でのノルム

$$|df|^2 = h_{\alpha\beta}(f)\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} g^{ij}$$

をあらわす。 $Y = R$ のとき E は古典的な Dirichlet 積分に他ならない。

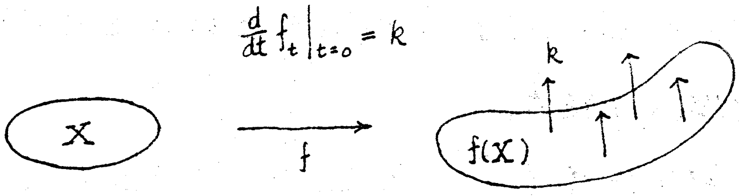
E の変分問題を考えよう。E の Euler-Lagrange 方程式は次のように計算される。

<u>補題 1</u>. $k \in C^\infty(f^{-1}TY)$ とする。このとき f における E の k 方向への第1変分 $DE(f)(k)$ は次で与えられる：

$$DE(f)(k) = \frac{d}{dt}E(f_t)\Big|_{t=0} = -\int_X \langle \operatorname{Div} df, k \rangle * 1 .$$

ここに，f_t は $f_0 = f$ かつ $\frac{d}{dt}f_t\Big|_{t=0} = k$ となる f の1径数変

形をあらわす。



また Div, <, > はそれぞれ $T^*X\otimes f^{-1}TY$ での発散量作用素 $\mathrm{Div}\,df = \mathrm{Trace}\,\nabla df$ および自然な内積をあらわす。局所座標をもちいるとき $\mathrm{Div}\,df \in C^\infty(f^{-1}TY)$ は

$$(\mathrm{Div}\,df)^\alpha = (\mathrm{Trace}\,\nabla df)^\alpha$$
$$= \sum_{\substack{i,j,k\\ \beta,\gamma}} g^{ij}\left\{\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - {}_X\Gamma^k_{ij}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^k} + {}_Y\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(f)\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j}\right\}$$

で与えられる。ここに ${}_X\Gamma^k_{ij}$, ${}_Y\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ はそれぞれ X, Y の Christoffel の記号である。以下，$\Delta f = \mathrm{Div}\,df$ と書こう。Δ は 2階の準線型楕円型作用素を定義している。そこで

<u>定義</u>. $f\in \mathfrak{M}(X,Y)$ は方程式 $\Delta f = 0$ をみたすとき，X から Y への <u>harmonic map</u> とよばれる。

harmonic map の理論は次の例からもわかるように，微分幾何学の問題と深くかかわりあっている。

<u>例</u>. 1) harmonic map $f: X\to R$ は調和函数に他ならない:

$\Delta f = \Delta f = 0$ は Laplace 方程式。

2) harmonic map $f: R \to Y$ は測地線に他ならない：$\Delta f = 0$ は測地線の方程式。

3) 極小部分多様体 $f: X \hookrightarrow Y$ は harmonic map である：$\Delta f = f$の平均曲率 $= 0$.

4) とくに等長写像 $f: X \to Y$ は harmonic map である。

5) Kähler 多様体間の正則写像 $f: X \to Y$ は harmonic map である。

1), 2) の例からもわかるように，harmonic map の方程式を

$$(\Delta f)^\alpha = \Delta f^\alpha + \Gamma(f)(df, df)^\alpha$$

とまとめるとき，標語的に （harmonic map の方程式）$= \frac{1}{2} \times$ {（Laplace 方程式）+（測地線の方程式）} と考えられる。このことからも，harmonic map の理論における中心的な研究課題の1つとして次の問題を考えることは自然でありかつ重要であろう。

問題 1. $\mathcal{M}(X, Y)$ の各元 f を harmonic map まで‘連続的に変形’できるか？ すなわち $\mathcal{M}(X, Y)$ の各ホモトピー類（= C^∞位相での連結成分）に harmonic map が存在するか？

実際この問題は Eells-Sampson [4] により大域解析学の問題として提唱されたものである。たとえばとくに $X = S^1$ のときを考えてみると，S^1 から Y への写像のホモトピー類 $[S^1, Y]$ は Y の 1 次元ホモトピー群 $\pi_1(Y)$ に他ならず，コンパクトな Y に対して $\pi_1(Y)$ の各元に harmonic map = 閉測地線が存在することはよく知られている。またとくに $Y = S^1$ のときを考えてみると，$[X, S^1] \cong H^1(X, \mathbb{Z})$ であり，このとき X から S^1 への harmonic map は X 上の調和 1-形式と自然に同一視され，X がコンパクト向きづけ可能のとき $H^1(X, \mathbb{Z})$ の各元が調和 1-形式で代表されることは Hodge 理論によりよく知られている。

§2. 存在・性質・応用

もう少し一般の Riemann 多様体 X, Y に対して問題 1 を考えてみよう。このとき我々の研究課題を要約すると，できるだけ一般の X, Y に対してまず harmonic map の存在を証明し，次にその場合に存在する harmonic map の諸性質を詳しく調べ，更にその結果の意味する幾何学的事実すなわちその応用をはかることと言ってよいであろう：

A. Existence

B. Properties

C. Applications

この観点に立って，今までにえられている諸結果のうちから主要なものをいくつかひろいだしてみよう。まずステップAについては

<u>定理A</u> (Eells-Sampson [4], Hartman [8]). X, Y をコンパクト Riemann 多様体とし，Y はいたるところ非正断面曲率をもつとする：$K_Y \leqq 0$。このとき次が成立する。

(1) 問題1はYESである。すなわち $\mathcal{M}(X, Y)$ の各ホモトピー類に少なくとも1つ harmonic map が存在する。

(2) $f_0, f_1 \in \mathcal{M}(X, Y)$ をホモトープな harmonic maps とするとき，f_0 と f_1 は harmonic maps f_t を通してホモトープである。すなわち f_0 とホモトープな harmonic maps の全体のなす集合は連結である。

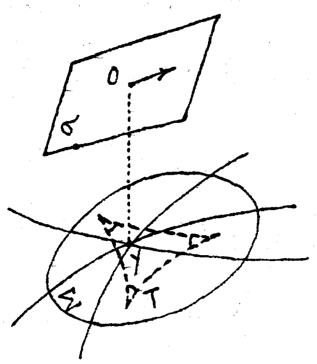
(3) とくに Y がいたるところ負断面曲率 $K_Y < 0$ をもつとき，定値写像ではない harmonic map に対して次の意味で一意性が成立する：

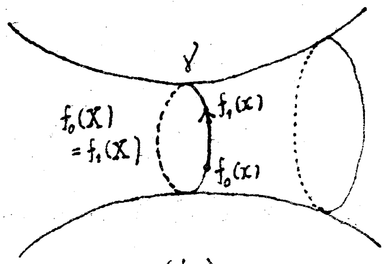
$f_0, f_1 : X \to Y$ をホモトープな harmonic map とするとき

(a) $f_0(X)$ が Y の閉測地線に含まれないならば $f_0 \equiv f_1$,

(b) $f_0(X)$ が Y の閉測地線 γ に含まれる場合は，$f_0(X) = \gamma = f_1(X)$ であってかつ写像としては $f_1 = (\gamma$ に沿っての'回転'$) \circ f_0$

となる。





(b)

ここでYが非正断面曲率をもつという条件は，直観的には次のように理解しておけばよい。点 $y \in Y$ におけるYの接空間 TY_y の任意の2次元部分空間σに対して，点yでσに接するYの測地線全体の族は局所的に2次元曲面片 $\Sigma \subset Y$ を定義する。σに関するYの断面曲率とはΣのyにおけるいわゆるGauss曲率のことであるが，実はΣ上に3辺が測地線で定義された測地3角形を描くとき，yでのσに関する

$$\text{断面曲率} > 0 \iff T\text{の内角和} > \pi,$$

$$\text{断面曲率} = 0 \iff T\text{の内角和} = \pi,$$

$$\text{断面曲率} < 0 \iff T\text{の内角和} < \pi.$$

さてそこで今度はステップBが問題になる訳だが，これに関してはたとえば次がわかる。

<u>定理B</u>（Eells-Sampson [4]）. Xをコンパクト Riemann 多様体でいたるところ正の断面曲率をもつとし，Yをいたると

ころ非正断面曲率をもつ Riemann 多様体とする。このとき任意の harmonic map $f \in \mathcal{M}(X, Y)$ は定値写像である。

ステップBについてはこの定理をあげるにとどめておこう。そこで定理Aと定理Bを組み合わせるとき，ステップCとしてたとえば次の結果をえることができる。

<u>定理C</u>（＝定理A＋定理B）．（X, g）をコンパクト Riemann 多様体で，いたるところ負断面曲率をもつとする。このとき次が成立する。

（1）（Hadamard - Cartan）X は $K(\pi, 1)$ 空間である。すなわち各整数 $i \geqq 2$ に対して $\pi_i(X) = [S^i, X] = 0$。

（2）（Preissmann）$\pi_1(X)$ の可換部分群 G は巡回群である。

（3）（Hurwitz - Bochner - Frankel）（X, g）の等長変換群 $\mathrm{Isom}(M, g)$ は有限群であり，また相異る任意の２つの等長変換はホモトープでない。

実際，定理Cの(1)は S^i が標準的計量に関して正の断面曲率をもつことより定理A(1)と定理Bを組み合わせてえられる。(3)は等長変換が harmonic map であることと，コンパクトな（X, g）に対して $\mathrm{Isom}(M, g)$ がコンパクト Lie 群となるこ

とに注意すればよい。定理A(3)より $\mathrm{Isom}(M,g)$ が離散群となることがわかる。(2)については，$\pi_1(X)$ の可換部分群を調べることは平坦な計量をもつトーラスから X への harmonic map を考察することへ本質的に帰着されることに注意すればよい。定理A(3)より求める結果がえられる（Wood [15]）。

補注：定理A(3)において，$K_Y<0$ でなくても像 $f_0(X)$ のある点ですべての断面曲率が負であれば十分である（Sampson [13]）。したがって定理C(3)においても X の断面曲率がある点で負であれば十分である。定理Bにおいては X の Ricci 曲率がある点で正であれば十分である。これはテンソル解析により容易に証明できる。またこのとき harmonic map f に対して $|df|^2$ および $|df|$ が劣調和函数になるという事実も有用である。定理C(1)は X が非正断面曲率をもてば成立することも自明であろう。

以上の議論からも推察できるように，ステップCでより豊富な応用をえようとすれば，ステップAでより一般的な存在定理を証明しておく必要があるといえる。そのとき，まず定理Aで Y がいたるところ非正断面曲率をもつという条件を弱めることと，X が境界をもつ場合に定理Aを証明するということが考えられる。ここでは後者に関する結果を紹介しよう。

§3. 境界値問題

X, Y をコンパクト Riemann 多様体とし，X は境界 ∂X をもつとしよう。このときエネルギー積分 E の Euler-Lagrange 方程式は次のようになる。

<u>補題 1′.</u>　$k \in C^\infty(f^{-1}TY)$ に対して

$$DE(f)(k) = \frac{d}{dt}E(f_t)\Big|_{t=0}$$
$$= -\int_X \langle \Delta f, k \rangle *1 + \int_{\partial X} \langle \frac{\partial f}{\partial \nu}, k \rangle *1$$

ここに，ν は境界 ∂X の外向きの法ベクトル場であり，$\partial f/\partial\nu$ は ν 方向への f の微分をあらわす：$\partial f/\partial\nu = df(\nu)$。

これより，X が境界値をもつ場合，harmonic map の方程式 $\Delta f = 0$ の境界値問題として次の 2 つの問題が自然に定式化される：

<u>Dirichlet 問題</u>		<u>Neumann 問題</u>	
$\Delta f = 0$	on X	$\Delta f = 0$	on X
$f \mid \partial X = \psi$	on ∂X	$\frac{\partial f}{\partial \nu} = 0$	on ∂X

ここに，ψ は境界値を定めるあらかじめ与えられた C^∞ 写像 $\psi: \partial X \to Y$ である。すなわち Dirichlet 問題は境界を固定した（$f_t \mid \partial X = \psi$）変分問題に対応し，Neumann 問題は境界で法線

微分が消えている（$\partial f_t/\partial\nu = 0$）変分問題に対応する訳である。

このいずれの場合にも補題1′において

$$\int_{\partial X} \langle \partial f/\partial\nu, k \rangle * 1 = 0$$

となり，harmonic map $\Delta f = 0$ がエネルギー積分 $E(f)$ の停留値を与えていることを注意しておこう．

さて §2 のステップ A に対して次の定理がえられる．

定理H（Hamilton [7]，二木[5]，Goldstein [6]）．X, Y をコンパクト Riemann 多様体とし，Y はいたるところ非正断面曲率をもつとする：$K_Y \leqq 0$．このとき次が成立する。

(1) Dirichlet 問題，Neumann 問題は YES である。すなわち境界条件つき写像空間

$$\mathcal{M}_\psi(X, Y) = \{ f \in \mathcal{M}(X, Y) \; ; \; f|\partial X = \psi \text{ on } \partial X \}$$

$$\mathcal{M}_\nu(X, Y) = \{ f \in \mathcal{M}(X, Y) \; ; \; \partial f/\partial\nu = 0 \text{ on } \partial X \}$$

の各ホモトピー類に少なくとも1つ harmonic map が存在する。

(2) Dirichlet 問題に対しては一意性が成立する。すなわち $\mathcal{M}_\psi(X, Y)$ の各ホモトピー類に harmonic map が存在して一意的である。

(3) Dirichlet 問題の解 f は境界条件 ψ に連続的に（実は C^∞ に）依存する．

そこでステップB，ステップCがまた問題となる訳だが，これに関してはまだえられている結果はそう多くはない。今後の課題といえよう。ここでは次の結果をあげるにとどめておこう。

系．（Schoen-Yau [14]）． X を完備な Riemann 多様体とし，Y をいたるところ非正断面曲率をもつコンパクト Riemann 多様体とする。$f: X \to Y$ を $E(f) < +\infty$ なる C^∞ 写像とする。このとき，harmonic map $f^\#: X \to Y$ が存在して，$E(f^\#) < +\infty$ かつ f と $f^\#$ は X の任意のコンパクト部分集合上でホモトープである。

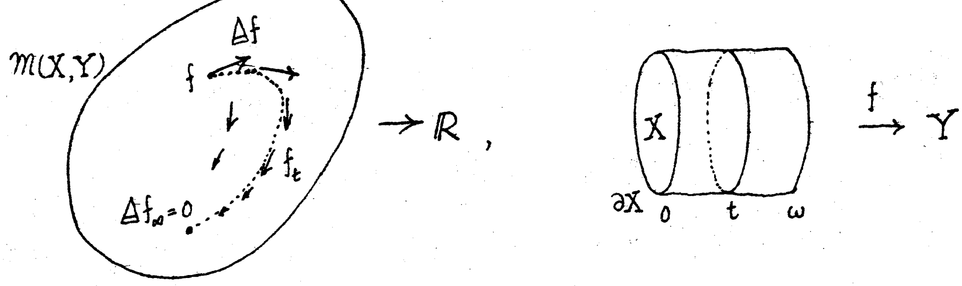
この系がコンパクトでない（完備な）Riemann 多様体の位相構造の研究に役立つことは容易に想像されよう（[14]参照）。さてこの系自身は次のようにして証明すればよい。まず X を境界をもつコンパクト部分多様体 X_i の増大族で覆っておく：$X = \bigcup X_i$。このとき定理H(1)より，f の X_i への制限 $f|X_i$ に対し $f|\partial X_i$ を固定してホモトープな harmonic map $f_i: X_i \to Y$ がえられる。このとき $E(f_i) \leqq E(f|X_i) < +\infty$ となっていることはみやすい。そこで X の任意のコンパクト部分集合 K に対して，族 $\{f_i\}$ が K 上で一様収束する部分列 $\{f_j\}$ をもつこと

を示せばよいことになる。

補注：定理H(1)(2)において，Yは境界∂YをもつRiemann多様体であっても，∂YがYの部分多様体として凸ならば同様の主張が成立する。また定理A(1)，定理H(1)(Dirichlet問題)における解のXおよびYのRiemann計量の変形g_t, h_tに関する依存性および分岐性も研究されている(Eells-Lemaire[3]，小磯[10])。

さて，harmonic mapの存在の証明方法であるが，その手法としては変分問題の直接法，Leray-Schauderの写像度理論，写像空間上のMorse理論などが考えられるがまだ決定的なものはない。ここではEells-SampsonおよびHamiltonが定理A(1)，定理H(1)を証明するのに用いた方法についてだけ述べよう。彼らはMilgram-Rosenbloomがde Rham-Hodge分解における調和形式を求めるのに熱伝導の方法を用いて成功したのに刺激されて，与えられた写像$f_0 \in \mathcal{M}(X, Y)$からharmonic mapへの‘変形’を構成する方程式として非線型放物型方程式　$\partial f/\partial t = \Delta f$　を考察した。(Laplace方程式$\Delta f = 0$の場合には古典的によく知られた方法である。)

その考え方の基本的な部分は次のように理解できる。$\partial X = \phi$としよう。まず$\mathcal{M}(X, Y)$を“多様体”と考え，$E : \mathcal{M}(X, Y) \to R$を“函数”と考える。このとき点$f \in \mathcal{M}(X, Y)$における



"接ベクトル" $v \in C^\infty(f^{-1}TY)$ 方向への E の第1変分は

$$DE(f)(v) = -\int_X \langle v, \Delta f \rangle * 1 = -\langle\langle v, \Delta f \rangle\rangle$$

で与えられる。これより Δf は多様体 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上の函数 E の勾配ベクトル場を定義していると考えられる。この勾配ベクトル場 Δf の軌跡が非線型放物型方程式 $\partial f/\partial t = \Delta f$ の解 f_t として求められる訳である。さてそこで問題はこの軌跡 f_t に沿って f を変形していくとき，時間 $t \to +\infty$ で停留点 $\Delta f_\infty = 0$ (harmonic map) へたどりつくかという点に集約される。

以上のことを頭において次の初期値・境界値問題を考えよう：

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \Delta f & \text{on } X \times [0, \omega) \\ f = f_0 & \text{on } X \times 0 \\ f = \psi & \text{on } \partial X \times [0, \omega) \ (\text{Dirichlet問題のとき}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial X \times [0, \omega) \ (\text{Neumann問題のとき}) \end{cases}$$

このとき，次の3点を示せば定理H(1)，定理A(1)(この場

合は境界条件は考えなくてよい）の証明がえられることになる。すなわち，

(1) Y がいたるところ非正断面曲率 $K_Y \leqq 0$ をもつ場合には，(*) は時間 $\omega=+\infty$ まで‘解ける’。

(2) $f_t : X \to Y$ を $f_t(\cdot) = f(\cdot, t)$ で定義するとき，時間 $t \to +\infty$ において（必要ならば適当な部分列 f_{t_n} をとることにより）f_t は $\mathfrak{M}_\psi(X, Y)$ または $\mathfrak{M}_\nu(X, Y)$ の元 f_∞ へ C^∞ 位相で収束する。

(3) f_∞ は方程式 $\Delta f_\infty = 0$ をみたす。

この3つのステップのうち (3) は (1), (2) を示せば自明である。実際，f_t は (*) の解であるから

$$\frac{d}{dt}E(f_t) = -\int_X \left\langle \Delta f_t, \frac{\partial f_t}{\partial t} \right\rangle * 1 = -\int_X \left|\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|^2 * 1 \leqq 0 .$$

したがって $E(f_t)$ は単調減少。一方 $t \to +\infty$ のとき $\partial f_t/\partial t \to 0$ でないとすると，$E(f_t)$ は強い意味で単調減少。これは $E(f_t) \geqq 0$ に反する。したがって $t \to +\infty$ のとき $\partial f_t/\partial t = \Delta f_t \to 0$。

一方，一般論（[7]参照）より次のことも比較的容易にわかる。

注意：1) ステップ (1) については，Banach 空間上の古典的な陰函数定理を用いて，Sobolev 空間 $L_2^p(X \times [0, \varepsilon], Y)$ に (*) の解をみつけることができる。ここに $L_2^p(X \times [0, \varepsilon], Y)$

は，局所L^p_2クラスの写像のなす空間である。L^p_2は空間変数に関しての2階までの超函数微分，時間変数に関しての1階までの超函数微分がL^p-可積分であることを意味する。陰函数定理を用いるとき$\varepsilon>0$は初期値f_0に依存してきまることを注意しておこう。

2)　1)で求められた解fは一意的であり，かつ$\partial X\times 0$上を除いてC^∞級である。解の正則性については harmonic map の方程式は　$\Delta f = \Delta f + \Gamma(f)(df, df)$　だから，熱作用素$\partial f/\partial t - \Delta f$および多項式微分作用素$\Gamma(f)(df, df)$の解の正則性からわかる。一意性の証明は最大値の原理による。

上の注意1)からもわかるように熱伝導の方法で harmonic map の存在問題を解こうとするとき，一番問題となるのはステップ(1)すなわち初期値・境界値問題(*)が時間$t=+\infty$まで解けるかどうかという点である。実際，Eells-Sampson，Hamilton はそれぞれYが非正断面曲率をもつならば(*)が任意の初期値f_0に対して時間$t=+\infty$まで解けることを示した訳である。そこで次の問題を考えることは自然であろう。

<u>問題2</u>. 初期値・境界値問題(*)に対して，その解の存在時間をRiemann多様体X, Yの'微分幾何学的量'と初期値

f_0の'大きさ'とで（下から）評価できるか？

§4. Neumann 問題

以下では，(*)のNeumann問題に対して上の問題2の比較的簡単な解答がえられることをみてみよう。

そのために，Riemann 多様体X, Yの'微分幾何学的量'としてXのRicci 曲率 Ric_X とYの断面曲率K_Yに注目しよう。そして実数 $r \in \mathbb{R}$ と非負実数 $R \geq 0$ を次をみたすようにえらんでおく：

$$Ric_X \geq -rg, \quad K_Y \leq R.$$

（これはX, Yがコンパクトなときにはつねに可能である。また Ric_X は定義よりX上の対称な$(0,2)$型テンソル場である。）次に初期値f_0に対して $\chi_0 = \frac{1}{2}|df_0|^2$ とおく。そしてf_0の'大きさ'としてχ_0のL^∞ノルム$\|\chi_0\|_\infty$に注目する：

$$\|\chi_0\|_\infty = \|\chi_0\|_{L^\infty(X)}.$$

このとき問題2の1つの解答として次の定理がえられる。

定理N. Xを境界をもつコンパクト Riemann 多様体とし，Yをコンパクト Riemann多様体とする。Xの境界∂Xは凸またはϕとする。$f: X \times [0, \omega) \to Y$ を Neumann 問題(*)の（時間に関しての）極大解とする。このとき次が成立する。

(1) $r + R\|\chi_0\|_\infty > 0$ のとき

$$\omega \geqq \log\left(1 + \frac{r}{R\|\chi_0\|_\infty}\right)^{\frac{1}{r}}$$

(2) $r + R\|\chi_0\|_\infty < 0$ のとき

(i) $\omega = +\infty$, かつ

(ii) f_0 は定値写像とホモトープである。

ここで ∂X が凸であるとは，部分多様体 $\partial X \subset X$ の内向きの法ベクトルに関する第2基本テンソルが半正定値であるときをいう。また(1)において $r=0$，あるいは $R=0$ のときは右辺の値はそれぞれ r または R を $\to 0$ としたときの極限をあらわすものと理解される。したがってとくに Y がいたるところ非正断面曲率 $K_Y \leqq 0$ をもつときは，$R=0$ ととることにより $\omega = +\infty$ をえる。また，たとえば X が正定値な Ricci 曲率 $Ric_X > \alpha g$, $\alpha > 0$ をもち Y が非正断面曲率をもつときには，$r<0$ および $R=0$ ととることにより (2) が適用できて，これより任意の $f \in \mathcal{M}_\nu(X, Y)$ が定値写像とホモトープであることがみちびかれる。

さて，定理 N の証明であるが，詳細は [11] にゆずることにしてここではその大まかな方針だけを述べよう。

まず，我々の Neumann 問題 (*) は方程式系なので，解の

存在時間ωを評価するのに(*)をそのまま扱うのは困難である。そこで，(*)に随伴する方程式として解fの定める初期値f_0の変形 $f_t(\cdot)=f(\cdot,t)$ の位置エネルギー密度

$$\chi_t = \frac{1}{2}|df_t|^2$$

のみたす方程式に注目する。

補題2. χ_t に対して次の不等式が成立する：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \chi_t}{\partial t} \leqq \Delta \chi_t + (\gamma + R\|\chi_t\|_\infty)\chi_t \\ \dfrac{\partial \chi_t}{\partial \nu} \leqq 0 \end{cases}$$

第2式は∂Xが凸であるという仮定よりみちびかれることを注意しておこう。計算の詳細は[11]にゆずる。

補題2に放物型不等式に対する最大値の原理を用いることにより，$\|\chi_t\|_\infty = \|\chi_t\|_{L^\infty(X)}$ の増大度に関して次の評価式をえることができる。

補題3. 任意の閉区間 $[\alpha,\beta]\subset[0,\omega)$ に対して

$$\|\chi_\beta\|_\infty \leqq \|\chi_\alpha\|_\infty \exp\left(\int_\alpha^\beta (\gamma + R\|\chi_s\|_\infty)\,ds\right)$$

が成立する。

一方，解 f の延長に関して次の補題が証明できる。

<u>補題4</u>. $f: X\times[0,\omega)\to Y$ を Neumann問題(*)の１つの解とする。もし χ_t が $X\times[0,\omega)$ 上で一様に有界ならば，f は $X\times[0,\omega]$ 上の (*) の解に延長される。

この補題の証明の方針は $\|\chi_t\|_\infty$ の有界性に関する仮定から，熱作用素 $\partial f/\partial t-\Delta f$ および多項式微分作用素 $\Gamma(f)(df,df)$ のアプリオリ評価を用いて，解 f の任意の微分 $(\partial/\partial t)^i\nabla^j f$ が $X\times[0,\omega)$ 上で一様に有界であることを示すことである。詳細はやはり [11] にゆずる。

さて以上の準備のもとに，$r\neq 0$ かつ $R\neq 0$ の場合に (1) の証明をスケッチしてみよう。

まず補題3の結果より，ほとんどすべての $t\in[0,\omega)$ に対して

$$\|\chi_t\|_\infty' \leqq (r+R\|\chi_t\|_\infty)\|\chi_t\|_\infty$$

がえられる（ここで $\|\chi_t\|_\infty'$ は t に関する微分をあらわす）。さて次に仮定から実は $[0,\omega)$ 上でつねに

$$r+R\|\chi_t\|_\infty>0$$

が成立することがわかる。このとき上式より

$$\|\chi_t\|_\infty'/(r+R\|\chi_t\|_\infty)\leqq 1.$$

この両辺をtに関して積分することにより

$$t \geqq \log\left[\left(R+\frac{r}{\|\chi_0\|_\infty}\right)^{\frac{1}{r}}\left(R+\frac{r}{\|\chi_t\|_\infty}\right)^{-\frac{1}{r}}\right]$$

をえる。ここでもし $\lim_{t\to\omega}\|\chi_t\|_\infty<+\infty$ ならば，補題4よりfが極大解であるという仮定に反するから $\lim_{t\to\omega}\|\chi_t\|_\infty=+\infty$.
したがって上式で $t\to\omega$ とすることにより

$$\omega \geqq \log\left(1+\frac{r}{R\|\chi_0\|_\infty}\right)^{\frac{1}{r}}$$

をえる。

(2)の証明の方針も同様である。この場合は補題3より

$$\|\chi_t\|_\infty \leqq \|\chi_0\|_\infty \exp(r+R\|\chi_0\|_\infty)t$$

がえられる。

定理Nでとくに $\partial X=\phi$ のときは Ducourtioux [1] でも同様の評価がえられている。

Dirichlet 問題に関しては事情はこのように簡単ではない。

紙数もつきたので，最後に

補注： 1） Hildebrandt-Kaul-Widmann [9] は変分問題の直接法を用いて，Yが正の断面曲率をもつ場合の harmonic map の Dirichlet 問題を研究している。

2） Sacks-Uhlenbeck [12] は写像空間上の Morse 理論に基

動法を用いることにより2次元球面 S^2 からの harmonic map の存在問題を詳しく論じている。

文　献

[1] J.-L. Ducourtioux, Temps de vie des solutions de l'équation de la chaleur de Eells-Sampson, C.R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, 286 (1978), 333-336.

[2] J. Eells - L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc., 10 (1978), 1-68.

[3] J. Eells - L. Lemaire, Deformations of metrics and associated harmonic maps, preprint of IHES, 1978.

[4] J. Eells - J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math., 86 (1964), 109-160.

[5] 二木昭人, Harmonic map の境界値問題の一意性について, 修士論文, 東京大学, 1979.

[6] R. A. Goldstein, Stability of the boundary-value problem for harmonic mappings, J. Math. Anal. Appl., 39 (1972), 346-359.

[7] R. S. Hamilton, Harmonic maps of manifolds with boundary, Lecture Notes in Math., no. 471, Springer, 1975.

[8] P. Hartman, On homotopic harmonic maps, Canad. J. Math., 19 (1967), 673-687.

[9] S. Hildebrandt - H. Kaul - K.-O. Widman, An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds, Acta Math., 138 (1977), 1-16.

[10] 小磯憲史, Variation of harmonic mappings caused by a deformation of Riemannian metrics, プレプリント, 大阪大学, 1978.

[11] 西川青季, On the Neumann problem for the nonlinear parabolic equation of Eells-Sampson and harmonic mappings, プレプリント, 東京大学, 1978.

[12] J. Sacks - K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersions of 2-spheres, to appear in Ann. of Math.

[13] J. H. Sampson, Some properties and applications of harmonic mappings, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 228 (1978), 211-228.

[14] R. Schoen - S. T. Yau, Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds with nonnegative Ricci curvature, Comm. Math. Helv., 51 (1976), 333-341.

[15] J. C. Wood, A note on the fundamental group of a

manifold of negative curvature, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 83 (1978), 415-417.

Eells-Lemaire [2] の章末に詳しい文献リストがついています。