数理解析研究所講究録
第352巻 1979年 105-115

Moduli of algebraic vector bundles

京大理
丸山正樹

非特異，射影的，代数多様体上の vector bundles の moduli の存在について，なるべくわかりやすく説明する。

X を $\mathbb{C}$ 上の非特異，射影的，代数多様体とし，$\mathcal{O}_X(1)$ を X 上の ample 可逆層とする。すなわち，$m \gg 0$ について，埋め入み

$$i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$$

が存在して，$i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}}(1)) \cong \mathcal{O}_X(m) = \mathcal{O}_X(1)^{\otimes m}$。ここで，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}}(1)$ は Hopf-直線束からきまる可逆層．以下，この $(X, \mathcal{O}_X(1))$ を固定する．又，X の位相は Zariski 位相のみを考える。

X 上の algebraic vector bundle of rank r を与えることは，X の open covering $\{U_i\}$ と $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, GL(r, \mathcal{O}_X))$ で $g_{ij} = g_{ik} g_{kj}$ となるものを与えることである。これはまた，X 上の rank r の locally free sheaf を与えることと同じである。従って，以下 X 上の vector bundle と言ったら，X 上の coherent locally free sheaf のことを意味することにする。

X 上のすべての vector bundles の同型類の集合 VB_X を考える。VB_X に何か代数的な構造（例えば，algebraic varieties の無限個の和，

あるいは，algebraic scheme 等）が入ったとしよう。その代数的な構造を持った $\mathcal{VB}_X$ を VB_X と書こう。VB_X が algebraic vector bundles の"moduli"と呼ばれる為には，次の性質を持つべきであろう。

(1) $\mathbb{C}$ 上の variety（あるいは，scheme）T と，$X \times_{\mathbb{C}} T$ 上の algebraic vector bundle E が与えられた時，

$$T \ni t \longrightarrow E|_{X \times \{t\}} \in \mathcal{VB}_X$$

が，T から VB_X への"代数的"な写像になる。

(2) VB_X の構造は上の性質について，最も"universal"。

例えば，$\mathcal{VB}_X$ の相異る元 E_1, E_2 が curve でつながっている，すなわち，$\mathbb{C}$ 上の 1次元 $\underbrace{\text{variety}}^{\text{連結}}$ T，$X \times_{\mathbb{C}} T$ 上の algebraic vector bundle E，T の点 t_1, t_2 が存在して，$E|_{X \times \{t_1\}} = E_1$，$E|_{X \times \{t_2\}} = E_2$ ならば，E_1 と E_2 は VB_X の点として curve でつながっている。

さて，VB_X は存在するか？ $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ としてみよう。$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 上の vector bundle E をとると，A. Grothendieck の定理により，$E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(\alpha_n)$ となる。従って，$\mathcal{VB}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ は可算集合．すなわち，$VB_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ は存在したとしても，離散的な構造しか入らない。一方，Y を非特異代数曲線とすれば，$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{C}} Y$ 上の vector bundle F で，ある $y_0 \in Y$ について，$F|_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \{y_0\}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(-\alpha)$，$F|_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \{y\}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$，$\forall y \in Y$ となるものがある．ここで，α は勝手な整数を取れる。故に，上の性質(1)を考えると，$VB_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$

は離散的な構造を持ち得ない。従って，$VB_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$は存在しない。

VB_Xは一般に存在しないから，VB_Xの適当な部分集合$\mathfrak{F}$を取って，$\mathfrak{F}$に次の性質を持つ代数的構造を入れたFを考える。

(1)$_{\mathfrak{F}}$ $\mathbb{C}$上のvariety (あるいはscheme) Tと，$X\underset{\mathbb{C}}{\times}T$上のalgebraic vector bundle Eで，$\forall t\in T$, $E|_{X\times\{t\}}\in\mathfrak{F}$となるものが与えられた時，

$$T\ni t \longrightarrow E|_{X\times\{t\}}\in\mathfrak{F}$$

が，TからFへの"代数的"な写像になる。

(2)$_{\mathfrak{F}}$ Fはの構造は上の性質について，最も"universal"。

$\mathfrak{F}$はなるべく大きく，かつFが良い性質を持つほど良い。

<u>定義1</u> X上のvector bundle Eがsimple $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(E,E)=\mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E)\cong\mathbb{C}$ (定数を掛けるendmorphismsが丁度$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E)$となる)。

Local moduliの一般論から言ってsimple vector bundleは良いものである。実際，上の$\mathfrak{F}$としてsimple vector bundlesの同型類の集合をとれば，それは，analytic spacesのcategoryでmoduliとなる様な，analytic space (Hausdorffと限らない) の構造を持つことが知られている。

我々の目標はalgebraic variety (又はscheme) のcategoryでのmoduliの構成であるので，上のsimpleという性質では不充分である。

以下の議論を統一的に扱い，結果が自然になるためには，

vector bundle (locally free coherent sheaf) だけでなく，torsion free coherent sheaf を考える方が良い。

X 上の torsion free coherent sheaf $E\,(\neq 0)$ を取る。X の non-empty open set U が存在して，$E|U$ は U 上の vector bundle になる。$E|U$ の rank を E の rank と言い，$r(E)$ で表わす。$E(m) = E\otimes \mathcal{O}_X(m)$ とすると，

$$\chi(E(m)) = \sum(-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, E(m))$$

は m についての多項式になる（$\deg \chi(E(m)) = \dim X$）。そこで，

$$P_E(m) = \chi(E(m))/r(E)$$

とおく。

<u>定義 2.</u> X 上の coherent sheaf $E\,(\neq 0)$ が $(\mathcal{O}_X(1)$ について$)$ stable (semi-stable) $\Leftrightarrow$

(1) E は torsion free

(2) E の $^\forall$coherent subsheaf $E'\,(0\neq E'\neq E)$ について，

$$P_{E'}(m) < P_E(m), \quad \forall\, m \gg 0$$

$$(\,P_{E'}(m) \leqq P_E(m), \quad {}^\forall m \gg 0\,).$$

<u>注意</u> E: stable $\Rightarrow$ E: simple。しかし，逆は一般に成立しない。

Torsion free coherent sheaves の category で考える時，性質 (1) を持つ E としては，"T 上 flat" な $X \times_{\mathbb{C}} T$ 上の coherent sheaf を取る。すなわち，<u>flat family</u> で algebraic につながっているものは，F

の中でalgebraicにつながっている。

$X \underset{\mathbb{C}}{\times} T$上にT-flatなcoherent sheaf Eが与えられ，Tはconnectedであるとする。この時，$E(m) = E \otimes p_1^* \mathcal{O}_X(m)$ ($p_1 : X \underset{\mathbb{C}}{\times} T \to X$はprojection)について，$\chi(E(m)|_{X \times \{t\}})$はtによらない．$\mathfrak{F}$をtorsion free coherent sheavesの同型類のある集合とする。$\mathfrak{F}$が$(1)_{\mathfrak{F}}$, $(2)_{\mathfrak{F}}$を満たすalgebraicな構造Fを持っているとする。上に述べたことと，性質$(1)_{\mathfrak{F}}$, $(2)_{\mathfrak{F}}$により，Fは

$$F = \coprod_H F(H)$$

と直和分解する。ここで，Hはnumerical polynomialで，$F(H) = \{E \in F \mid \chi(E(m)) = H(m)\}$。従って，各Hについて，$\mathfrak{F}(H) = \{E \in \mathfrak{F} \mid \chi(E(m)) = H(m)\}$がmoduliを持つことを言えば，$\mathfrak{F}$がmoduliを持つことになる。

Numerical polynomial Hについて

$$\Sigma(X,H) = \{E \mid E \text{はX上のstable sheafで，} \chi(E(m)) = H(m) \text{となる}\}/\text{isom.}$$

とおく。

<u>定理1</u>　$\mathbb{C}$上局所有限生成，separatedなscheme $M(X,H)$で，次の性質を持つものがある；

(a)　bijection $\Sigma(X,H) \xrightarrow{\theta} M(X,H)$が存在する，

(b)　$\mathbb{C}$上のlocally noetherian scheme T，$X \underset{\mathbb{C}}{\times} T$上のT-flat coherent sheaf Eで，$E|_{X \times \{t\}} \in \Sigma(X,H)$，$^\forall t$があれば，map

$T \ni t \longmapsto \theta(E|X\times\{t\}) \in M(X,H)$ は schemesの morphism φ_E になる。しかも, schemes の morphism $g: T' \to T$ が与えられると, $\varphi_E \cdot g = \varphi_{(1_X\times g)^*(E)}$ (scheme の morphisms として),

(c) $\mathbb{C}$ 上の scheme N と map $\theta': \Sigma(X,H) \to N$ の組が, 上の性質 (b) を持てば, $\psi\cdot\varphi_E = \varphi'_E$ となる morphism $M(X,H) \xrightarrow{\psi} N$ が一意的に存在する。ここで, φ'_E は (N,θ') に関しての (b) により存在する morphism。

上の (a) は $\Sigma(X,H)$ が "algebraic" な構造を持つことを意味する。(b) は $(1)_{\Sigma(X,H)}$ に対応し, $(2)_{\Sigma(X,H)}$ は (c) のことである。又, $M(X,H) = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$, 各 M_i はある $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n_i}$ の locally closed set で, M_i は $M(X,H)$ の open set, $M_i \subseteq M_{i+1}$. $M(X,H)$ が局所有限生成, separated であると言うのは, この意味と考えていただく(これの方が少し強い)。

定理1は, $\Sigma(X,H)$ が moduli を持つことを意味し, 従って <u>stable sheaves の集合は moduli を持つ</u>ことなる。

定理1をもっと強いものにするために, semi-stable sheaves の間にある同値関係を入れる。

<u>命題1</u>　E を X 上の semi-stable sheaf とする。

i) E の filtration $0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_t = E$ で, (a) E_i/E_{i-1} は stable $(1 \leq i \leq t)$ (b) $P_{E_i}(m) = P_E(m)$ $(0 < i < t)$, となるものがある。

ii) filtration $0 = E'_0 \subset E'_1 \subset \cdots \subset E'_s = E$ が上の性質 (a), (b) を

持てば，$t=s$で，$\{1,2,\cdots,t\}$のある置換σが存在して，$E_i/E_{i-1} \cong E'_{\sigma(i)}/E'_{\sigma(i)-1}$。

上の filtration $0=E_0\subset E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_t=E$ について，$gr(E)=\bigoplus_{i=1}^{t} E_i/E_{i-1}$ とおく。上の命題により，$gr(E)$ は E にのみによることがわかる。

<u>定義3</u>　E_1, E_2 を X 上の semi-stable sheaves とする。E_1 と E_2 が S-equivalent $\Leftrightarrow$ $gr(E_1)\cong gr(E_2)$。E_1とE_2が S-equivalent の時 $E_1 \underset{S}{\sim} E_2$ で表わす。

<u>注意</u>　$E_1 \underset{S}{\sim} E_2$ で，E_1が stable $\Rightarrow$ $E_1\cong E_2$。

Numerical polynomial H について，

$$\overline{\Sigma}(X,H)=\left\{E \;\middle|\; \begin{array}{l} E\text{は }X\text{ 上の semi-stable sheaf で，} \\ \chi(E(m))=H(m)\text{ となる}\end{array}\right\}\Big/\underset{S}{\sim}$$

とおく。上記注意により，$\Sigma(X,H)$ は $\overline{\Sigma}(X,H)$ の subset とみなせる。E の S-equivalence class を $[E]$ と書く。

<u>定理2</u>　$\mathbb{C}$ 上局所有限生成，separated な scheme $\overline{M}(X,H)$ で，次の性質を持つものがある；

(a)　bijection $\overline{\Sigma}(X,H)\xrightarrow{\overline{\theta}}\overline{M}(X,H)$ が存在する，

(b)　$\mathbb{C}$ 上の locally noetherian scheme T，$X\underset{\mathbb{C}}{\times}T$ 上の T-flat coherent sheaf E で，$E|_{X\times\{t\}}$ semi-stable，$[E|_{X\times\{t\}}]\in\overline{\Sigma}(X,H)$，${}^{\forall}t$ となるものがあれば，map $T\ni t\longmapsto\overline{\theta}([E|_{X\times\{t\}}])\in\overline{M}(X,H)$ は scheme の morphism $\overline{\varphi}_E$ になる。しかも，schemes の morphism $g: T'\longrightarrow T$ が与

えられると, $\overline{\varphi}_E \cdot g = \overline{\varphi}_{(1_X \times g)^*(E)}$ (schemes の morphism として),

(c) $\mathbb{C}$ 上の scheme $\overline{N}$ と map $\overline{\theta}' : \overline{\Sigma}(X,H) \longrightarrow \overline{N}$ の組が, 上の性質(b)を持てば, $\overline{\Psi} \cdot \overline{\varphi}_E = \overline{\varphi}'_E$ となる morphism $\overline{M}(X,H) \xrightarrow{\overline{\Psi}} \overline{N}$ が一意的に存在する。ここで, $\overline{\varphi}'_E$ は $(\overline{N}, \overline{\theta}')$ に関しての(b)により存在する morphism,

(d) $M(X,H)$ は自然に $\overline{M}(X,H)$ の open subscheme になる,

(e) $\overline{M}(X,H)$ は quasi-compact ならば projective (i.e. ある $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ の closed subscheme).

<u>注意</u> (e) について; $\dim X = 2$ 又は rank$=2,3,4$ ならば, $\overline{M}(X,H)$ は projective になることがわかっている。それ以外はまだ open problem である。

(d),(e) は $\overline{M}(X,H)$ が $M(X,H)$ の自然な compact 化の最も良い候補であることを意味している。

<u>定義4</u> $M(X,H)$ の open set U について, $X \underset{\mathbb{C}}{\times} U$ 上の coherent sheaf F が universal family であるとは, 次の性質を持つときに言う:

(i) F は U-flat,

(ii) $\forall t \in U$, $\theta(F|_{X \times \{t\}}) = t$.

Numerical polynomial H の degree が n ならば,

$$H(m) = \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{m+n-i}{n-i} , \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

と表わせる。

$$\delta(H) = \mathrm{G.C.D}\{a_0, \cdots, a_n\}$$

<u>定理3</u>　$\delta(H)=1$ ならば，$M(X,H)$ の任意の quasi-compact open set は universal family を持つ。

$\dim X=1$ の時は，$\delta(H)=1 \Leftrightarrow$ rank と degree (1st Chern class) が互に素。この場合は定理3はよく知られている。

特別な場合の $M(X,H)$，$\overline{M}(X,H)$ については，種々の結果がある。$\dim X=1$ の時には，D. Mumford，M.S. Narasimhan，P.E. Newstead，S. Ramanan，C.S. Seshadri 等による深い研究がある。$\dim X>1$ の場合には，W. Barth，K. Hulek，J. Le Potier，著者等による結果が知られている。$X=\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$，rank$=2$ の場合の結果を述べる。

<u>定理4</u>　$M(c_1,c_2)$，$\overline{M}(c_1,c_2)$ を 1st Chern class $=c_1$，2nd Chern class $=c_2$，rank$=2$ の $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 上の stable sheaves，semi-stable sheaves の moduli とする。

(a)　$M(c_1,c_2)$ non-singular, quasi-projective, irreducible variety$/\mathbb{C}$
$\dim M(c_1,c_2) = 4c_2-c_1^2-3$.

(b)　$\overline{M}(c_1,c_2)$ normal, projective, irreducible variety$/\mathbb{C}$，$\overline{M}(c_1,c_2)$ は $M(c_1,c_2)$ を open subscheme として含む。

(c)　$M(c_1,c_2)\neq\phi \Leftrightarrow 4c_2-c_1^2>0, \neq 4$.
　$\overline{M}(c_1,c_2)\neq\phi \Leftrightarrow 4c_2-c_1^2\geq 0, \neq 4$
　$4c_2-c_1^2=0 \Rightarrow \overline{M}(c_1,c_2)$ は一点。

(d) $M(c_1, c_2) \neq \overline{M}(c_1, c_2) \Longleftrightarrow 4c_2 - c_1^2 \equiv 0 \bmod 8$.

(e) $\overline{M}(c_1, c_2)$ rational variety / $\mathbb{C}$ (i.e. 函数体が、$\mathbb{C}$ 上純超越拡大，いいかえれば，ある $\mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ と birational)

(f) $M(c_1, c_2)$ が universal family を持つ $\Longleftrightarrow 4c_2 - c_1^2 \not\equiv 0 \bmod 8$.

上の結果のうち，(e)は W. Barth, K. Hulek による。(f) $\Rightarrow$ は J. Le Potier による。

文献について

定理 1 の証明は

M. Maruyama, Moduli of stable sheaves, I, J. Math. Kyoto Univ. 17, (1977).

にある。

定理 2, 3, 4 については

M. Maruyama, Moduli of stable sheaves, II, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978).

を参照。

その他

W. Barth. Moduli of vector bundles on the projective plane, Inventiones math. 42 (1977).

W. Barth and K. Hulek, Monads and moduli of vector bundles, Manuscripta Math. 25 (1978).

J. Le Potier, Fibrés stables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, Preprint.

等を参照されたい。

H. Schneider, Holomorphic vector bundles on $\mathbb{P}_n$, Sem. Bourbaki 1978/79 n° 530.

はよい解説である。その文献表とあわせて参考にされたい。

最後に，上の結果はほとんどすべて，universally Japanese ring 上有限生成な scheme S と，S 上 smooth, projective, geometrically integral な scheme X について成立する。$S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ としたのは説明が長くなるのを避けるためである。