数理解析研究所講究録
第 353 巻 1979 年 50-57

石おきゲームと計算の複雑さ

京都大学　笠井琢美
日本アイ・ビー・エム　足立暁生
相模工業大学　岩田茂樹

計算の複雑さのいろいろなクラスにおける complete な問題が数多く報告されている。[1,3,4] なかでも NP (nondeterministic polynomial time) complete な問題はよく知られており，グラフ理論関係の問題をはじめ，親しみやすい問題が豊富に報告されている．本稿では石おきゲーム（pebble game）を導入し，計算の複雑さとの関係を考察する．石おきゲームは決められたルールに従って石を動かしていき，特定の場所に石をおくことができるかどうか，というゲームである．次の結果がえられた。(1) 石おきゲームと制限した石おきゲームの複雑さを考察することにより5種の複雑さのクラスにおける complete な問題がえられる．(2) 2人ゲームの複雑さは1人ゲームの複雑さよりある意味で難かしいことがいえる．これらの結果を表1に示す．表1において，NLOGSPACE，P，

表 1

	Solvability problem（1人ゲーム）	Wining strategy problem（2人ゲーム）
固定ランクの石おきゲーム	NLOGSPACE complete	P complete
サイクルなしの石おきゲーム	NP complete	PS complete
石おきゲーム	PS complete	EXP complete

NP, PS, EXP はそれぞれ nondeterministic log space, deterministic polynomial time, nondeterministic polynomial time, polynomial space, deterministic exponential time をあらわす.

これらの結果を得る過程で alternating Turing machine (ATM と略す)[2] の概念を利用する. ATM には universal state と existential state の2種類の state があり, ATM の configuration が変化していく上で重要な働きをする. nondeterministic Turing machine は ATM の特殊な machine であると考えることができる. ATIME(T(n)), ASPACE(S(n)) をそれぞれ time T(n), space S(n) で ATM により受理される言語のクラスとすると, 次の性質がなりたつ.

定理 [2]

$$\mathrm{EXP} = \bigcup_{i\geq 0} \mathrm{ASPACE}(n^i),$$

$$\mathrm{PS} = \bigcup_{i\geq 0} \mathrm{ATIME}(n^i),$$

$$\mathrm{P} = \bigcup_{i\geq 0} \mathrm{ASPACE}(i \cdot \log n).$$

定義 石おきゲームは4組 $G=(X,R,S,t)$ で，(1) X は node の集合，(2) $R\subseteq\{(x,y,z)\mid x,y,z\in X,\ x\neq y,\ y\neq z,\ z\neq x\}$ はルールの集まりである．(3) S は X の部分集合で，$|S|$ を G のランクという．(4) t は X 中の node で terminal node という．

石おきゲームは，はじめに S のすべての node に石がおかれている．$(x,y,z)\in R$ で，x,y に石がおいてあり，z に石がおかれていないならば，x においてある石を z に移すことができる．このようにして t に石をおくことができれば G は solvable であるという．2人石おきゲームは2人で交互に石を動かすゲームである．先に t に石をおくことができたり，相手が石を動かせなくなったら，そのプレイヤーは2人石おきゲームに勝つ．

定理 2人石おきゲームにおいて先手必勝の手段が存在するかどうかの問題は EXP complete である．また石おきゲームが solvable かどうかの問題は PS complete である．

証明の概略 2人石おきゲームにおける先手必勝の手段が存在するかどうかの問題が EXP complete であることは (1) その問題が ASPACE(poly) で解けることを示し，(2) ATM で polynomial space 必要とする問題を simulate する2人石おきゲームを構成することにより証明される．また，このことと

nondeterministic Turing machine が ATM の特殊な machine であることより，石おきゲームが solvable かどうかの問題は PS complete であることが証明される．

次に制限した石おきゲームを考える．

定義　$G=(X,R,S,t)$ は有向グラフ (X,E) にサイクルのないとき，サイクルなしの石おきゲームであるという．ただし，$E=\{(x,z),(y,z)\mid (x,y,z)\in R\}$．

定理　サイクルなしの2人石おきゲームにおいて先手必勝の手段が存在するかどうかの問題は PS complete である．またサイクルなしの石おきゲームが solvable かどうかの問題は NP complete である．

証明の概略　先手必勝の手段が存在するかどうかの問題が PS であることはあきらかである．ATM で polynomial time 必要とする問題を simulate するようなサイクルなしの2人石おきゲームを構成することができるので定理の前半は証明される．ATM の特殊の machine が nondeterministic Turing machine であることから定理の後半も証明される．

定義　$G=(X,R,S,t)$ は $|S|$ が固定されているとき，固定ランクの石おきゲームであるという．

定理　固定ランクの2人石おきゲームにおいて先手必勝の手段が存在するかどうかの問題は P complete である．また

固定ランクの石おきゲームが solvable かどうかの問題は NLOGSPACE complete である.

証明の概略　前々定理や前定理の証明と同様である.

次にこれらの結果を利用して, 他のゲームの問題が EXP complete になっていることを示す.

定義　Chinese checkers game は $G=(N, E, W, B, t)$ のことで, (N, E) は有向グラフ, W, B は N の部分集合で $W \cap B = \phi$, t は N のある node である.

Chinese checkers game は有向グラフ (N, E) で2人で遊ぶゲームである. W の node には白の石が, また B の node には黒の石が, ゲームのはじめにそれぞれおかれている. (x, y), (y, z) を E の edge とする. x に白石, y に黒石がそれぞれおかれ, z にはどちらの石もおかれていないならば, 白は白の番のときに白石を x から z に移すことができる. また x に黒石, y に白石があり, z には石がおいていないならば, 黒は黒の番のときに黒石を x から z に移すことができる. ゲームは白の番からはじめ, 次は黒の番, 次は白 … というように交互に石を動かしていく. そして先に自分の色の石を t におくか, 相手の石を動かせないようにすると勝ちである.

定理　Chinese checkers game で先手必勝の手段が存在

するかどうかの問題は EXP complete である.

証明の概略　この問題が EXP で解けることはあきらかであるので, 石おきゲーム G に対して, G では先手必勝であるとき及びそのときにのみ白は Chinese checkers game G' において必勝の手段が存在する, ような G' を構成する.

次にハノイの塔に似たゲームを考える.

定義　$\mathbf{Z}$ を整数の集合, $\mathbf{N}$ を自然数の集合とする. n 次元の vector addition system [5,6] は $\mathbf{Z}^n$ の有限部分集合である. V を n 次元の vector addition system とする. $\mathbf{N}^n$ 上の関係 $\vdash_V$ は次のように定義される. $v \vdash_V w$ とは, $z \in \mathbf{Z}^n$ が存在して,

$$w(i) = v(i) + z(i) \quad \text{forall } i \ (1 \leq i \leq n)$$

がなりたつときである. ただし $w(i), v(i), z(i)$ は w, v, z の i 番目の要素である. $\overset{*}{\vdash}_V$ を $\vdash_V$ の反射遷移閉包とする.

vector addtion system の reachability problem は, 与えられた V, x, y に対して $x \overset{*}{\vdash}_V y$ かどうかを決める問題である. conservative vector addition system は, $(v_1, v_2, \cdots, v_n) \in V$ ならば $\sum_i v_i = 0$ であるような vector addition system である.

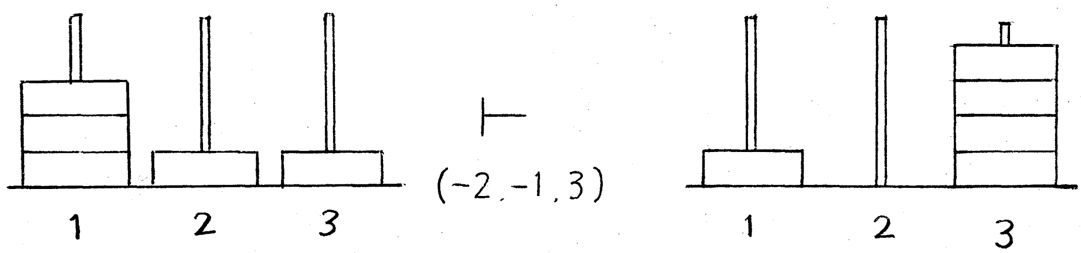
定義　peg game は $G = (V, m, n)$ のことで V は n 次元 conservative vector addition system, $m, n \in \mathbf{N}$ で

ある．Vの要素をルールという．もし

$$(m,0,0,\cdots,0) \overset{*}{\underset{V}{\vdash}} (0,0,\cdots,0,m)$$

ならば G は solvable であるという．

peg game は次のようなゲームである．ゲーム板に n 本の peg（くぎ）が打ちつけてあり，m 個の中央に穴のあいたディスク板がある．$(y_1,\cdots,y_n)\in N^n$ は i 番目の peg に y_i 個のディスク板があることを示している．ルール $(v_1,\cdots,v_n)\in V$ を適用すると，$v_i \geqq 0$ のとき，i 番目の peg に v_i 個のディスクを加え，$v_i<0$ のとき，i 番目の peg から v_i 個のディスクをとる．ゲームのはじめに m 個のディスク板は 1 番目の peg におかれている．ゲームが solvable とはルールを適用してディスク板を動かし，n 番目の peg に全部のディスク板を移すことができることである．2人 peg game はルールに従い，2人で交互にディスク板を動かし n 番目の peg にはじめて m 個のディスク板をおいた方を勝ちとするゲームである．下図はルール $(-2,-1,3)$ によりディスク板が移る様子を例示している．



定理　2人 peg game で先手必勝の手段が存在するかどうかの問題は EXP complete である.

証明の概略　前定理と同様な方法である.

系　peg game の solvability problem は PS complete である.

系　conservative vector addition system の reachability problem は PS complete である.

＜参考文献＞

[1] Aho, Hopcroft and Ullman, The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, Reading, MA, 1974.

[2] Chandra and Stockmeyer, Alternation, Proc. 17th Ann. Symp. on Foundation on Computer Sciences, 1976, pp. 98-108

[3] Even and Tarjan, A combinatorial problem which is complete in polynomial space, J. ACM 23 (1976) pp. 710-719.

[4] Jones and Laaser, Complete problems for deterministic polynomial time, Theoretical Comp. Sci. 3 (1977) pp. 105-117.

[5] Karp and Miller, Parallel program schemata, JCSS 3 (1969), pp 147-195.

[6] Miller, Mathematical studies of parallel computation, Proc. First IBM Symp. on Mathematical Foundation of Computer Science, IBM Japan, 1976.