数理解析研究所講究録
第353巻 1979年 78-86

直並列グラフの支配数

広島大学 工学部 菊野 亨
角田 良明

1. まえがき

無向グラフG＝（V，E）とVの部分集合Dに対し，Dに属さないどの節点もDの節点のどれかと隣接するなら，DをGの支配集合（dominating set）という．最小の支配集合に属する節点の数をGの支配数（domination number）という支配集合の概念はかなりの応用範囲をもっている．例えば8×8のチェス盤上に5個のクィーンを置いて64個のます目全部を支配するようにする問題がそれである．

文献（2）と（3）に従って，これまでに求まっている主な結果について簡単に紹介しておく．

［F1］(2) 任意に与えられる無向グラフGと非負整数kに対し，k個の節点からなる支配集合がGに存在するか否かの決定問題はNP－完全となる．

［F2］(3) 無向グラフG＝（V，E）が特に木の場合，

その支配数は$O(|V|)$のステップで求まる.

本稿では，閉路を有する無向グラフとしてDチャート状グラフとともによく知られている，直並列グラフ$G=(V,E)$に対し，その支配数が$O(|V|^2)$のステップで求まることを示す.

2．準備

無向グラフ$G=(V,E)$を通常の通り定義する(1)．ここで，Vは節点の空(ϕ)でない有限集合，Eは$V\times V$の部分集合で枝の集合である.

［定義1］　無向グラフ$G=(V,E)$において，$(u,v)\in E$ならuとvは隣接しているといい，又，(u,v)はu，vを接続しているという．節点$u\in V$は隣接する全ての節点及びu自身を支配するという．Gの任意の節点uが，Vのある部分集合Dに属する節点に支配されるなら，DをGの支配集合という．支配集合Dの任意の真部分集合がもはや支配集合でなくなってしまうなら，Dを特に極小支配集合という．要素の数が最も少ないような，Gの極小支配集合を最小支配集合といい，その要素の数をGの支配数といい，$d(G)$と表す.

［定義2］　無向グラフ$G=(V,E)$の２つの枝$e'=(u',v')$，$e''=(u'',v'')$において，$v'=u''$かつ$u'\neq v''$な

らe'とe''は直列に，$u'=u''$かつ$v'=v''$ならe'とe''は並列に接続しているという．Gに対し，次の直列簡約と並列簡約を繰り返し適用して，図１のグラフが得られるとき，Gは直並列グラフであるという．

直列簡約：直列に接続している２つの枝の片方を短絡除去する操作（図２）．

並列簡約：並列に接続している２つの枝の片方を開放除去する操作（図３）．

図１　最小直並列グラフG_{min}

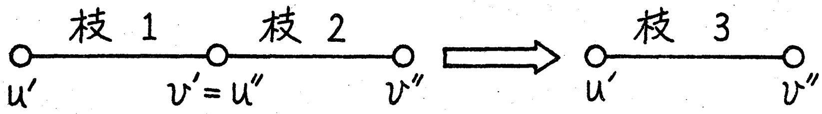


図２　直列簡約

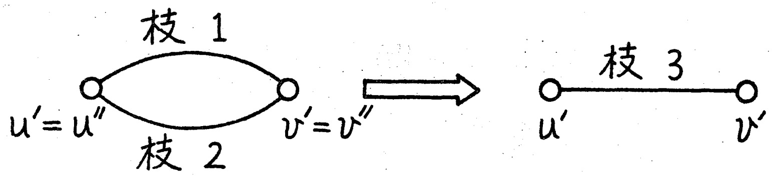


図３　並列簡約

［定義３］　次のように帰納的に定義される１端子対グラフを直並列グラフという．

（１）異なる２つの節点u，vを接続している枝（u，v）は，uとvを端子対とする直並列グラフである．

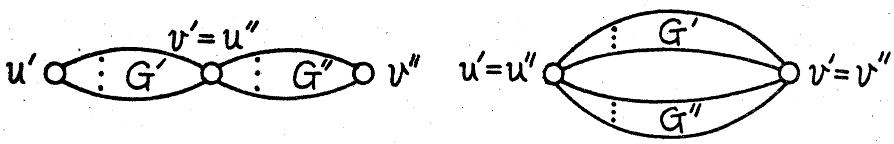
（２）G'をu'とv'を端子対とする直並列グラフとし，G''を

u''とv''を端子対とする直並列グラフとするとき，

（a）図4（a）に示すように，G'とG''を直列接続したグラフは，u'とv''を端子対とする直並列グラフである．

（b）図4（b）に示すように，G'とG''を並列接続したグラフは，u'とv'を端子対とする直並列グラフである．

（3）（2）を有限回繰り返して得られるものそれだけが直並列グラフである．



（a）直列接続　　（b）並列接続

図4　グラフの接続

3．直並列グラフの支配数

アルゴリズムを述べる前に，以下で必要となる概念を導入する．

［定義4］　Gを直並列グラフとし，$\hat{G}$をuとvを端子対とするGの部分直並列グラフとする．２つの集合を$V_B=\{u^{0\text{-}0}, u^{0\text{-}1}, u^1, v^{0\text{-}0}, v^{0\text{-}1}, v^1\}$，$E_B=\{(u^{0\text{-}0}, v^{0\text{-}0}), (u^{0\text{-}0}, v^{0\text{-}1}), (u^{0\text{-}0}, v^1), (u^{0\text{-}1}, v^{0\text{-}0}), (u^{0\text{-}1}, v^{0\text{-}1}), (u^{0\text{-}1}, v^1), (u^1, v^{0\text{-}0}), (u^1, v^{0\text{-}1}), (u^1,$

v^1)}と定義する．このとき，ラベル付き２分グラフB＝（$\hat{V}_B$，$\hat{E}_B$）を$\hat{G}$に対するブロックという．但し，$\hat{V}_B$は節点の集合で，$\hat{V}_B=V_B$，$\hat{E}_B$は枝の集合で，$\hat{E}_B \subseteq E_B$とする．Bの各枝（u^α，v^β）$\in \hat{E}_B$（α，$\beta \in$ { 0-0，0-1，1 }とする）には非負整数がラベルとして付けられるが，それをN（u^α，v^β）で表す．

なお，Gの支配集合をDと仮定するとき，ブロックの節点u^α，v^β，枝（u^α，v^β），ラベルN（u^α，v^β）のもつ意味は次の通りである．

まず，節点u^αは肩につけられたαに応じて次のような意味をもつ．

u^{0-0}：節点uとuに隣接する$\hat{G}$内の全ての節点がDに属さないことを示す．このままでは，uは$\hat{G}$内のDに属する節点に支配されないが，直列接続あるいは並列接続によって，$\hat{G}$外のDに属する節点tに支配されることを想定している（図５（a）参照）．

u^{0-1}：節点uはDに属さないが，uに隣接する$\hat{G}$内のある節点wがDに属することを示す．即ち，uはDに属する節点wに支配されている（図５（b）参照）．

u^1　：節点uはDに属することを示す．即ち，uはDに属するu自身に支配されている（図５（c）参照）．

節点v^βも同様の意味をもっている．

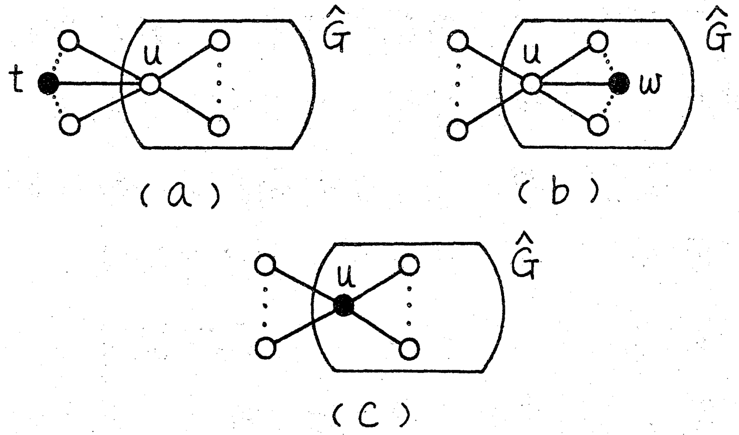


図5　ブロック上の各節点が表す支配関係
（黒丸●は，その節点がDに属することを示す）

無向枝（u^α，v^β）$\in \hat{E}_B$は，u^α及びv^βで述べた支配関係の組合せが許されることを示す．したがって，枝の存在しない節点の対に対してはその組合せが禁じられることを意味する．

ラベルN（u^α，v^β）は，u^α及びv^βで指定するようにD（のうち$\hat{G}$に属する部分だけ）を決めたときの$\hat{G}$の支配数を表す．

3．1　アルゴリズム

直並列グラフGの支配数を求めるアルゴリズムＳＰＤは，Gの直列簡約及び並列簡約に伴って行われる．主な手順を以下に示す．

アルゴリズムＳＰＤ

（１）G上の各枝に対して，初期ブロックを構成する．

（２）Gに対して，直列簡約を可能な限り行う（その結果得

られるグラフをG^Sと表す）．その個々の直列簡約に伴ってブロックを再構成する．これがブロック間直列接続操作S（単に操作Sとよぶ）である．

（3）その後G^Sに対して，並列簡約を可能な限り行う（その結果得られるグラフを$(G^S)^P$と表す）．その個々の並列簡約に伴ってブロックを再構成する．これがブロック間並列接続操作P（単に操作Pとよぶ）である．

（4）以上（2），（3）の直列簡約及び並列簡約を最小直並列グラフG_{min}が得られるまで行う．

（5）G_{min}に対するブロックからGの支配数を求める．

直並列グラフの一例G_1にSPDを適用して，簡約されていく様子（図6参照）と，これに伴う操作S及び操作Pについ

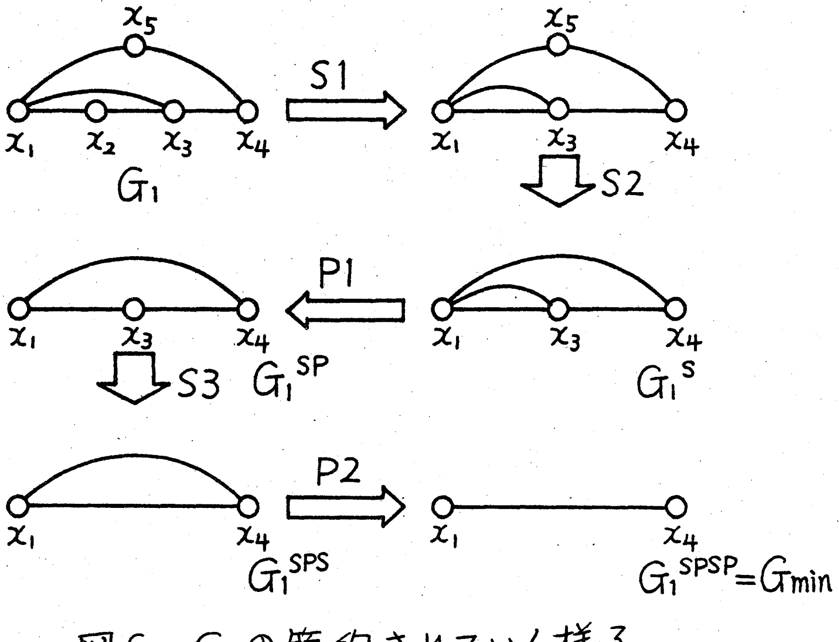
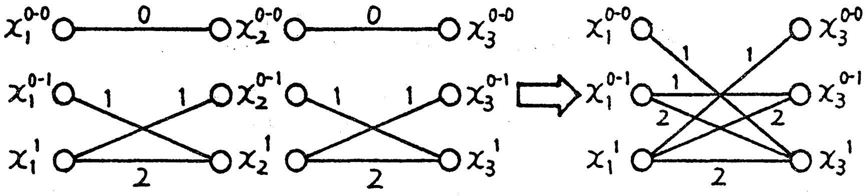


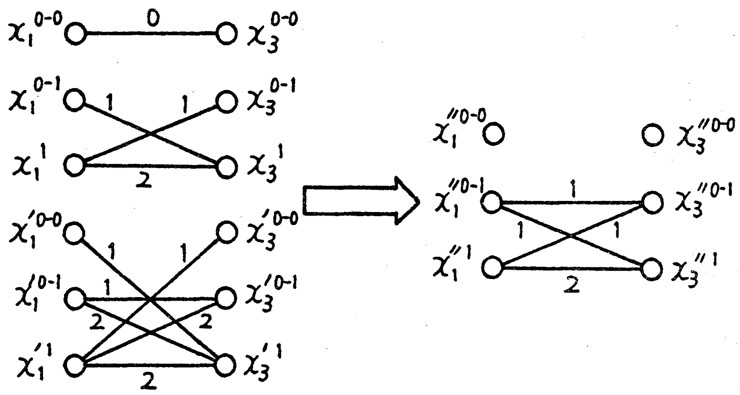
図6　G_1の簡約されていく様子

て述べる．

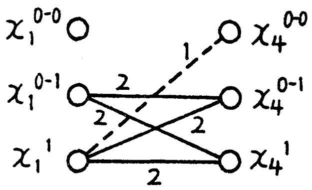
直列簡約S1に対する操作Sは以下の通り．



並列簡約P1に対する操作Pは以下の通り．



Gminに対するブロックBfは次の通り求まる．



BfからG_1の支配数を求めると

$$d(G_1)=2$$

3．2　正当性と時間計算量

〔定理1〕　アルゴリズムSPDは，uとvを端子対とする直並列グラフGの支配数を正しく出力する．

〔定理2〕 アルゴリズムSPDは，直並列グラフ$G=(V, E)$の支配数を$O(|V|^2)$で決定する．

直並列グラフGの支配数を求める多項式時間アルゴリズムを与えた．なお，このアルゴリズムを直並列グラフGの最小支配集合を求めるように改訂することは容易である．

文　献

(1) A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, "The design and analysis of computer algorithms," Addison-Wesley (1974).

(2) K. S. Notarajan and Lee J. White, "Optimum domination in weighted tree," Information Processing Letters, Vol.7, No.6, pp.261-265 (Oct. 1978).

(3) E. Cockayne, S. Goodman and S. Hedetniemi, "A linear algorithm for the domination number of a tree," Information Processing Letters, Vol.4, No.2, pp.41-44 (Nov. 1975).