数理解析研究所講究録
第 353 巻 1979 年 165-174

部分自律有限オートマトンの等価性

京産大　理学部　岩間　一雄
京大　工学部　上林　弥彦
京大　工学部　矢島　脩三

1. まえがき

著者らは非同期自律状態遷移を行う可能性のある順序回路（非基本モードハフマン機械等）の記述に適した新オートマトンモデルとして，部分自律有限オートマトン（Partially Autonomous Finite Automaton, PAFA）を導入し，その能力を中心とする基本的性質について論じた[1]。本報告では，PAFAの等価性判定問題について論じる。

等価性判定問題は状態最小化等の議論の基礎になる基本的問題であるが，PAFAの場合，その一般的なクラスはもちろん，強い制限を与えた単純PAFA（SPAFA）と名付けた部分クラスでも非可解になることが判明した。SPAFAは，通常の決定性完全指定ミーリーモデルの一部の状態に自律遷移を許したモデルであり，ΛなしGSM[2]よりかなり能力が低く，決定性GSMと比べても比較不能になる。

最近Ibarraは2入力1出力のΛなしGSM((2,1)GSM)の等価性判定問題が非可解になることを示したが、[3] 同様の制限を付した(2,1)SPAFAの等価性判定問題も非可解になることが判明した。(2,1)SPAFAはその計数能力において(2,1)GSMよりかなり能力が低く、Ibarraの証明手法を応用することができない。従って、本結果はその結果自体と証明手法の双方においてIbarraの結果の真の拡張になっている。

2. 定義[1] 部分自律有限オートマトンは、回路に信号が入力されることなく自律遷移が生じたという現象に対し、仮想的に無信号記号という記号入力によって自律遷移が生じたと考えてモデル化される。

入力記号は入力信号記号と入力無信号記号に分類される。入力系列は入力記号の有限長の列であり、入力信号系列は入力信号記号の有限列である。部分自律有限オートマトン(PAFA) M は3字組(M_f, v, w)である。ここで、$M_f=(S, \Sigma, \Gamma, \delta, \lambda, s_0, F)$は初期状態($s_0$)と最終状態集合(F)の指定された決定性ミーリーモデル、$v\in\Sigma$ ($w\in\Gamma$)は入力(出力)無信号記号、$\Sigma-\{v\}$ ($\Gamma-\{w\}$)は入力(出力)信号記号の集合である。$\delta: D_\delta\subseteq S\times\Sigma\to S$, $\lambda: D_\lambda\subseteq S\times\Sigma\to\Gamma$ はそれぞれ状態遷移関数, 出力関数である(通常の方法で系列へ拡張される)。Mの現在の状態sの次状態s'はδで各入力記

号に対して指定されている状態のいずれか一つであるが，$s' = \delta(s, x)$ $(x \neq v)$ の場合は長さ1の入力信号系列 x が入力されたことを意味し，$s' = \delta(s, v)$ の場合は長さ0の入力信号系列が入力されたと解釈する。

本報告では v, w として共に同じ記号 ε を常に使用し，また $D_\delta = D_\lambda$ を満足するPAFAのみを議論の対象にする。$\delta(s_0, p') \in F$ である $p' \in \Sigma^*$ が存在するとき，$p = f_\varepsilon(p')$ をMの受理信号系列，$g = f_\varepsilon(\lambda(s_0, p'))$ を p に対する可能な出力信号系列と呼ぶ。ただし，f_ε は系列に現れるすべての ε に Λ（空系列）を代入する演算子である。このような p と g の対 (p, g) の可能なものの全体をMが限定する関係といい，R_M で表す。$R_{M_1} = R_{M_2}$ であるとき M_1 と M_2 は等価であるという。

PAFAの一つの受理信号系列に対する可能な出力信号系列は一般に複数となり非決定性オートマトンの性質を示すが，以下に述べる基本的性質を有している。

［定理1］[1] PAFAの受理信号系列 p に対する長さ l 以下の可能な出力信号系列数の上限は $l^{|p|+1}$ のオーダーである。

Elgot らによって定義された最も一般化された系列変換器（EM機械[4]）ではこのような上限は l の指数関数のオーダーとなり，GSMでは l によらない数になる。このように系列変換器として従来知られているEM機械とGSMの間には大

き な能力差があり，PAFAはこの間隙を埋める新しいクラスのオートマトンモデルであることが判る。

3. 単純PAFAの等価性判定問題　文献(5)にヘなしGSMの等価性判定問題が非可解であることが示されており，PAFAはGSMより真に能力が高いので，[1] PAFAの等価性判定問題は非可解である。この節ではヘなしGSMより真に能力が低く，かつ実用的にも興味深い単純PAFAと呼ばれる部分クラスを導入しその等価性判定問題を考察する。

単純PAFA (Simple PAFA, SPAFA)は以下の条件(i)〜(iv)を満たすPAFAである。(i)すべての状態が最終状態である。(ii) $\forall s \in S$, $\forall x \in \Sigma - \{\varepsilon\}$に対し，$\delta(s, x)$と$\lambda(s, x)$が定義されている。(iii) εを出力することを許さない。(iv)遷移図上で入力系列ε^i $(i \geq 1)$によるサイクルが存在しない。

PAFAを非同期回路のモデルという立場からみると，εによる自律遷移は外部からの入力信号とは無関係に（非同期に），内部的要因によって任意の時刻に生じうる状態遷移であると考えられる。このような観点からみるとSPAFAは以下の性質を有しており，非常に実用的な部分クラスであるということができよう。

(1) 外部からどのような時刻に信号を加えてもそれが未定義入力となって回路を壊す恐れがない（条件(ii)）。

(2) 状態遷移は自律遷移を含めてその時刻を外部から観測でき（条件(iii)），また回路が発振する恐れがない（条件(iv)）。

[定理2] SPAFAはΛなしGSMより真に能力が低い。

SPAFAのある状態から一つの入力信号記号に対して出力される可能性のある出力信号系列の長さは，条件(iii)と(iv)より1以上でかつある自然数でおさえられるから，ΛなしGSMより能力が低いことは明らかであろう。ΛなしGSMの図1

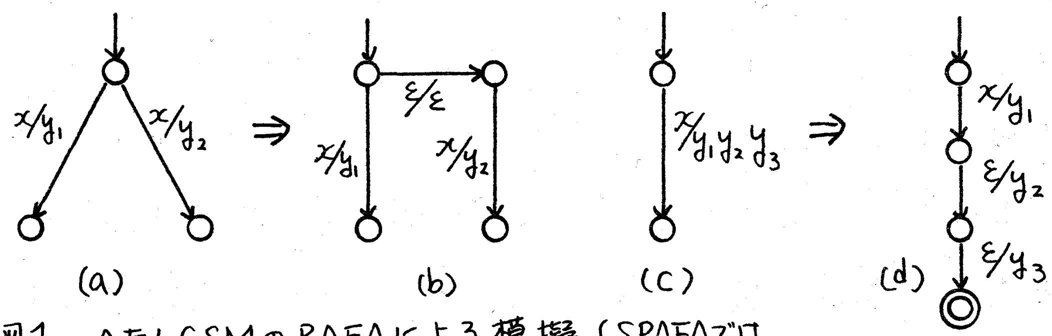

図1 ΛなしGSMのPAFAによる模擬（SPAFAでは模擬できない例）

(a)の様な非決定的状態遷移はPAFAでは同図(b)の様に模擬できる。しかしSPAFAではε出力が許されていないので模擬できない。またΛなしGSMの図1(c)の様な長さ2以上の系列出力はPAFAでは同図(d)（◎は最終状態を示す）の様に模擬できるが，SPAFAでは最終状態指定が許されていないのでやはり模擬できない。このようにSPAFAの能力はΛなしGSMのそれより相当低いと考えられる。

[定理3] SPAFAの等価性判定問題は非可解である。

証明の方針を以下に与える（詳細は(6)参照）。与えられたポストの対応問題P（記号集合Σ，リスト$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,\cdots,b_m\}$）[2]に対して，以下に述べる機械M_1とM_2を考える。M_1は添字列$i_1\cdots i_m$が入力されたとき，任意の記号列（$\in\Sigma^*$）を出力する可能性がある。M_2は入力列$i_1\cdots i_m$に対し，Σ^*からリストAで対応する記号列$a_{i_1}\cdots a_{i_m}$を除いた集合とΣ^*から記号列$b_{i_1}\cdots b_{i_m}$を除いた集合の和集合の任意の要素を出力する可能性がある。容易に判るようにPが解を持たないための必要十分条件はM_1とM_2が等価になることである。

ところがこのようなM_1とM_2をSPAFAで構成しようとするとさまざまな問題点が生じる。以下にその代表例と解決法を示し，SPAFAにおける制限がその等価性判定問題に関しては問題の難しさをほとんど軽減していないことを示す。

(1)　一つの添字列に対し任意の記号列を出力させることは定理1より一般のPAFAでも不可能である。しかしこのことは，出力される可能性のある記号列の長さを添字列長以上添字列長の整数（$|a_1|,\cdots,|a_m|,|b_1|,\cdots,|b_m|$の最大値を選ぶ）倍以下程度に制限することにより解決できる。

(2)　M_1, M_2を構成するに当って必要となる前述の図1(a)の様な非決定的分岐の問題は以下の様に解決する。一般に関係$R\subseteq X^*\times Y^*$（X, Yは有限集合）に対し，aを整数として以下

の規則で関係 $R^{\Delta}(a) \subseteq X^* \times (Y \cup \{\Delta\})^*$ $(\Delta \notin Y)$ を以下の規則で構成する。i) $\exists(x_1\cdots x_m,\ y_1\cdots y_l) \in R \Leftrightarrow 0 \le \forall i \le a$ に対し $(x_1\cdots x_m,\ \Delta^a y_1 \Delta^a \cdots \Delta^a y_l \Delta^i) \in R^{\Delta}(a)$。ii) $\exists(x_1\cdots x_m,\ y_1\cdots y_{l-1}y_l) \in R$ かつ $(x_1\cdots x_m,\ y_1\cdots y_{l-1}) \notin R \Leftrightarrow 1 \le \forall i \le a$ に対し $(x_1\cdots x_m,\ \Delta^a y_1 \Delta^a \cdots \Delta^a y_{l-1} \Delta^i) \in R^{\Delta}(a)$ かつ $(x_1\cdots x_m,\ \Delta^a y_1 \Delta^a \cdots \Delta^a y_{l-1}) \notin R^{\Delta}(a)$。

[補題1]　$R_1, R_2 \subseteq X^* \times Y^*$, a を整数としたとき, $R_1 = R_2$ であるための必要十分条件は $R_1^{\Delta}(a) = R_2^{\Delta}(a)$ である。

図1(a)の様な非決定的分岐のある機械が限定する関係Rに対し, 整数 a を適当に選ぶことにより, $R^{\Delta}(a)$ を限定するすべての状態が最終状態でかつε出力のないPAFAを構成することができる。例えば図2(a)の様な遷移は, $a = 3$ として, 同図(b)の様に実現できる。容易に判るように a の値は一つの状態から非決定的に分岐する遷移枝の最大値以上を選ぶ必要

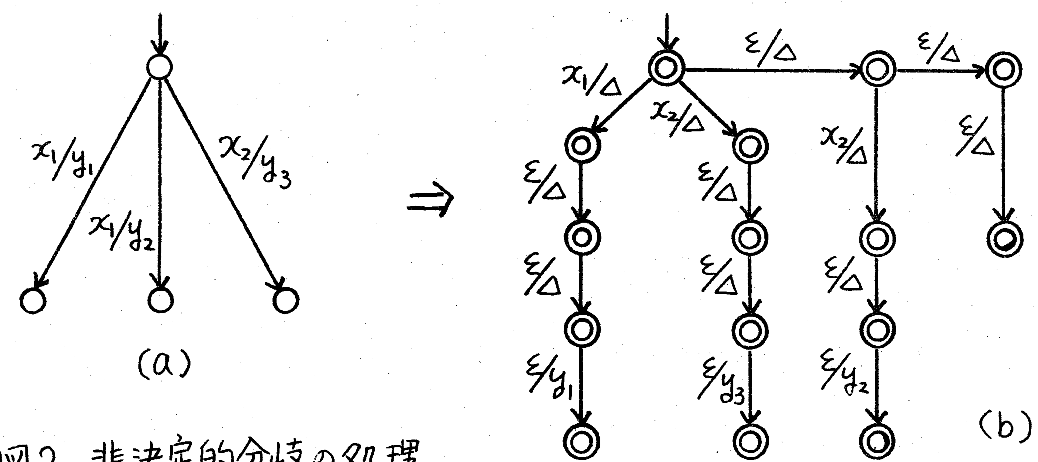

図2　非決定的分岐の処理

がある。このことと補題1より，図2(a)の様な分岐の必要な機械の等価性判定問題がε出力と最終状態指定を許さないPAFAの等価性判定問題に帰着できることが判る。

(3) 他にもSPAFAではε入力を除いて不完全指定を許さないこと等の問題があるが，いずれも容易に解決できる。

4. (2,1)SPAFAの等価性判定問題

Ibarraは最近2入力1出力のΛなしGSM((2,1)GSM)の等価性判定問題が非可解になることを示したが[3]，同様の結果がSPAFAについても成立する。即ち，二つの入力信号記号と一つの出力信号記号しか許さないSPAFA((2,1)SPAFA)の等価性判定問題は非可解である。本稿では紙数の都合で，本結果とIbarraの結果の違いを考察するにとどめ，その証明は結果の他の判定問題への応用と合わせ別稿に譲る[7]。

Hartmanis らは文献(8)で，種々の判定問題を非可解にする本質的要因はその機械が有する"計数能力"であることを指摘している。この観点からみると(2,1)GSMは非決定性1計数器機械(1 reversal-boundedでも等価性判定問題は非可解になる[9])とほぼ同等の計数能力をそなえている。このことは，言語$L \triangleq \{w0w' \mid w, w' \in \{0,1\}^*$ かつ $|w| = |w'|\}$の処理を考えると判りやすい。非決定性1計数器(1 reversal-bounded)機械がLを受理できることは容易に判るが，(2,1)

GSM もLを以下の様に扱うことができる。即ち，はじめは1入力記号につき1個の記号を出力し，0が入力されるたびに，そのままの動作を続けるか，又はその0に対して2記号を出力し以後は1入力記号につき3個の記号を出力するような動作に転じるかを非決定的に選択する(2,1)GSMを構成すればよい。この機械はLに属する語が入力された場合に限って，ちょうどその語長の2倍の長さの記号列を出力する可能性がある。Ibarraの証明は基本的には(2,1)GSMのこのような計数能力を利用している。

一方，(2,1)SPAFAの計数能力はより制限されていることが次の補題より判る。

［補題2］ $\Sigma=\{0,1,\varepsilon\}$，$\Gamma=\{1,\varepsilon\}$である(2,1)SPAFA Mを考える。このとき，$\forall p\in\{0,1\}^*$，$\forall r>|p|$に対し，もし$(p,1^r)\in R_M$なら$(p,1^{r-1})\in R_M$である。

即ち，(2,1)SPAFAの場合，さまざまな非決定的選択に対し，最も長い記号列を出力する場合のみが意味を持ち，他の選択はすべて"埋もれてしまう"ことになる。この制限はかなり重大であり，例えば前述の言語Lに対し，(2,1)GSMの場合と同様に(2,1)SPAFAを構成するなら，与えられた入力語の前半部でオ二の動作に移ってしまう"へたな"選択の結果のなかに，語のまん中でオ二の動作に移る"うまい"選択

の結果が埋もれてしまう。結局どのように(2,1)SPAFAを構成しても，語のまん中でうまい選択をした結果を出力に反映させること（つまり最も長い記号列を出力させること）は不可能であり，言語Lを(2,1)GSMのように適当に処理することができない。従ってIbarraの証明手法を(2,1)SPAFAの場合に適用することもできない。

［定理4］　(2,1)SPAFAは(2,1)GSMより真に能力が低い。

［定理5］　(2,1)SPAFAの等価性判定問題は非可解である。

以上の考察より定理5がIbarraの結果を実質的な意味で拡張しているといってよいであろう。証明は1レジスタ機械[10]の停止問題に帰着させることによって可能である。

文献　(1)　岩間，上林，矢島，信学技報，AL78-72，1979年1月。

(2)　J.E.Hopcroft and J.D.Ullman，Addison-Wesley，1969.

(3)　O.H.Ibarra，SIAM J.Compt.，7，4，524-532，1978.

(4)　C.C.Elgot and J.E.Mezei，IBM J.Res.Develop.，9，47-68，1965.

(5)　T.V.Griffiths，JACM，15，3，409-413，1968

(6)　岩間，上林，矢島，「情報科学の基礎理論と応用」研究集会予稿，1979年2月。

(7)　岩間，上林，矢島，信学会オートマトンと言語研究会発表申込中，1979年5月。

(8)　J.Hartmanis and J.E.Hopcroft，JCSS，4，368-376，1970.

(9)　B.S.Baker and R.V.Book，JCSS，8，315-332，1974.

(10)　M.L.Minsky，Prentice-Hall，1967.