

## 準 3 方向と 3 方向のシンプルマルチヘッド 有限オートマタの関係

井上 克司・高浪五男・谷口 弘  
(山口大学工学部)

### 1. まえがきと準備

筆者らは、先に 2 次元テープ上で動作するマルチヘッド有限オートマタの特殊なタイプである種々のシンプルマルチヘッド有限オートマタを導入し、その性質を様々な側面から調べてきた [1, 2]

2 次元シンプル  $k$ -ヘッド有限オートマトンというのは、 $k$  個のヘッドのうちただ 1 つのみ (そのヘッドを読取りヘッドと呼ぶ) が入力テープ上の記号を識別でき、残りの  $k-1$  個のヘッド (これらのヘッドを計数ヘッドと呼ぶ) は、それらがテープ上にあるのかそれとも境界記号上にあるのかのみを識別できるような 2 次元  $k$ -ヘッド有限オートマトンである。  $k$  個の各ヘッドが左, 右, 下の 3 方向にのみ動くことのできるような 2 次元シンプル  $k$ -ヘッド有限オートマトンは 3 方向性であると呼ばれ、また読取りヘッドの動きは左, 右, 下

の3方向に限定されているが、各計数ヘッドは左、右、上、下の4方向に動くことのできるような2次元シンプル $k$ -ヘッド有限オートマトンは準3方向性であると呼ばれる。

本稿では、正方形テープ上で動作する決定性2次元シンプル $k$ -ヘッド有限オートマタ( $k \geq 2$ )では、準3方向は3方向より強力であることを示す。

文献〔1, 2〕におけるのと同様に、次の記法を用いる。

$\text{DSP2-}k\text{HTRA}^s$  ... 正方形テープ上で動作する3方向決定性2次元シンプル $k$ -ヘッド有限オートマトン

$\text{DSP2-}k\text{HSTRA}^s$  ... 正方形テープ上で動作する準3方向決定性2次元シンプル $k$ -ヘッド有限オートマトン

$\text{DSNSP2-}k\text{HTRA}^s$  ... 正方形テープ上で動作する3方向決定性検知形2次元シンプル $k$ -ヘッド有限オートマトン

$\text{DSNSP2-}k\text{HSTRA}^s$  ... 正方形テープ上で動作する準3方向決定性検知形2次元シンプル $k$ -ヘッド有限オートマトン

上記の各種の2次元シンプルマルチヘッド有限オートマタの定義については、文献〔1〕を参照されたい。以下、例えば、 $\text{DSP2-}k\text{HTRA}^s$  で受理されるすべての正方形テープの集合の族を  $\mathcal{L}(\text{DSP2-}k\text{HTRA}^s)$  と記す。

記号の有限集合  $\Sigma$  上の 2次元テープとは,  $\Sigma$  の要素からなる  $m$  行  $n$  列 ( $m, n \geq 1$ ) の方形配列をいう.  $\Sigma$  上のすべての 2次元テープの集合を  $\Sigma^{(2)+}$  と記す. 2次元テープ  $x \in \Sigma^{(2)+}$  に対し,  $l_1(x), l_2(x)$  はそれぞれ  $x$  の行の数, 列の数を表わし, 又,  $x_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq l_1(x), 1 \leq j \leq l_2(x)$ ) は,  $i$  行  $j$  列に位置する  $x$  上の記号を表す. 更に,  $x[(i,j), (i',j')]$  は,  $1 \leq i \leq i' \leq l_1(x)$  且つ  $1 \leq j \leq j' \leq l_2(x)$  のときのみ, 次の (i), (ii) を同時に満足する 2次元テープ  $z$  として定義される.

$$(i) \quad l_1(z) = i' - i + 1 \quad \text{且つ} \quad l_2(z) = j' - j + 1.$$

(ii) 各  $s, r$  ( $1 \leq s \leq l_1(z), 1 \leq r \leq l_2(z)$ ) に対し,

$$z_{s,r} = x_{s+i-1, r+j-1}.$$

## 2. 結果

各  $n \geq 1$ , 各  $m (\geq n)$  に対し,

$$R_n(m) = \{x \in \{0,1\}^{(2)+} \mid l_1(x) = 1 \ \& \ l_2(x) = m \ \& \ (x \text{ は正確に } n \text{ 個の '1' を含む})\}$$

とする. また, 各  $n \geq 1$  に対し,  $A(n)$  を次の集合とする.

$$A(n) = \{x \in \{0,1\}^{(2)+} \mid \exists m (m \geq 1) [l_1(x) = l_2(x) = 2m \ \& \ \forall j (1 \leq j \leq m) [x[(2j-1, 1), (2j-1, 2m)] = x[(2j, 1), (2j, 2m)]] \in R_n(2m)]\}$$

補題 1 各  $k \geq 1$  に対し,

$$(1) A(2k+1) \in \mathcal{L}[\text{DSP}2-(k+1)\text{HSTRA}^s],$$

$$(2) A(2k+1) \notin \mathcal{L}[\text{DSNSP}2-(k+1)\text{HTRA}^s].$$

証明 (1)の成り立つことは、文献 [1] の定理 3 の証明中で述べられているのと同様な技法を用いることにより、 $A(2k+1)$  を受理するような  $\text{DSP}2-(k+1)\text{HSTRA}^s$  を構成できることが明らかである。以下、(2)を証明する。いま、 $A(2k+1)$  を受理する  $\text{DSNSP}2-(k+1)\text{HTRA}^s$   $M$  が存在するとし、 $M$  の状態の個数を  $n$ 、 $M$  の読み取りヘッドを  $R$ 、 $k$  個の計数ヘッドを  $H_1, H_2, \dots, H_k$  とする。各  $m \geq 1$  に対し、

$$V(m) = \{x \in A(2k+1) \mid l_1(x) = l_2(x) = 2m\}$$

とする。明らかに、 $|R_{2k+1}(2m)| = \binom{2m}{2k+1}$  であり、

$$R_{2k+1}(2m) = \{z_1, z_2, \dots, z_{\binom{2m}{2k+1}}\}$$

とする。また、各  $(i_1, i_2, \dots, i_m) \in \{1, 2, \dots, \binom{2m}{2k+1}\}^m$ 、 $1 \leq m \leq m$ 、に対し、

$$V_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}(m) = \{x \in V(m) \mid \forall j (1 \leq j \leq m) [x[(2j-1), (2j-1), 2m]] = x[(2j, 1), (2j, 2m)] = z_{i_j}]\}$$

とする。更に、各  $x \in V(m)$ 、各  $j (1 \leq j \leq m)$  に対し、

$$\text{conf}(x, j) \triangleq M \text{ の読み取りヘッド } R \text{ が、} x \text{ の第 } 2j-1 \text{ 行目}$$

---

↓ 任意の集合  $S$  に対し、 $|S|$  は  $S$  の要素の数を表す。

を下方に離れた直後の  $M$  のコンフィグレーション $\downarrow$ とする。このとき、次の命題が成立する。

命題 1  $x[(2j-1, 1), (2j-1, 2m)]$  キ  $y[(2j-1, 1), (2j-1, 2m)]$  なる任意の  $x, y \in V(m)$ , 任意の  $j (1 \leq j \leq m)$  に対し,  
 $\text{conf}(x, j)$  キ  $\text{conf}(y, j)$ .

[なぜならば,  $\text{conf}(x, j) = \text{conf}(y, j)$  としよう。  $x \in A(2\ell+1)$  であるから,  $x$  は  $M$  で受理され,  $\text{conf}(x, j)$  なるコンフィグレーションで  $x$  の第  $2j$  行目以下を読んでいくと  $M$  は受理状態に入る。従って, 仮定から,

$$(i) \quad v[(1, 1), (2j-1, 2m)] = y[(1, 1), (2j-1, 2m)] \quad \text{且} \rightarrow$$

$$(ii) \quad v[(2j, 1), (2m, 2m)] = x[(2j, 1), (2m, 2m)]$$

を満たすテープ  $v (l_1(v) = l_2(v) = 2m)$  もまた  $M$  で受理されることになる。これは矛盾である ( $v \notin A(2\ell+1)$  であることに注意)。

いま, 各  $x \in V(m)$ , 各  $j (1 \leq j \leq m)$ , 各  $u (1 \leq u \leq \ell)$  に対し,

$$\alpha_u(\text{conf}(x, j)) \cong \text{conf}(x, j) \text{ における } H_u \text{ の 上境界記号}$$

井からの垂直距離

とする。このとき、次の命題が成立する。

$\downarrow$  任意の  $\text{DSNSP2-}\ell\text{HTRA}^s M'$  に対し,  $M'$  の制御部の状態と  $M'$  の  $\ell$  個のヘッドの入カテープ上での位置情報の対を,  $M'$  のコンフィグレーションと呼ぶ。

命題 2 十分大きな  $m$ , 各  $\lambda$  ( $1 \leq \lambda \leq m-1$ ), 各  $(i_1, i_2, \dots, i_\lambda)$  に対し,

$$\begin{aligned} & d_{(i_1, i_2, \dots, i_\lambda)}(m) \\ \triangleq & \text{Max}_{\substack{x \in \mathcal{V}_{(i_1, i_2, \dots, i_\lambda)}(m) \\ u \in \{1, 2, \dots, \lambda\}}} [\alpha_u(\text{conf}(x, \lambda+1)) - \alpha_u(\text{conf}(x, \lambda))] \end{aligned}$$

は, 少なくとも  $m$  のオーダーである。すなわち, ある定数  $C > 0$  に対し,  $d_{(i_1, i_2, \dots, i_\lambda)}(m) \geq Cm$ 。

[なぜなら,  $d_{(i_1, i_2, \dots, i_\lambda)}(m)$  が  $m$  より小さいオーダーであるとする。明らかに,  $\mathcal{V}_{(i_1, i_2, \dots, i_\lambda)}(m)$  の中のテープの第  $2\lambda-1$  行目を  $R$  が下方に離れた直後の  $M$  のコンフィグレーション(これは一意的に定まる)から出発したとき,  $R$  が第  $2\lambda+1$  行目を下方に離れた直後に入り得る  $M$  の異なるコンフィグレーションの総数は, 高々

$$\begin{aligned} & 8 \cdot \{(2m+2) \cdot d_{(i_1, i_2, \dots, i_\lambda)}(m)\}^{\lambda} \cdot (2m+2) \\ & < a \cdot m^{2\lambda+1} \cdot (d_{(i_1, i_2, \dots, i_\lambda)}(m))^{\lambda} \quad (a \text{ はある定数}) \end{aligned}$$

である。ところが,  $\mathcal{V}_{(i_1, i_2, \dots, i_\lambda)}(m)$  の中のテープの  $[(2\lambda+1, 1), (2\lambda+2, 2m)]$ -部分 $\dagger$ の異なるものの総数は,  $\binom{2m}{2\lambda+1}$  ( $= m^{2\lambda+1}$  のオーダー) 個である。  $d_{(i_1, i_2, \dots, i_\lambda)}(m)$  が  $m$  より小さいオーダーとしているから, 十分大きな  $m$  に対しては,

---

$\dagger$  各 2次元テープ  $x$ , 各  $i, j, i', j'$  ( $1 \leq i \leq j \leq l_1(x)$ ,  $1 \leq i' \leq j' \leq l_2(x)$ ) に対し,  $x[(i, i'), (j, j')]$  を  $x$  の  $[(i, i'), (j, j')]$ -部分と呼ぶ。

$$a \cdot m^{k+1} \cdot (d_{(i_1, i_2, \dots, i_A)}^{(m)})^k < \binom{2m}{2k+1}$$

となり, このような  $m$  に対しては, その  $[(2A+1), (2A+2, 2m)]$ -部分が異なるにもかかわらず

$$\text{conf}(x, A+1) = \text{conf}(y, A+1)$$

となるような  $x, y \in V_{(i_1, i_2, \dots, i_A)}^{(m)}$  が存在することになり, 命題 1 に矛盾する.]

命題 2 より, 次の (A) が言えるようなある  $(i_1, i_2, \dots, i_{2\lceil k/c \rceil})$  †, ある  $x \in V_{(i_1, i_2, \dots, i_{2\lceil k/c \rceil})}^{(m)}$ , ある  $u (1 \leq u \leq k)$  が存在する (十分大きな  $m$  に対しては,  $\lceil k/c \rceil < m$  であることに注意されたい)。

(A):  $M$  の読取りヘッド  $R$  が  $x$  の 1 行 1 列の位置から  $x$  を読み始めて,  $R$  が  $x$  の第  $4\lceil k/c \rceil - 1$  行目を下方に離れるまでに,  $H_u$  は (少なくとも  $2\lceil k/c \rceil \times 1/c$  回ほど  $Cm$  コマ以上下方に動き, 従って  $2\lceil k/c \rceil \times 1/c \times Cm \geq 2m$  以上下方に動き) 下境界記号井に到達する。

いま, (A) が言えるような  $x, u$  をそれぞれ  $x_1, u_1$  とし,  $x_1 \in V_{(i_1, i_2, \dots, i_{2\lceil k/c \rceil})}^{(m)}$  とする。  $R$  が  $V_{(i_1, i_2, \dots, i_{2\lceil k/c \rceil})}^{(m)}$  の中のテープの第  $4\lceil k/c \rceil - 1$  行目を下方に離れた直後の  $M$  の

---

†  $\lceil k \rceil$  は,  $k$  より小さくない最小の整数を表す。

コンフィグレーション  $\text{conf}(x_1, 2\lceil k/c \rceil)$  ↓ から出発したとき、 $R$  が第  $4\lceil k/c \rceil + 1$  行目を下方に離れた直後に入り得る  $M$  の異なるコンフィグレーションの総数は、(  $k$  個の計数ヘッドのうち、 $H_{u_i}$  は既に下境界記号井に到達しているから ) 高々

$$8 \cdot (2m+2)^{2(k-1)} \cdot (2m+2) \cdot (2m+2)$$

である (この式の第2項は  $H_{u_i}$  以外の  $k-1$  個の計数ヘッドの可能な位置の数、第3項は  $R$  の可能な位置の数、第4項は下境界記号井上での  $H_{u_i}$  の可能な位置の数を表す)。ところが、

$\nabla_{(i_1, i_2, \dots, i_{2\lceil k/c \rceil})}^{(m)}$  の中のテープの  $[(4\lceil k/c \rceil + 1, 1), (4\lceil k/c \rceil + 2, 2m)]$ -部分の異なるものの総数は、 $\binom{2m}{2k+1}$  個である。

明らかに、十分大きな  $m$  に対し、

$$8 \cdot (2m+2)^{2(k-1)} \cdot (2m+2)^2 < \binom{2m}{2k+1}$$

となり、このような  $m$  に対しては、その  $[(4\lceil k/c \rceil + 1, 1), (4\lceil k/c \rceil + 2, 2m)]$ -部分が異なるにもかかわらず、

$$\text{conf}(x, 2\lceil k/c \rceil + 1) = \text{conf}(y, 2\lceil k/c \rceil + 1)$$

となるような  $x, y \in \nabla_{(i_1, i_2, \dots, i_{2\lceil k/c \rceil})}^{(m)}$  が存在することになり、命題1に矛盾する。以上で、(2)の証明は終る。■

補題1より、次の定理が得られる。

↓  $\nabla_{(i_1, i_2, \dots, i_{2\lceil k/c \rceil})}^{(m)}$  の中のテープを  $M$  が読んでいくとき、 $R$  が第  $4\lceil k/c \rceil - 1$  行目を下方に離れた直後の  $M$  のコンフィグレーションは、 $\text{conf}(x_1, 2\lceil k/c \rceil)$  として一意に定まることに注意されたい。



定理 1 各  $n \geq 2$  に対し,

- (1)  $\mathcal{L}(\text{DSP2-}\mathcal{R}\text{HTRA}^s) \subseteq \mathcal{L}(\text{DSP2-}\mathcal{R}\text{HSTRA}^s)$ ,  
 (2)  $\mathcal{L}(\text{DSNSP2-}\mathcal{R}\text{HTRA}^s) \subseteq \mathcal{L}(\text{DSNSP2-}\mathcal{R}\text{HSTRA}^s)$ .

注 1 補題 1 の証明と本質的に同様な手法で, 非決定性に対しても補題 1 と同様な結果が導かれ, 従って定理 1 と同様な事実が導かれるが, このことに関しては別の機会に報告する.

### 文 献

- (1) 井上, 高浪, 谷口: '3方向 2次元 シンプルマルチヘッド有限オートマタ (階層性)', 信学論(D), J62-D, No. 2, (昭54年2月号).  
 (2) 井上, 高浪, 谷口: '3方向 2次元 シンプルマルチヘッド有限オートマタ (閉包性)', 信学論(D), J62-D, 掲載予定.