

## Burgers' 乱流の初期条件依存性

相模工業大学 水島=郎  
京大 理学部\* 瀬上哲秀

### §1. Introduction.

乱流の小さなスケールの運動は、初期条件に依存しない普遍的な構造をもつものに対して、大きなスケールの運動は、初期条件に大いに依存する。特に、エネルギーの減衰法則は大きなスケールの運動が効いているため、初期条件が異なると違った形になる。

Tatsumi & Kida (1972) は、Burgers' 乱流を  $N$  エギリ形のショックの集合として取り扱ふことにより Burgers' 乱流の統計的性質について調べた。エネルギー・スペクトル  $E(k, t)$  の  $k=0$  での値を  $J$  とすると、

$$J \equiv E(0, t) = \text{constant in time.} \quad (1.1)$$

となる。Tatsumi & Kida によれば  $J \neq 0$  のとき、乱流の

\* 現在 気象庁 仙台気象台

エネルギーは  $t^{-2/3}$  に比例して減衰し、 $J=0$  のとき  $t^{-1}$  に比例して減衰する。Kida (1979) も同様の結果を導いている。

Yamamoto & Hosokawa (1976) は初期のエネルギー・スペクトル  $E(k, 0)$  を

$$E(k, 0) = C_n k^n \exp(-k^2/4), \quad C_n \text{ は規格化定数, (1.2)}$$

とおき、 $n=0, 1/8, 1/2, 2, 10, 18$  の場合について、モンテカルロ法を用いて数値実験を行った。その結果、 $n=0$  の場合 ( $J \neq 0$ )、エネルギーはほぼ  $t^{-2/3}$  に比例して減衰するが、 $n$  が大きくなるに従ってエネルギーはしだいに急速に減衰する、すなわち、エネルギー減衰則は  $J=0$  のとき全て  $t^{-1}$  に比例するのではなく、 $n$  に依存するという、Tatsumi & Kida とは異なる結論を得た。

Mizushima (1978) は乱流構造の相似性と、大きい渦の不変性を仮定して、(1.2) の  $n$  に対して、エネルギーは  $t^{-2(n+1)/(n+3)}$  に比例して減衰するという結果を導いた。

ここでは、一様等方性乱流 (Tatsumi, Kida & Mizushima, 1978) と Burgers' 乱流 (Mizushima & Tatsumi, 1979) に対して適用し既に成功を納めた多重尺度キュムラント展開の方法を用い、さまざまな初期条件の下にエネルギー発展方程式

を数値計算することにより, Burgers' 乱流の諸性質, 特にエネルギー減衰法則が初期条件にいかに関与するかを調べた。

## §2. 基礎方程式とその性質

Burgers' 方程式に従って運動する Burgers' 乱流のエネルギー・スペクトル  $E(k, t)$  の変化は多重尺度キュムラント展開を適用した結果, 次の方程式によって支配される。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) E(k, t) = F(k, t), \quad (2.1)$$

$$F(k, t) = -\frac{k}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp[-2\nu(k^2 + k'^2 + kk')t]}{k^2 + k'^2 + kk'} \\ \times k' \phi(k+k', t) \{ \phi(k', t) - \phi(k, t) \} dk'. \quad (2.2)$$

(2.2) から, 次の式を導くことができる。

$$\int_0^{\infty} F(k, t) dk = 0. \quad (2.3)$$

これより,  $F(k, t)$  は波数空間におけるエネルギーの分配にのみ寄与し, エネルギーの減衰には直接効果を及ぼさないことがわかる。  $F(k, t)$  はエネルギー伝達率数とよばれる。

(2.1) より次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial t} = -2\nu D(t), \quad (2.4)$$

ここで  $\mathcal{E}(t)$  は運動エネルギー,  $D(t)$  は Enstrophy であり, それぞれ次式で定義される.

$$\mathcal{E}(t) \equiv \frac{1}{2} \langle u^2(x, t) \rangle = \int_0^{\infty} E(k, t) dk. \quad (2.5)$$

$$D(t) \equiv \frac{1}{2} \left\langle \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 \right\rangle = \int_0^{\infty} k^2 E(k, t) dk. \quad (2.6)$$

(2.1), (2.2) の方程式系の性質として  $\Rightarrow$  の性質を導くことができる。その一つは, 負のエネルギー・スペクトルが発生しないこと。もう一つは, 非粘性の極限でエンストロフィーが発散することである。

負のエネルギー・スペクトルが発生しないことは簡単に証明できる。初期に, すべての波数で  $E(k, 0) > 0$  とする。ある時刻  $t$  で, 一真  $k_0$  において初めて  $E(k_0, t) = 0$  になったとする。(2.1), (2.2) より次式を得る。

$$\frac{\partial E(k_0, t)}{\partial t} = \frac{k_0^2}{2\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp[-2\nu(k_0^2 + k'^2 + k_0 k')t]}{k_0^2 + k'^2 + k_0 k'} \times E(k', t) E(k_0 + k', t) dk'.$$

$k \neq k_0$  では  $\phi(k, t) > 0$  であるから上式の右辺は正となり,  $E(k, t)$  は増加するため負のエネルギー・スペクトルは現れない。

非粘性の極限において, エンストロフィーの変化を計算する。(2.1), (2.2) で  $\nu \rightarrow 0$  のとき,

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = -2t \int_{-\infty}^{\infty} k k' E(k+k', t) \{E(k', t) - E(k, t)\} dk'$$

となる。この式の両辺に  $k^2$  をかけて全波数空間で積分すると、(2.6)の定義を用いて次式を得る。

$$\frac{dD(t)}{dt} = 12t D(t)^2 \quad (2.7)$$

これを解くと

$$D(t) = \frac{1}{1 - 6D(0)t^2} \quad (2.8)$$

となる。よって、エンロフィーは  $t_c = \{6D(0)\}^{-1/2}$  で発散する。(2.4)からわかるように、 $\nu \rightarrow 0$  の極限では、 $t < t_c$  においてエネルギーは減衰せず、 $t \geq t_c$  で突然減衰が始まる、一種のカタストロフが起る。

### §3. 数値計算

(2.1), (2.2)の微積分方程式を差分法で数値的に解いた。具体的には、(2.1)の時間微分を前進差分に置き換えた。次に(2.2)の  $k'$  に関する積分は以下のようにした。 $[0, +\infty]$  までの二つの半無限積分に分け、それぞれをまた、 $0 \leq |k'/k_0| \leq ab$ ,  $ab \leq |k'/k_0| < +\infty$  の二つの区間に分ける。 $0 \leq |k'/k_0| \leq ab$  は六等分して Simpson の公式を用い、

$|k/k_0| \geq ab$  に対しては,

$$|k/k_0| = ab^{n'}, \quad n' = 1, 2, 3, \dots, N'$$

とし、 $n'$  について Simpson の公式で積分を実行した。ここで  $a = 1/8$ ,  $b = 2^{1/4}$ ,  $N' = 70$  を採用した。 $k$  についても同様に行うために  $N = 66$  を採用した。Reynolds 数  $R = E_0^{1/2} / (\nu k_0^{1/2}) = 10^4$  を用いた。

初期条件は次のように設定した。

$$E(k, 0) = E_0 \beta_n (k/k_0)^n \exp[-\alpha_n (k/k_0)^2], \quad (3.1)$$

$$\alpha_n = \frac{n+1}{2}, \quad \beta_n = \frac{1}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

$n$  の値は、 $0, 1/2, 1, 2, 4, 6, 8$  の 7 通りの場合について数値計算を行った。以下、 $n$  の値により、Case 0, Case  $1/2$ , Case 1, のように呼ぶことにする。 $\alpha_n, \beta_n$  を上のように選ぶと、Microscale Reynolds number  $R_\lambda(t)$  と上で定義した Reynolds 数が等しくなる。ここで、

$$R_\lambda(t) \equiv \frac{\lambda(t) \langle u(x, t)^2 \rangle^{1/2}}{\nu}$$

$$\lambda(t) \equiv \left[ \langle u(x, t)^2 \rangle / \langle \{ \partial u(x, t) / \partial x \}^2 \rangle \right]^{1/2}$$

である。また、 $\frac{1}{2} \langle u(x, 0)^2 \rangle = \int_0^\infty E(k, 0) dk$ ,  $\lambda = 1/k_0$  となる。

#### §4. 計算結果と discussion

数値計算の結果得られたエネルギー・スペクトルのうち、その代表的なものとして、Case 0, Case 2, Case 6 を図1, 図2, 図3 で示す。縦横座標共対数スケールを採用している。エネルギー・スペクトルに関して次の結論を得た。

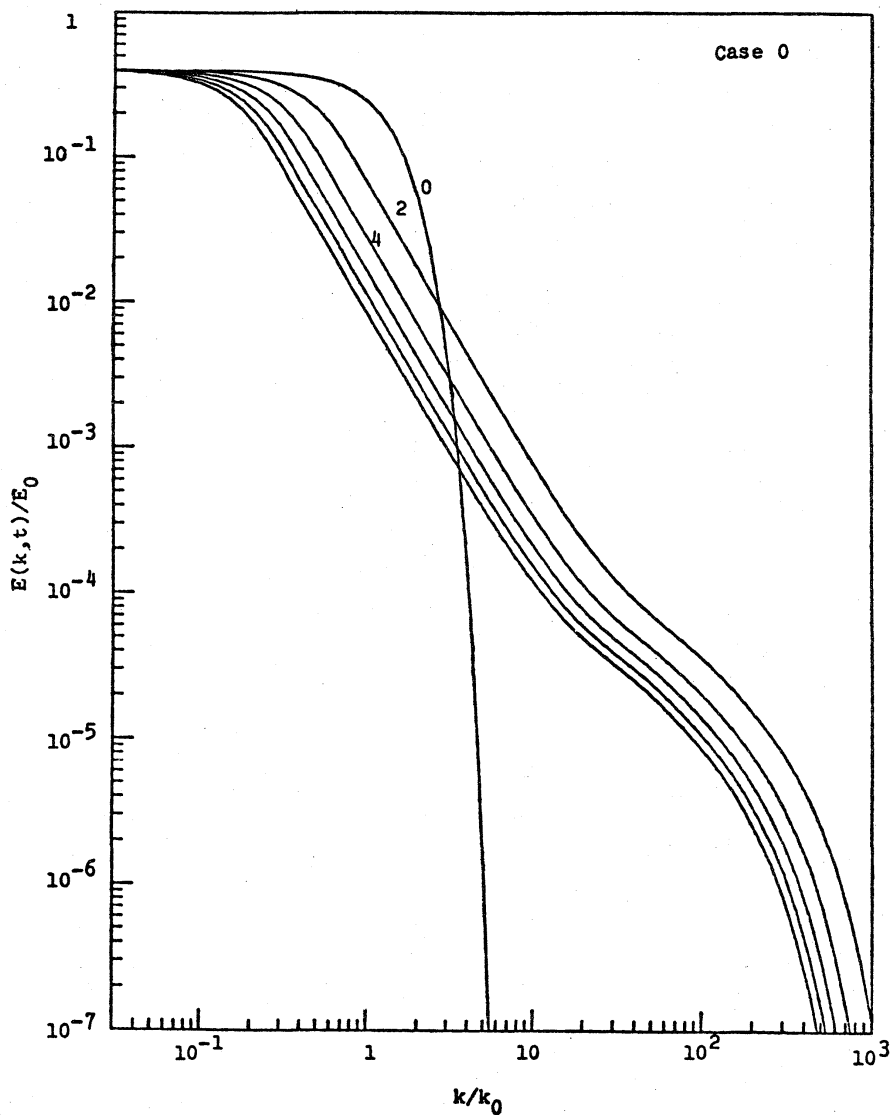


図 1.

- 1). 速度場のショックの構造を表わす  $k^{-2}$  領域が存在する。  
(Mizushima, 1978 参照).
- 2). Case 4, 6, 8 では, 時間の経過の小さい間は, エネルギー・スペクトルのピーク  $k_{max}$  に対して,  $2k_{max}$ ,  $3k_{max}$ , ... という高調波成分の成長が見られる。

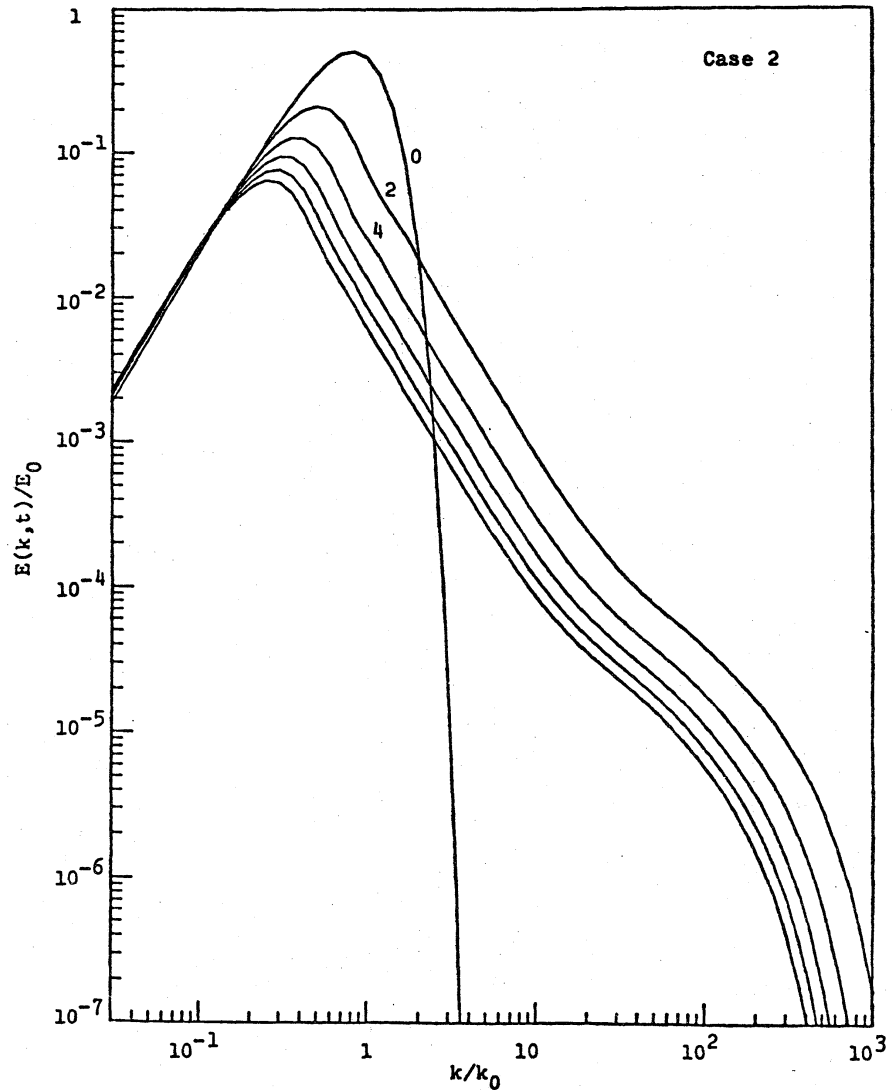


図 2.



$n$ の値が大きいとき、エネルギー・スペクトルの初期条件が  $k=k_{max}$  付近で急激に変化する関数になっているための影響である。高調波成分の成長は、線スペクトルを仮定したとき、Burgers' 方程式から直接、容易に示すことができる。

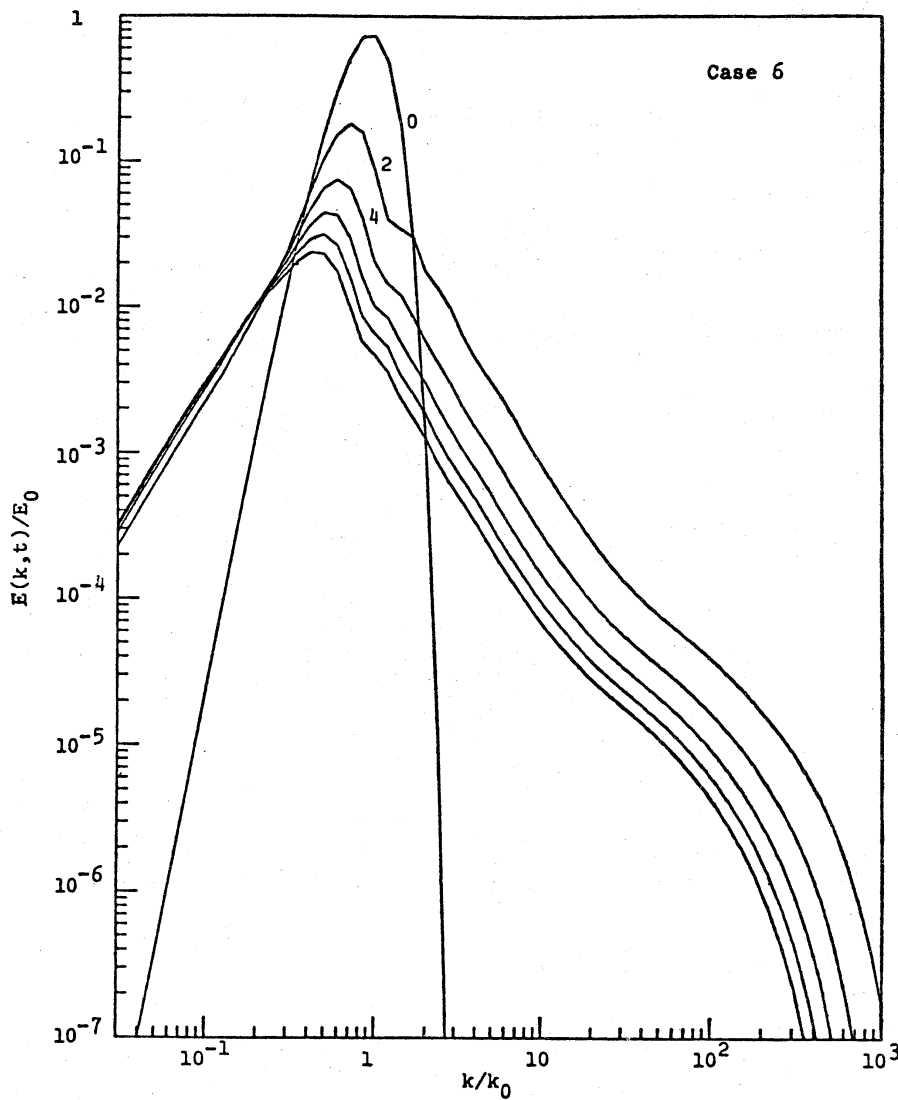


図 3.

- 3). 低波数領域でのスペクトル形の相違にかかわらず、高波数領域では、初期条件によらない一種の普遍的な構造を持つ。
- 4). 低波数領域での相似則。低波数領域、つまり、エネルギーの大部分を含む領域のスペクトル形は次の形の相似則で整理できる。

$$E(k, t) = E_1 (E_0^{1/2} k_0^{3/2} t)^\beta F[(k/k_0) / (E_0^{1/2} k_0^{3/2} t)^\delta] \quad (4.1)$$

Case 4, 6, 8 では高調波成分の成長のため、完全な時間相似則が成り立たないので、Case 0, 1/2, 1, 2 の場合について  $\beta, \delta$  を求め、表 1 に示す。

|          | $\beta$ | $\delta$ | $-(\beta+\delta)$ |
|----------|---------|----------|-------------------|
| Case 0   | -0.02   | -0.65    | 0.67              |
| Case 1/2 | -0.28   | -0.56    | 0.84              |
| Case 1   | -0.47   | -0.49    | 0.96              |
| Case 2   | -0.73   | -0.41    | 1.14              |

表 1.

$k \ll 1$  の領域では、エネルギー・スペクトル  $E(k, t)$  は次のように書ける。

$$\text{Case 0 : } E(k, t) = 0.40 (k/k_0)^{0.00} (t E_0^{1/2} k_0^{3/2})^{-0.01} E_0$$

$$\text{Case 1/2 : } E(k, t) = 0.61 (k/k_0)^{0.48} (t E_0^{1/2} k_0^{3/2})^{0.00} E_0$$

$$\text{Case 1 : } E(k, t) = 0.97 (k/k_0)^{0.99} (t E_0^{1/2} k_0^{3/2})^{0.00} E_0$$

$$\text{Case 2: } E(k, t) = 1.95 (k/k_0)^{1.97} (t E_0^{1/2} k_0^{3/2})^{0.08} E_0$$

同様に  $k^{-2}$  領域では,  $E(k, t)$  は次のように書ける。

$$\text{Case 0: } E(k, t) = 0.17 (k/k_0)^{-2} (t E_0^{1/2} k_0^{3/2})^{1.32} E_0$$

$$\text{Case } 1/2: E(k, t) = 0.19 (k/k_0)^{-2} (t E_0^{1/2} k_0^{3/2})^{1.40} E_0$$

$$\text{Case 1: } E(k, t) = 0.20 (k/k_0)^{-2} (t E_0^{1/2} k_0^{3/2})^{1.45} E_0$$

$$\text{Case 2: } E(k, t) = 0.21 (k/k_0)^{-2} (t E_0^{1/2} k_0^{3/2})^{1.53} E_0$$

5). Case 0, Case 1/2, Case 1, Case 2 では  $k \ll 1$  での  $E(k, t) = A k^a$  と書いたときのべき  $a$  は時間に関して一定である。またその係数  $A$  も Case 2 を除き一定である。Case 2 では  $A \propto t^{0.08}$  とわずかに増加する。Case 4, Case 6, Case 8 は, はじめそれぞれ  $k^4, k^6, k^8$  であるが時間が経過すると全て  $k^2$  の傾きになる。これらのことは, 次のように説明される。  
 $v \ll 1$  のとき  $k \ll 1$  の領域では, (2.1), (2.2) の方程式系は次のように書ける。

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} = t k^2 \int_{-\infty}^{\infty} E(k', t)^2 dk' \quad (4.2)$$

$k \ll 1$  のエネルギー・スペクトルの形を

$$E(k, t) = A_n k^n + o(k^n) \quad (4.3)$$

とおくと, (4.2) より,

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \text{constant} & (0 \leq n < 2) \\ \frac{dA_2}{dt} &= t \int_{-\infty}^{\infty} E(k', t) dk' \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

となる。つまり、波数原真付近では、 $0 \leq n < 2$  のとき、 $A_n$  は時間的に一定である。初期に  $n > 2$  であっても、時間が経つと  $k^2$  の傾きになる。 $A_2$  は時間とともに増加する傾向があることがわかった。

これらのことは、数値計算結果とよく一致している。

エネルギー減衰。数値計算で求めたエネルギー  $\varepsilon(t)$  の

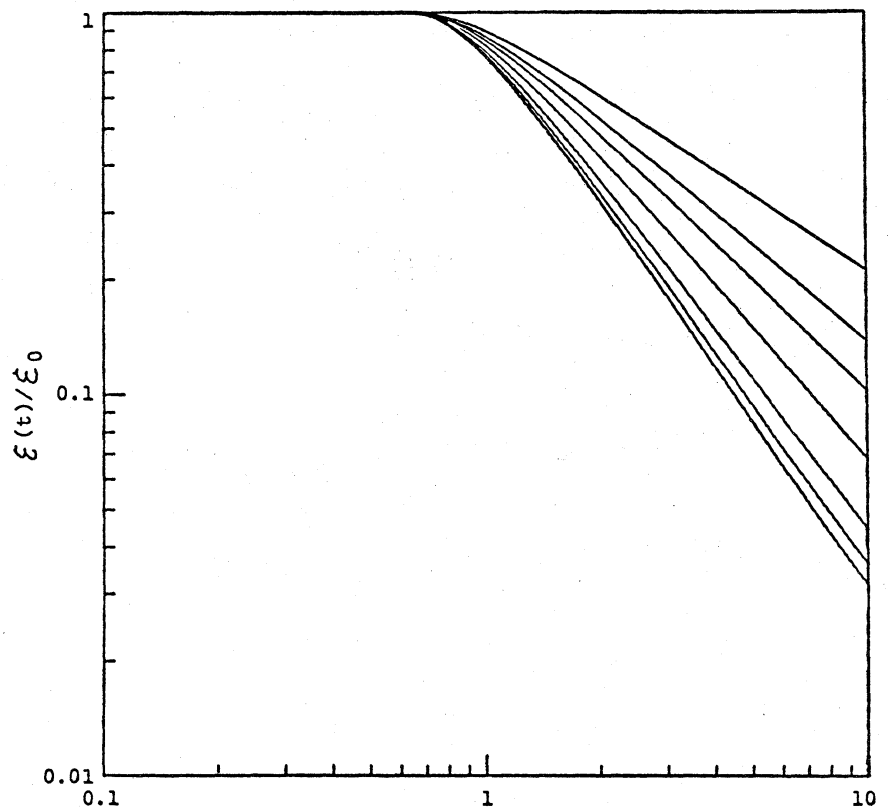


図 4.  $\tau = E_0^{1/2} k_0^{3/2} t$

変化のようすを図4で示す。 $\varepsilon(t)$ の変化は、2つの時間領域でまったく異なる性質をもつ。 $t=t_c$ を境として、 $0 < t < t_c$ では $\varepsilon(t)$ はほとんど“減衰せず”， $t=t_c$ で突然、減衰が始まり、 $t > t_c$ では、時間のほぼべき乗で減衰する。 $t_c E_0^{1/2} k_0^{3/2} \approx 0.7$ である。これを(2.8)から得られる、 $t_c E_0^{1/2} k_0^{3/2} = \{6D(0)\}^{1/2} = 1/\sqrt{3} \approx 0.58$ と比較すると、少し異なっているが、さらに Reynolds 数を上げると近づくものと思われる。このようなエネルギーのカタストロフは、速度場の Singularity (ショック) の形成と対応している。

次にエネルギー減衰法則を求めた。方法は  $t E_0^{1/2} k_0^{3/2}$  について、0.25 間隔ごとにデータをとり、

$$\varepsilon(t)/(E_0 k_0) = E_0 (t E_0^{1/2} k_0^{3/2}) \quad (4.5)$$

の形を仮定して、 $E_0, p$ を求める。Case 0, Case 1/2, Case 1, Case 2 では  $5 < (t E_0^{1/2} k_0^{3/2}) < 10$  でほとんど一定の  $E_0, p$  が得られた。これは(4.5)のべき法則が確立されていることを示す。この結果を Mizushima (1978) の結果と比較して表2に示す。Case 2 でも比較的良く一致しているのは、 $k^2$ の係数  $A$  が  $t^{0.08}$  に比例していて、ほとんど増加しなかったためである。Case 4, Case 6, Case 8 に関しては、この数値計算の範囲内では、完全な相似則が成立していない。

そのため、 $p$ の値は時間と共に単調に減少し、 $E_0^{1/2} k_0^{3/2} t < 10$ ではまだ一定値に落ちついていない。(4.4)の議論から、これらの場合の $p$ はCase 2と同じ値に落ちつくものと思われる。しかし、今回の数値計算では、 $E_0^{1/2} k_0^{3/2} t = 10$ で、 $R_n \approx 80$ と、初期の値 $10^4$ に比べてかなり低くなっているため、さらに計算をづけても意味のある結果が得られるとは限らない。そこで、 $p$ について適当に8点とり、8点の $p$ ともっとも良く一致する $(1/t)$ の2次関数を決め(最小=乗法)、 $t \rightarrow \infty$ での $p$ の漸近値を求めた。結果、Case 4, Case 6, Case 8に対して、それぞれ、 $p = 1.25, 1.24, 1.26$ となった。Case 2の $p$ の値と少し異なるが、時間が十分に経たるとき、Case 4, Case 6, Case 8の場合でもCase 2と同じ減衰則が得られるものと考えられる。

ここで、他の方法で得られた減衰則との比較を試みる。Kida (1979) は  $J=0, J \neq 0$  に対したる通りの減衰則を得

|          | $\epsilon_0$ | $p$<br>数値計算 | $p$<br>Mizushima |
|----------|--------------|-------------|------------------|
| Case 0   | 0.98         | 0.67        | 0.67             |
| Case 1/2 | 0.99         | 0.86        | 0.86             |
| Case 1   | 0.99         | 0.99        | 1.00             |
| Case 2   | 0.98         | 1.16        | 1.20             |

表 2.

ている。しかし、彼の場合、相関関数  $B(r, t)$  が  $r \rightarrow \infty$  で十分速く (指数関数的に) ゼロに近づく場合しかとり扱っていない。それにひきかえ、今回の Case 1/2, Case 1 では、 $E(k, t)$  が原点で微分不連続であり、 $B(r, t)$  は  $r \rightarrow \infty$  で代数的にゼロに近づく。このため、両者の結果を直接比較することはできない。 $n \geq 2$  では、両方の結果とも、 $n$  によらず、Case 2 の場合に戻るといって一致した結果ではあるが、 $p$  の値に多少の相違がある。

Yamamoto & Hosokawa (1976) の結果は、 $n \leq 2$  では、われわれの結果と定性的には一致している。しかし、彼らの結果では、 $p$  の値は  $n$  と共に大きくなり、 $n \rightarrow \infty$  で  $p \rightarrow 2$  になるという推測がなされている。これは、われわれが、 $n \geq 2$  でもつねに Case 2 に帰着すると結論づけているのと反している。彼らの数値実験では、Reynolds 数が低く、時間もまだ十分に経っていないのではないかと思われる。

その他の統計量：その他の統計量として、エンストロフィー、スキューネス、Taylor の microscale 等についても計算し、調べたが、ここではエンストロフィー  $D(t)$  についてだけ述べる。7つの Case のエンストロフィーの時間変化を (2.8) の非粘性の極限の場合とともに、図 5 に示した。時間の経過の少な

いとき、非粘性解と良く一致している。エンストロフィーはエネルギーの時間微分で表わされるので、エネルギーと同じふるまいをする初期条件依存性がエンストロフィーにもみられる。

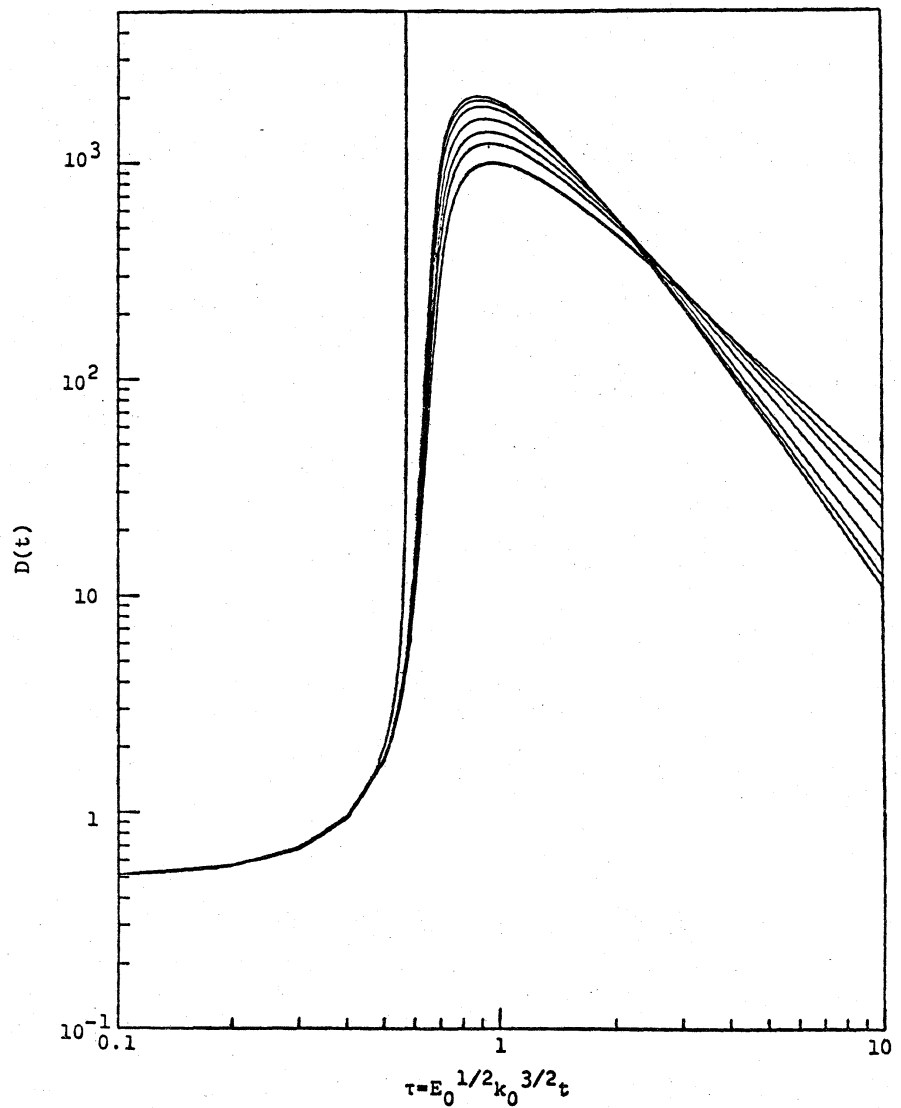


図 5



## References

- Crow, S. C. and Canavan, G. H. (1970) J. Fluid Mech. 41, p387.
- Kida, S. (1979) J. Fluid Mech. (to appear).
- Mizushima, J. (1978) Phys. Fluids 21, p512.
- Mizushima, J. and Tatsumi, T. (1979) J. Fluid Mech. (to appear).
- Tatsumi, T., Kida, S. and Mizushima, J. (1978) J. Fluid Mech. 85, p97.
- Yamamoto, K. and Hosokawa, I. (1976) Phys. Fluids 19, p1423.