

非粘性 3 次元一様乱流の  
白色スペクトル解と helicity

岩手大 工 細川 巖

1. まえがき

helicity というのは, Moffatt<sup>1</sup> によって導入された全空間積分

$$H = \int u \cdot \text{curl } u \, d\mathbf{x} \quad (1)$$

という量である。  $u(\mathbf{x})$  は流体の速度場を表わす。これが、3次元非粘性非圧縮の流れでは, invariant になる。<sup>2</sup> 従って, 2次元流における enstrophy と同じような役割をする可能性があり, このことは, Kraichnan<sup>3</sup> によって検討された所である。ここでは, 非粘性一様乱流を仮定して, 出てくる定常乱流の速度分布及びエネルギー・スペクトルを Kraichnan の方法とは少し異ったやり方で出してみる。(結果は同じ.)  
これは, 従来の 3次元 Navier-Stokes 方程式を波数空間で扱う場合, 速度空間を局所的に solenoidality によって 2次元化をするという操作を伴ない, 将来において数値計算上の

メリットも見込まれるものである。

次に、上記の定常乱流の速度分布は、Kraichnan のいう absolute equilibrium<sup>3</sup> カノニカル分布であるが、これが速度分布方程式 (Liouville 方程式ともいわれる) の定常解であることを説明し、この Liouville 方程式が、非粘性非圧縮流れの Hopf 方程式と等価であることから、canonical 分布は、当然、これに対応するそのような Hopf 方程式の新しい定常解の存在を促すことになる。このことと、Hopf<sup>4</sup> 及び Hopf & Titt<sup>5</sup> の白色スペクトル解についての従来の議論との関係について、若干のコメントをしたい。

## 2. 局所速度の基礎方程式

Brissaud et al<sup>2</sup> は  $|x| \rightarrow \infty$  で  $u \rightarrow 0$  を仮定して有限な total helicity を導入したのであるが、これでは、一様乱流を扱うには狭すぎるので、ここでは、流れを大きな箱 (体積  $L^3$ ) の中に入れ、境界で周期性を与えることにして、先ず

$$u(x) = \sum_K v(K) e^{iK \cdot x} \quad (2)$$

と展開する。この時、よく知られているように、Navier-Stokes 方程式は、

$$\frac{\partial v(K)}{\partial t} = -\nu k^2 v(K) - i \sum_{K'} \left( v(K') K' \cdot v(K-K') \right)$$

$$-\frac{k}{k^2} [k \cdot v(k) |k' \cdot v(k-k')] \quad (3)$$

と書け、 $\nu$ は kinematic viscosity である。

ここで、非圧縮性条件

$$k \cdot v(k) = 0 \quad (4)$$

があるため、 $v(k)$ は  $k$ 方向の成分を常にもたない。従って、局所的に、2次元速度座標を  $k$ に直角方向に常に作る事ができる。例えば、

$$v(k) = v_1(k) + v_2(k),$$

ここに、

$$v_1(k) = [v_1(k) \sin(\theta + \pi/2) \cos \phi, v_1(k) \sin(\theta + \pi/2) \sin \phi, v_1(k) \cos(\theta + \pi/2)] \quad (5)$$

$$v_2(k) = [v_2(k) \cos(\phi + \pi/2), v_2(k) \sin(\phi + \pi/2), 0]$$

で、明かに（実部と虚部、別々に） $v_1$ と  $v_2$ は直交する。前者の軸は、 $k$ 空間で、 $k = (k, \theta, \phi)$ のベクトルの決める子午面内にあり、 $\theta$ の増える方向に  $k$ に直交して取り、後者の軸は、それと  $k$ に直交して  $\phi$ の増える方向に取られている。図1参照。

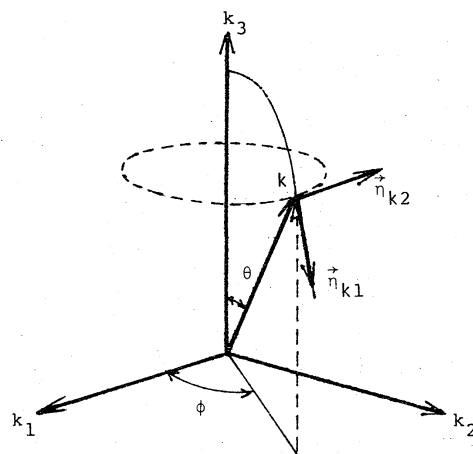


図. 1.

$$\mathbb{V}(\mathbb{K}) = \vec{\eta}(\mathbb{K}) + i\vec{\zeta}(\mathbb{K}) \quad (6)$$

と示すと、結局 (3) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta_1(\mathbb{K})}{\partial t} &= -\nu k^2 \eta_1(\mathbb{K}) + \sum_{\mathbb{K}'} \left\{ \frac{\vec{\eta}_1(\mathbb{K})}{\eta_1(\mathbb{K})} \cdot \left[ \vec{\eta}(\mathbb{K}) \mathbb{K} \cdot \vec{\zeta}(\mathbb{K}-\mathbb{K}') + \vec{\zeta}(\mathbb{K}') \mathbb{K} \cdot \vec{\eta}(\mathbb{K}-\mathbb{K}') \right] \right\} \\ \frac{\partial \eta_2(\mathbb{K})}{\partial t} &= -\nu k^2 \eta_2(\mathbb{K}) + \sum_{\mathbb{K}'} \left\{ \frac{\vec{\eta}_2(\mathbb{K})}{\eta_2(\mathbb{K})} \cdot \left[ \vec{\eta}(\mathbb{K}) \mathbb{K} \cdot \vec{\zeta}(\mathbb{K}-\mathbb{K}') + \vec{\zeta}(\mathbb{K}') \mathbb{K} \cdot \vec{\eta}(\mathbb{K}-\mathbb{K}') \right] \right\} \\ \frac{\partial \zeta_1(\mathbb{K})}{\partial t} &= -\nu k^2 \zeta_1(\mathbb{K}) - \sum_{\mathbb{K}'} \left\{ \frac{\vec{\zeta}_1(\mathbb{K})}{\zeta_1(\mathbb{K})} \cdot \left[ \vec{\eta}(\mathbb{K}') \mathbb{K} \cdot \vec{\eta}(\mathbb{K}-\mathbb{K}') - \vec{\zeta}(\mathbb{K}') \mathbb{K} \cdot \vec{\zeta}(\mathbb{K}-\mathbb{K}') \right] \right\} \\ \frac{\partial \zeta_2(\mathbb{K})}{\partial t} &= -\nu k^2 \zeta_2(\mathbb{K}) - \sum_{\mathbb{K}'} \left\{ \frac{\vec{\zeta}_2(\mathbb{K})}{\zeta_2(\mathbb{K})} \cdot \left[ \vec{\eta}(\mathbb{K}') \mathbb{K} \cdot \vec{\eta}(\mathbb{K}-\mathbb{K}') - \vec{\zeta}(\mathbb{K}') \mathbb{K} \cdot \vec{\zeta}(\mathbb{K}-\mathbb{K}') \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

という4個の実数のスカラー方程式に帰着する。特に (3) の square bracket の中の (第2項が全くなくなっていることに注意。) 一様乱流の数値計算に、便利な式である。特に2次元乱流では、この方法で、方程式は2個になる。

[(5) 式で、 $\theta=0, \pi$  の時は、 $\mathbb{K}$  が波数空間の極方向の時であるが、この時は速度面は、明かに極方向に直交する水平面内に一意に定まるにも拘らず、(5) 式では、 $\phi$  に依存して多くの速度面が重なることになる。そこで、この場合は、たとえば、 $\phi=0$  と定めて、このような多意性を除くことにすればよい。 $L \rightarrow \infty$  では波数空間の測度が  $\sin \theta$  に比例するので、極方向の  $\mathbb{V}(\mathbb{K})$  は余り重要な成分にならないことを指摘しておく。]

### 3. 速度のカノニカル分布とエネルギー・スペクトル

先ず、われわれの(周期的)流れでも, Brissaud et al<sup>2</sup>の証明は成り立ち, この場合, total helicity よりも, 単位体積当りの helicity  $\bar{H}$  を扱う方が便利であることに注意する.

こうすると,

$$\begin{aligned}\bar{H} &= \int \mathbf{u} \cdot \text{curl } \mathbf{u} \, d\mathbf{x} / L^3 \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{v}^*(\mathbf{k}) \cdot i\mathbf{k}' \times \mathbf{v}(\mathbf{k}') \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \, d\mathbf{x} / L^3 \\ &= i \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{k}) \times \mathbf{v}^*(\mathbf{k}),\end{aligned}\quad (8)$$

ここで, Fourier 級数の正規直交性

$$\int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \, d\mathbf{x} / L^3 = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (9)$$

を使った. 前節の局所座標を使うと,

$$\begin{aligned}\bar{H} &= 2 \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \vec{\eta}(\mathbf{k}) \times \vec{\zeta}(\mathbf{k}) \\ &= 2 \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} [\eta_1(\mathbf{k}) \zeta_2(\mathbf{k}) - \eta_2(\mathbf{k}) \zeta_1(\mathbf{k})]\end{aligned}\quad (10)$$

と書ける. 単位質量当りの energy は, 同様に

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{1}{2} \int \mathbf{u}^2 \, d\mathbf{x} / L^3 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{v}^*(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} [\eta^2(\mathbf{k}) + \zeta^2(\mathbf{k})] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} [\eta_1^2(\mathbf{k}) + \eta_2^2(\mathbf{k}) + \zeta_1^2(\mathbf{k}) + \zeta_2^2(\mathbf{k})]\end{aligned}\quad (11)$$

さて, 非粘性非圧縮の流れで,  $\bar{E}$  も  $\bar{H}$  も保存量であるから, その統計的平均値

$$\langle \bar{E} \rangle = \int \bar{E} p(\mathbf{V}) \prod_{\mathbf{k}} d^2 \mathbf{V}(\mathbf{k}) \quad (12)$$

$$\langle \bar{H} \rangle = \int \bar{H} p(\mathbf{V}) \prod_{\mathbf{k}} d^2 \mathbf{V}(\mathbf{k}) \quad (13)$$

も保存量でなければならない。ここで  $p(\mathbf{V}) \prod_{\mathbf{k}} d^2 \mathbf{V}(\mathbf{k})$  は  $\vec{\eta}(\mathbf{k})$ ,  $\vec{\zeta}(\mathbf{k})$  の確率測度で,  $d^2 \mathbf{V}(\mathbf{k}) \equiv d\eta(\mathbf{k}) d\zeta(\mathbf{k})$ . 統計力学においてよく知られているように,  $\langle \bar{E} \rangle$  と  $\langle \bar{H} \rangle$  が指定された時の最も無秩序 (エントロピーの高い) な  $p$  は, 次のようなカノニカル分布によって与えられる.

$$p_C = N \exp(-\beta \bar{E} - \gamma \bar{H}) \quad (14)$$

ここで  $N$  は正規化定数,  $\beta$  と  $\gamma$  は (12), (13) によって決定される.  $p_C$  が  $p$  に対する確率方程式 (Liouville 方程式) の定常解になっていることは, 改めて次節で証明する.

所で, (14) 式をよく見ると,  $p_C$  が積分可能なために, 先ず

$$\beta > 0 \quad (15)$$

であることが分る. enstrophy を伴う非粘性 2 次元定常乱流ではいわゆる negative temperature の解が存在し得たのであるが, 3 次元定常乱流では, そのような場合はないのである.

次に,  $\bar{H}$  の式(8)をよく見ると, 座標軸の反転によって,  $\bar{H}$  は符号を変える. 即ち pseudo-scalar である. 従って, (14) のカノニカル分布は等方的であるとはいえない.  $\gamma=0$  の時のみ, 等方性乱流は実現される. この故に, 一般に  $\gamma \neq 0$  の時の乱流は helical turbulence と呼ばれる.<sup>3</sup> 勿論  $\gamma \neq 0$  ならば

$\langle \bar{H} \rangle \neq 0$  であって, (10)より

$$\langle \vec{\eta}(\mathbf{k}) \times \vec{\zeta}(\mathbf{k}) \rangle \neq 0 \quad (16)$$

となる. 普通, isotropicの場合は,  $\vec{\eta}$ と $\vec{\zeta}$ は独立分布と考えてもよいが, helicalの場合は, (16)で示されるような相関が両者になければならないことを示している.

定常分布 $P_c$ , (14)は4次元Gauss分布の積に帰着するから, 次のような平均量を計算することは困難でない. 必要な公式はRef. 6にみられる.

$$\begin{aligned} e(\mathbf{k}) &\equiv \frac{1}{2} \int [\eta_1^2(\mathbf{k}) + \eta_2^2(\mathbf{k}) + \zeta_1^2(\mathbf{k}) + \zeta_2^2(\mathbf{k})] P_c \prod_{\mathbf{k}} d^2 V(\mathbf{k}) \\ &= \frac{\beta/2}{(\beta/2)^2 - \gamma^2 k^2} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{k}) &\equiv 2 \int R [\eta_1(\mathbf{k}) \zeta_2(\mathbf{k}) - \eta_2(\mathbf{k}) \zeta_1(\mathbf{k})] P_c \prod_{\mathbf{k}} d^2 V(\mathbf{k}) \\ &= - \frac{2 \gamma k^2}{(\beta/2)^2 - \gamma^2 k^2} \end{aligned} \quad (18)$$

$$= - \frac{4 \gamma}{\beta} k^2 e(\mathbf{k}) \quad (19)$$

予想通り,  $\gamma=0$ なら,  $h(\mathbf{k})=0$  従って  $\langle \bar{H} \rangle=0$ , 又逆に,

$\langle \bar{H} \rangle=0$  なら (19)より

$$\frac{4 \gamma}{\beta} \sum_{\mathbf{k}} k^2 e(\mathbf{k}) = 0 \quad (20)$$

であるから,  $e(\mathbf{k}) \geq 0$  により  $\gamma=0$  でなければならない.

(17) は速度場の  $K$  成分のもつエネルギーであり, 従って  $4\pi k^2 e(k)$  がエネルギー・スペクトルを示すことになる.  $r \neq 0$  (helical) の時は  $e(k) \geq 0$  の制限により,

$$\beta^2/4 > r^2 k^2 \quad \text{or} \quad k_{\max} < \beta/(2|r|), \quad (21)$$

$K$  に上限  $k_{\max}$  がなければならぬことが要求される. この事情は, 対応する 2次元定常乱流でも存在し, Kraichnan<sup>7</sup> の分類によれば, enstrophy 対 energy の比率が III-regime にある時に全く同じスペクトル型となる.<sup>10</sup>

(19) より

$$|\langle \bar{H} \rangle| < \frac{4|r|}{\beta} k_{\max}^2 \langle \bar{E} \rangle \quad (22)$$

が得られ, (21) と (22) と組み合わせて,

$$|\langle \bar{H} \rangle| / \langle \bar{E} \rangle < 2 k_{\max} < \beta/|r| \quad (23)$$

の関係が得られる.

$r=0$  (isotropic) の場合は,  $K$  の上限に制限はないが, この時, (17) はエネルギー等分配 (白色スペクトル) を示し,  $\langle \bar{E} \rangle$  が有限の量であるためには,  $k_{\max}$  が有限である必要がある. このことを前提して, 次節で, Liouville 方程式と Hopf 方程式を取り扱う.

#### 4. 非粘性 Hopf 方程式の定常解との等価性



今, (3)式を簡単に

$$\frac{\partial v_\alpha(k)}{\partial t} = Q_\alpha[V(k)] \quad (24)$$

で表わす. この時, Hopf の特性汎函数  $\psi[z(k)]$  に対する方程式は

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_k i z_\alpha(k) Q_\alpha \left[ \frac{\partial}{i \partial z(k)} \right] \psi \quad (25)$$

と書かれる.  $\alpha$  は summation convention に従う. この場合,  $k$  が離散的で  $k_{\max}$  の存在を前提すると,  $\psi$  は汎函数というよりも (多次元) 函数といった方がよい.

この時,  $\psi$  に対応する確率分布函数は, Fourier 変換

$$\psi = \int \exp \left[ i \sum_k v_\alpha(k) z_\alpha(k) \right] p \prod_k d^2 v(k) \quad (26)$$

によって関係づけられるが, これにより, 次の (25) に対応する方程式が得られる.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_k \frac{\partial}{\partial v_\alpha(k)} Q_\alpha[V(k)] p \quad (27)$$

さて, ここで,  $v=0$  の時,

$$\frac{\partial}{\partial v_\alpha(k)} Q_\alpha[V(k)] = 0 \quad (28)$$

が成立する. 実際, (3)に戻って確かめるのは簡単である. これは速度空間の中の体積保存 (非圧縮性) を意味し, 従って,

Liouvilleの定理そのものである。故に、(27)は

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{\mathbf{k}} Q_{\alpha} [V(\mathbf{k})] \frac{\partial p}{\partial v_{\alpha}(\mathbf{k})} \quad (29)$$

と書くことができる。

ここで、 $p = p_c$  としてみよう。 $\bar{E}$ と $\bar{H}$ は time-invariant, 即ち

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial v_{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial t} \frac{\partial \bar{E}}{\partial v_{\alpha}(\mathbf{k})} = 0 \quad (30)$$

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial v_{\alpha}(\mathbf{k})}{\partial t} \frac{\partial \bar{H}}{\partial v_{\alpha}(\mathbf{k})} = 0 \quad (31)$$

であるから、(24)の関係により、(29)の右辺が0になることは明かである。これによって、 $p_c$ が(29)式(Liouville方程式)の定常解であることが証明された。ここまでで、 $k_{\max}$ が有限であることは、別に証明の障害になっていないことを注意しておく。

然らば、(29)と同等の非粘性Hopf方程式にも、(26)によって $p_c$ に対応する $\psi_c$ が定常解として存在しなければならないのは当然である。 $p_c$ がGauss分布であったから、 $\psi_c$ も亦Gauss分布である筈である。所で、Hopf<sup>4</sup>は、よく知られている白色スペクトルの定常解( $\gamma=0$ の場合)をみつけ出し、Hopf & Titt<sup>5</sup>は、非粘性3次元等方性乱流においては、もし $\psi_c$ がGauss型ならこれ以外の定常解はないことを主張した。われわれ

の得た $\rho_c$ は、この説と一見矛盾するように思われたので、どこに矛盾の原因があるかについて、本講演において討論して頂いたが、ここでその後の検討結果を報告したい。

結論は甚だ簡単である。Hopf & Tittの論証の前提は、isotropicの場合だけに限っている、ということである。これでは $\gamma \neq 0$ の場合の解を含み得る筈がない。彼らの証明の中で、 $k_{\max} = \infty$ が不可欠の前提をなしているので、これが白色スペクトル以外のものを出せない理由であろうという見解もあったが、彼らの証明は、 $k_{\max} < \infty$ でも十分成立するように思われる。一方、筆者が本講演において指摘したように、Hopf & Tittの論証の中には、自明でない仮設に基づく推論が一つ見出される。(Ref. 5のp. 590で3rd paragraphの4~5行目。この仮設は、この論文の(13)式を導くには十分であるが、必要ではない。) もし、今後、pseudo-scalarでない新しい等方的な不変量が発見されるようなことがあって、これによって、又新しい $\rho_c$ が見出されるようなことがあるとすると、このことによる矛盾の責は、上記の仮設に帰せられるだろう。又、もしその仮設が正しいものであれば、今後永久にエネルギー以外の等方的不変量は発見されないとみてよいだろう。

## 5. 補遺 — absolute equilibriumへの漸近について

最後に、カノニカル分布が定常解であるとしても、任意の初期分布から出発した非粘性乱流が、非可逆的に何故にこの解に向って漸近するのであろうか？ Liouville 方程式も、非粘性Hopf方程式も可逆的であるので、それ自体ではこのことは未だに自明でないことをつけ加えておきたい。数値実験は確かに、平均的にこの事実を指向している。<sup>8,9</sup> (山本と細川<sup>10</sup>の「非粘性2次元乱流の定常エネルギー・スペクトル」講演も参照のこと。) 統計力学では、coarse-graining という extra (平均) 操作の導入によって、非可逆性 (エントロピー増大) を導き、そこで、absolute equilibrium (エントロピー最大の状態) に向うことを主張することになっているが、未だにこのことを包含した非平衡の統計力学は建設途上にあるようである。エルゴード理論は、このこと (平衡状態の成立以前の統計的分布) については、Prigogine も指摘しているように、全く無力なのである。

## REFERENCES

1. H. K. Moffatt, J. Fluid Mech. 35 (1969), 117.
2. A. Brissaud, U. Frisch, J. Leorat, M. Lesieur and A. Mazure, Phys. Fluids 16 (1973), 1366.
3. R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. 59 (1973), 745.
4. E. Hopf, J. Rat. Mech. Anal. 1 (1952), 87.
5. E. Hopf and E. W. Titt, J. Rat. Mech. Anal. 2 (1953), 587.

6. B. Friedman, Principles and Techniques of Applied Mathematics  
(John Wiley & Sons, Inc., 1965), p. 105.
7. R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. 67 (1975), 155.
8. S. A. Orszag & G. S. Patterson, Phys. Rev. Letters 28 (1972),  
76.
9. R. S. Rogallo, NASA TM-73203 (1977).
10. 山本 稀義, 細川 巖, 本講究録所載.