数理解析研究所講究録
第354巻 1979年 166-177



# 準定常剪断乱流

阪学大 理　神戸 良一
兵庫医大　土井 正明
阪学大 理　今村 勤

§1. はじめに　ThomasとHancock[1]は風洞内に置いた格子によって生じた格子乱流中に平板を置きその平板表面が格子乱流に与える効果を観測した。彼等は平板表面を$U_W$という速さで下流に向って動くように装置を組み$U_W$を適当に調節することによって一様な平均流を伴った乱れを実現させた。彼等の実験は平均流勾配からくる効果を考慮する必要がない為に境界の存在が乱れに対して与える効果が純粋な形で取り出せているという理由から極めて興味深い。実験の理論的分析はHuntとGraham[2]によってすでに与えられている。この稿ではHuntとGraham と異った立場で実験の理論的分析を行い，さらに非一様な平均流というより一般的な場合をも議論することを試みる。後者では平均流が勾配を持つことからくる効果も考慮せねばならず数学的解析はより困難なものとなる。

§2. 問題の定式化. 流体は全体として$x$の正方向に流れており平板は$x$-$z$平面内に置かれている。平板表面からの距離を$y$で表わす。このとき流体は$y>0$の領域に存在しているものとする。平板表面から遠く離れたところでの平均流速を$U_\infty$で表わす。以下の議論では$U_\infty=0$であるような座標系をつかって話をすすめる。またこの座標系で平板表面は$x$の正方向に速さ$U_W$で動いているものとする。さらに代表的な渦の大きさを$L_\infty$で表わし便宜上$L_\infty=1$となるような単位系を使う。

W-H展開[3]を

$$u_i=\bar{u}_i+\int d^3k\, K_{ia}^{(1)}(\vec{x},\vec{k},t)H_a^{(1)}(\vec{k},t)+\cdots \tag{2.1}$$

$$p=\bar{p}+\int d^3k\, P_a^{(1)}(\vec{x},\vec{k},t)H_a^{(1)}(\vec{k},t)+\cdots \tag{2.2}$$

で与える。ここで$\bar{u}_i$, $\bar{p}$はそれぞれ平均流速度及び平均圧力であり2項目以下が乱れを表わしている部分である。また、$H^{(n)}$ $(n=1,2,\cdots)$は理想確率関数のHermite汎関数[3]である。

基本的仮定として次のものを採用する。

(A)準Gauss分布の仮定　つまり(2.1)と(2.2)の第3項以下は無視できる。

(B)平行流の仮定　つまり$\bar{u}_i=(U(y),0,0)$ ただし$U(0)=U_W$, $U(\infty)=0$.

(C)準定常性の仮定　積分核に対して次のことを要求する:

$K^{(1)}$, $P^{(1)}$を

$$K_{ia}^{(1)} = e^{i(k_1x+k_3z)}\, e^{-f(\vec{k})t}\left[K_{ia}(y,\vec{k}) + K_{ia}^{(v)}(y,\vec{k},t)\right] \tag{2.4}$$

$$P_a^{(1)} = e^{i(k_1x+k_3z)}\, e^{-f(\vec{k})t}\left[P_a(y,\vec{k}) + P_a^{(v)}(y,\vec{k},t)\right] \tag{2.5}$$

と書いたとき

(i) $f$ の実部は小さい，

(ii) $K^{(v)}$ と $P^{(v)}$ は薄い台を持つ。

(ここで $K^{(v)}$ の台とは $K^{(v)}=0$ とおいて $K^{(v)}$ を無視することが出来ないような領域のことである。)

(D) 漸近的性質　平板表面から遠くへ離れるに従って乱れは一様性又は等方性を持つようになると仮定する。

積分核に対する要求として：

$(D_1)$ 漸近的一様性を持つ場合；

$$y\to\infty \text{ で }\quad K_{ia} \to K_{ia}^{(\infty)}(\vec{k})\, e^{ik_2y} + \tilde{K}_{ia}^{(\infty)}(\vec{k})\, e^{-ik_2y}, \tag{2.6}$$

$(D_2)$ 漸近的等方性を持つ場合；

$$y\to\infty \text{ で }\quad K_{ia} \to \Delta_{ia}(\vec{k})\, A(k)\, e^{ik_2y} \tag{2.7}$$

(ただし $\Delta_{ia}(\vec{k}) = \delta_{ia} - k_i k_a/k^2$ ).

次に境界条件を考察する。$K$ に対する境界条件は $K^{(v)}$ がゼロか否かでかなり異っている。平板表面上で乱れがゼロであるという条件から

(i) $K^{(v)}=0$ のとき

$$y=0 \text{ で } \begin{cases} K_{ia}=0 & (2.8) \\ \partial K_{2a}=0 & (2.9) \end{cases}$$

(ii) $K^{(v)} \neq 0$ のとき

$$y=0 \text{ で } \begin{cases} K_{2a}=0 & (2.10) \\ \partial K_{2a}^{(v)} = -\partial K_{2a} & (2.11) \\ K_{ja}^{(v)} = -K_{ja} \qquad j=1,3 & (2.12) \end{cases}$$

が得られる。ここで $\partial$ は $\partial/\partial y$ 又は $d/dy$ を表わす。($K_{2a}$ の台が薄いことから $K_{2a}=O(\delta)$ が導かれる。ただし $\delta$ は台の厚さである。(2.10) では $O(\delta)$ が無視されている。)

(2.1) と (2.2) を Navier-Stokes 方程式に代入し積分核に対する方程式を求めると，K に対して

$$[f+ik_1U-\nu\tilde{\nabla}^2]K_{ia} = -\rho^{-1}\tilde{\nabla}_i P_a - \delta_{i1}U'K_{2a} \qquad (2.13)$$

$$\tilde{\nabla}_i K_{ia} = 0 \qquad (2.14)$$

が得られる。ここで $\tilde{\nabla}_i=(ik_1, \partial, ik_3)$ である。(2.13) と (2.14) から圧力項に対するあらわな表式が得られる。$\mu=\sqrt{k_1^2+k_3^2}$ とおいて $P_a$ は

$$-\rho^{-1}\mu^2 P_a = [-f+ik_1U-\nu\tilde{\nabla}^2]\partial K_{2a} - ik_1U'K_{2a} \qquad (2.15)$$

で与えられる。(2.15) を (2.13) に代入し $P_a$ を消去すると $K_{2a}$ に対する方程式として

$$[(U-c)(\partial^2-\mu^2) - U'' - (\nu/i\alpha)(\partial^2-\mu^2)^2]K_{2a}=0 \qquad (2.16)$$

が得られる。ただし $k_1=\alpha$, $k_2=\beta$, $k_3=\gamma$, $f=i\alpha c$ とおいた。

$K^{(v)}$, $P^{(v)}$ に対しても似たような方程式が得られる。例えば

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - f + ik_1 U - \nu\tilde{\nabla}^2\right] K_{ia}^{(v)} = -\rho^{-1}\tilde{\nabla}_i P_a^{(v)} - \delta_{i1} U' K_{2a}^{(v)} \qquad (2.17)$$

$$\tilde{\nabla}_i K_{ia}^{(v)} = 0 \qquad (2.18)$$

等である。$U$ を既知関数として与えると (2.13)〜(2.18) は $K$ と $K^{(v)}$ を求めるべき未知関数とする線型微分方程式になっている。特に (2.16) は Orr-Sommerfeld 方程式と呼ばれている常微分方程式になっている。(2.13)〜(2.18) には渦と渦の相互作用を表わしている項が現われていないがそれらの効果は理想確率関数に時間依存性を持たすことによって implicit な形で取り入れられている。

<u>§3. いくつかの例</u>　まず最初に $U_W=0$ の場合を議論し後に $U_W \neq 0$ の場合に移る。

<u>(I) $U_W=0$</u>　このとき $U(y)=0$ である。乱れは $y=0$ における境界条件を満さねばならない。

<u>(Ia) 乱れが漸近的一様性を持つ場合</u>　このとき (2.16) は

$$[C(\partial^2-\mu^2) + (\nu/i\alpha)(\partial^2-\mu^2)^2] K_{2a} = 0 \qquad (3.1)$$

と書ける。漸近条件 (2.6) を使うと $C=\nu k^2/i\alpha$ が得られ (3.1) は

$$(\partial^2+\beta^2)(\partial^2-\mu^2) K_{2a} = 0 \qquad (3.2)$$

となる。これからただちに4つの独立解 $e^{\pm i\beta y}$, $e^{\pm\mu y}$ を得ることができる。$K_{2a}$ は境界条件 (2.8), (2.9) と漸近条件 (2.6) から一意的に決まる。得られた $K_{2a}$ を (2.15) に代入することによって

$P_a$の関数形がわかる。$P_a$の表式を(2.13)に代入し$K_{1a}$と$K_{3a}$に代する方程式を解く。結果をまとめるとKに対する表式として

$$K_{ia} = K^{(\infty)}_{ia}(\vec{k})\, e^{i\beta y} + \tilde{K}^{(\infty)}_{ia}(\vec{k})\, e^{-i\beta y} - \frac{2i\beta}{\mu(\mu - i\beta)} K^{(\infty)}_{2a}(\vec{k})\, \tilde{\nabla}_i\, e^{-\mu y} \qquad (3.3)$$

を得る。Kが得られると任意の次数の相関を与えることができる。例えば2次の相関は

$$\langle u_i(\vec{x},t)\, u_j(\vec{x}',t)\rangle = \int d^2k\, K_{ia}(y,\vec{k})\, K^*_{ja}(y',\vec{k})\, e^{i[\alpha(x-x')+\gamma(z-z')]} \qquad (3.4)$$

で与えられる。

遠方における乱れの確率的性質(この場合には$K^{(\infty)}$と$\tilde{K}^{(\infty)}$の関数形)がわかると(3.3)によって平板表面付近の乱れの確率的性質もわかることになる。(3.3)によると境界が存在することによる効果は乱れたポテンシャル流の出現をもたらす。

(Ib)乱れが漸近的等方性を持つ場合　この場合にも$K_{2a}$は(3.2)に従いcase Iaと同様に4つの独立解$e^{\pm i\beta y}$, $e^{\pm \mu y}$が得られる。しかし漸近条件(2.7)はそれらのうちの$e^{-i\beta y}$と$e^{\mu y}$が使えないことを示している。一方，2つの独立解の一次結合で2つの同次境界条件(2.8)と(2.9)を満すことができない。従ってこの場合には$K^{(0)} \neq 0$を仮定しなければならない。境界条件(2.10)と漸近条件(2.7)を使うと$K_{2a}$は一意的に決まる。case Iaで行なったのと同様なことをくり返すとKに対する表式として

$$K_{ia} = A(k)[\Delta_{ia}(\vec{k})e^{i\beta y} + \mu^{-1}\Delta_{2a}(\vec{k})\tilde{\nabla}_i e^{-\mu y}] \qquad (3.5)$$

が得られる。

$K^{(v)}$は境界条件(2.1 ),(2.12)が成立するように構成される。ただし，$K^{(v)}$が薄い台を持つという条件を破ってはならない。これらの条件を満す(2.17),(2.18)の解として

$$K_{ja}^{(v)} = -K_{ja}(y=0)\,\mathrm{erfc}(y/\sqrt{4\nu t}) \qquad j=1,3 \qquad (3.6)$$

$$K_{2a}^{(v)} = (\mu+i\beta)\Delta_{2a}(\vec{k})A(k)\int_y^\infty dy'\,\mathrm{erfc}(y'/\sqrt{4\nu t}) \qquad (3.7)$$

を見出すことができる。ここで erfc は Gauss の誤差関数である。

仮定より遠方で乱れは等方でありそこでのエネルギー・スペクトル関数 $E(k)$ は

$$E(k) = 4\pi k^2 A^2(k) \qquad (3.8)$$

で与えられる。相関関数を $E(k)$ で書き表わすと Hunt と Graham[2] の得た結果と一致することを見出すのはたやすい。

(II) $U_W \neq 0$　このとき $U(y) \neq const.$ であり境界の存在することによる効果の他に平均流分布が勾配を持つことによる効果も出現する。以下ではときに応じて $K_{2a}$ を $\phi$ と書くこともある。平均流に対して境界層近似が使えると仮定する。境界層の厚さを $d$ として境界層外部では $U(y)=0$ が成立するものとする。

漸近条件を考慮すると $c=\nu k^2/i\alpha$ であり(2.16)は

$$[U(\partial^2-\mu^2)-U'']\phi = (i\alpha R)^{-1}(\partial^2+\beta^2)(\partial^2-\mu^2)\phi \qquad (3.9)$$

となる。ここで$R$は$R=L_\infty U_W/\nu$で与えられるReynolds数である。方程式(3.9)の4つの独立解として(3.9)の右辺をゼロと置いた方程式の2つの解$\phi_1, \phi_2$と(3.9)にWKB法を適用して得られる2つの近似解$\phi_3, \phi_4$を使うことにする。($\phi_1, \phi_2, \phi_3$は$y=0$で1に$\phi_4$は$y=d$で1にそれぞれ規格化されているものとする。) 勿論これら4つの解は$\alpha R$が大きいときの近似解となっているにすぎない。非粘性解$\phi_1, \phi_2$は緩かに変化する。他方，$\phi_3$は$y$の増加とともに急激に減少し逆に$\phi_4$は増大する。

境界層外部では$U(y)=0$であり(3.9)は4つの独立解$e^{\pm i\beta y}$, $e^{\pm\mu y}$を持つ。境界層外部での$K_{2a}$を

$$K_{2a} = g(y) + C_0 e^{-\mu y} \qquad (3.10)$$

と書くことにする。$g(y)$は遠方での条件によって決まる関数であり，乱れが漸近的一様性を持つとき

$$g(y) = K_{2a}^{(\infty)}(\vec{k})\, e^{i\beta y} + \tilde{K}_{2a}^{(\infty)}(\vec{k})\, e^{-i\beta y}, \qquad (3.11)$$

漸近的等方性を持つとき

$$g(y) = A(k)\, \Delta_{2a}(\vec{k})\, e^{i\beta y} \qquad (3.12)$$

で与えられる。

内部解と外部解の接続は$y=d$で両者が3次導関数まで一致することを要求することによって行われる：

$$\sum_{i=1}^{4} C_i \phi_i^{(n)}(d) = g^{(n)}(d) + C_0(-\mu)^n e^{-\mu d} \qquad n=0,1,2,3. \quad (3.13)$$

$\phi_3, \phi_4$ が急激に変化する関数であることから $c_3, c_4$ が小さな値を持つことが一般的に云える。

(IIa) 薄い平均流境界層　境界層の厚さ $d$ が $\phi_3$ の台の厚さと同程度である場合には $\phi_3(d)$ の大きさは 1 の程度であると考えることができる。$\phi_3$ の台の厚さは $|\alpha R U_W|^{-1/2}$ の程度であり $\phi_4$ のは $|\alpha R U_0'|^{-1/3}$ の程度である。ただし $U_0'$ は境界層の外縁に近いある点 $y_0 < d$ における平均流勾配である。台の厚さに対するこれらの評価を使うと (3.12) が成立する為には $c_3$ 及び $c_4$ の大きさをそれぞれ $O(R^{-7/6})$ 及び $O(R^{-2/3})$ と仮定すればよいことがわかる。一方，$K_{2a}$ に対する境界条件は $K^{(0)}$ の存在を仮定すると (2.10) で与えられているから，結局，$c_0, c_1, c_2$ を決定する方程式として

$$c_1\phi_1(d)+c_2\phi_2(d)=g(d)+c_0 e^{-\mu d}, \tag{3.14}$$

$$c_1\phi_1'(d)+c_2\phi_2'(d)=g(d)-\mu c_0 e^{-\mu d}, \tag{3.15}$$

$$c_1\phi_1(0)+c_2\phi_2(0)=0, \tag{3.16}$$

を得る。これから ($d$ を無視して) ただちに

$$c_0=-g(0), \tag{3.17}$$

$$c_1=-\phi_2(0)[g'(0)+\mu g(0)]/[\phi_1(0)\phi_2'(0)-\phi_1'(0)\phi_2(0)], \tag{3.18}$$

$$c_2=-c_1\phi_1(0)/\phi_2(0), \tag{3.19}$$

が得られる。

薄い境界層の場合に特徴的なのは $c_0$ が $-g(0)$ で与えられてい

ることである。これはつまり境界層外部での乱れの確率的性質は$U_W=0$ (case I)の場合と一致していることを示している。境界層の厚さ d が $O(\sqrt{D})$ であることを想い起すとこの結論は極めて受入れやすい。

(IIb) 厚い平均流境界層　境界層の厚さ $d$ が $\phi_3$ の台の厚さに較べてずっと厚いという場合には $y=d$ における $\phi_3$ 及びその導関数は極めて小さな値をとると考えるから接続の条件 (3.13) から $\phi_3$ に関する項をすべて落すことができる。そうすると (3.13) が成立する為には $c_4$ が $O(R^{-1})$ の大きさを持つと考えねばならない。境界条件として case IIa と同様に (3.16) をとることにすると, $c_0, c_1, c_2$ を決定する方程式として

$$c_1\phi_1(d)+c_2\phi_2(d)=g(d)+c_0e^{-\mu d}, \tag{3.20}$$

$$c_1\phi_1'(d)+c_2\phi_2'(d)=g'(d)-\mu c_0e^{-\mu d}, \tag{3.21}$$

$$c_1\phi_1''(d)+c_2\phi_2''(d)=g''(d)+\mu^2c_0e^{-\mu d}, \tag{3.22}$$

$$c_1\phi_1(0)+c_2\phi_2(0)=0 \tag{3.23}$$

が得られる。いま仮に $g(y)$ が任意に与えられたとすると (3.20) ~ (3.23) は3つの未知係数に対する4つの非同次方程式となり解は一般に存在しない。(3.20) ~ (3.23) が解を持つ可能性として2つの場合が考えられる: (i) $g(y)$ が特別な関数形をしている場合; (ii) 平均流プロフィールが特別な形をしている場合。ここでは可能性として (i) をとる。さらに平均流プロフィール

として一様な勾配をもったものを考える。つまり$U(y)=(y-d)/d$を仮定する。このとき(3.9)に対する2つの独立な非粘性解として

$$\phi_1 = e^{\mu y}, \quad \phi_2 = e^{-\mu y} \tag{3.24}$$

を使うことができる。$g(y)$として(3.11)を仮定し(3.20)〜(3.23)を解くと

$$c_0 = 2i\beta\mu^{-1}e^{i\beta d}(\sinh\mu d)K_{2a}^{(\infty)}(\vec{k}), \tag{3.25}$$

$$c_1 = -c_2 = i\beta\mu^{-1}e^{-(\mu-i\beta)d}K_{2a}^{(\infty)}(\vec{k}), \tag{3.26}$$

$$\tilde{K}_{2a}^{(\infty)}(\vec{k}) = -e^{2i\beta d}K_{2a}^{(\infty)}(\vec{k}), \tag{3.27}$$

が得られる。(3.26)は境界層内部における非粘性解の関数形を一意的に決めている。$K^{(\infty)}$, $\phi_3$, $\phi_4$の台の性質を考慮すると$y=0$と$y=d$とにある薄い層状領域を除く境界層内部の領域$G$においては良い近似で粘性を無視出来ることがわかる。この領域$G$を非粘性領域と呼ぶ。非粘性領域において$K_{2a}$は$K_{2a}=2i\beta\mu^{-1}e^{-(\mu-i\beta)d}K_{2a}^{(\infty)}(\vec{k})\sinh\mu y$で与えられる。(2.15)を使えば$P_a$の表式を得ることが出来、さらに$K_{1a}$と$K_{3a}$に対する方程式を解くと非粘性領域における$K$の表式を得ることができる。

$K_{ia}$ $(i=1,2,3)$を

$$K_{ia} = 2i\beta\mu^{-2}e^{-(\mu-i\beta)d}K_{2a}^{(\infty)}(\vec{k})K_i(y,\vec{k}) \tag{3.28}$$

という形に書くと$K_i$は

$$K_i = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i + \tilde{\nabla}_i \Phi \ , \qquad (3.29)$$

$$\Phi = \cosh \mu y \ , \qquad (3.30)$$

$$\vec{A} = \vec{e}_2 [(\alpha/\gamma)\mu(d-y)]^{-1} \sinh \mu y \ , \qquad (3.31)$$

で与えられる。ここで $\vec{e}_2$ は y 軸の正方向を向いた単位ベクトルである。

case IIb に対するもう少し詳しい議論は文献(4)に見出される。

**§4. まとめ**　case I で見たように境界の存在が乱れに与える効果を調べるという問題に対してはかなり満足のいく議論が可能である。平均流分布が一様でない場合(case II)でも平均流境界層が薄い場合にはほぼ満足のいく結果が得られている。しかし平均流勾配の乱れに与える効果が最も顕著に現れるのは厚い境界層の場合であり、この場合には充分に満足のいく結果が得られなかった。困難の大部分は非常に特殊な平均流プロフィールを仮定しない限り Orr-Sommerfeld 方程式(2.16)を解くことが難しいという点にある。

参考文献


1) N.H. Thomas & P.E. Hancock, J. Fluid Mech., 82 (1977) 481.

2) J.C. Hunt & J.M.R. Graham, J. Fluid Mech., 84 (1978) 209.

3) 今村 勤「確率場の数学」岩波書店(1976).

4) 神戸良一　学位論文.