数理解析研究所講究録
第354巻 1979年 182-197

渦糸近似による振動翼の数値計算

日大　理工学部　小野清秋
東大　工学部　桑原邦郎

1　緒　言

「振動翼後流の実験」(夏目・大島)で示された測定値との比較を行ない、流れ場の特徴を考察するために、ポテンシャル理論を用いた数値計算を行なった。

フラッタや突風荷重応答の問題に関連して、二次元翼が一様流中でヒービング運動やピッチング運動を行なう場合について、翼面に働く力とモーメントを求めるための研究は古くから行なわれており、Theodorsen[1]や Karman & Sears[2]がポテンシャル理論を用いたいわゆる「線型振動翼理論」を示しているい、種々の改良が加えられてきた。「線型振動翼理論」とは、二次元平板翼が微小振動振巾で振動する場合に、翼に働く力とモーメントを求めた理論で、時々刻々変化する翼まわりの循環の強さの変化を補なうように、後流に渦層が放出されると考えたことが特徴である。この循環と渦層の強さを決定する

ためにケルビンの循環定理を流れ場全体に適用し、さらにクッタの条件が後縁で成立している。即ち後縁が後方淀み点となると仮定している。翼の振動の振巾と振動数が小さい場合には理論値が実験値とかなりよく一致することが確かめられている。(3) しかしどの程度まで振巾や振動数を大きくしても線型理論を適用できるのか、その適用限界ははっきりとわかってはいない。

最近ヘリコプターのダイナミックストール現象や魚の推進機構の解析のため、大きな迎角(実効迎角にして30°程度まで)をとって振動する場合や、大きな振動数(無次元化振動数 $k=\frac{\omega\cdot(2a)}{U_0}$ [ただし ω は振動数、$2a$ は半翼弦長、U_0 は一様流速。] が1程度以上)で振動する場合について関心が集まっている。(4) このような場合の特徴は、翼面上で剥離と再付着をくり返すこと(5)と、後流が大きく変形し、渦のいわゆる「まきあがり」が起こる(6)ことである。

これらの現象を理論的に説明し、翼に働く外力等を求めるために、渦系近似法を用いた計算を行なった。その際振動翼の場合、特に剥離を伴なう場合には、後縁が後方淀み点となるという保障がないことから、クッタ条件を用いずに、いわば「滑り無し条件」を適用した。(7) この方法によれば、後流の変形を計算できるばかりでなく、翼面上での剥離をも考慮に

いれられるはずである。計算は実験条件にあわせて、NACA 0012翼模型がヒービング運動のみを行なう場合について行なった。

2 理論式

翼弦長 $4a=8cm$ のNACA0012翼型が振巾Hでヒービング運動を行なう場合を考える。物理面(Z面)において、50%弦長点が原点となり、前後縁がX軸上にのるような振動座標系を考える。(図1) このような座標系からみた場合、一様流がX軸方向に、又Y軸の負の方向に、

$$\dot{H} = -H\omega \sin\omega t \qquad (1)$$

なる流速の流れがあたることになる。等角写像により図2に示す単位静止円への写像を考える。写像関数として

$$Z = a'\left(\zeta+\gamma+\frac{c^2}{\zeta+\gamma}\right) - b$$

$$\gamma = \xi_0 + i\eta_0 \qquad (2)$$

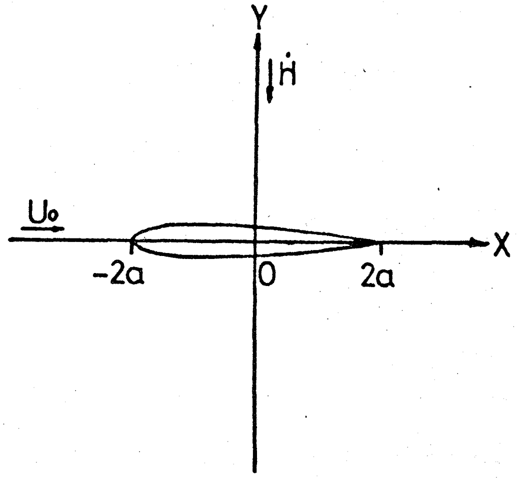


図1 物理面(Z面)での座標系

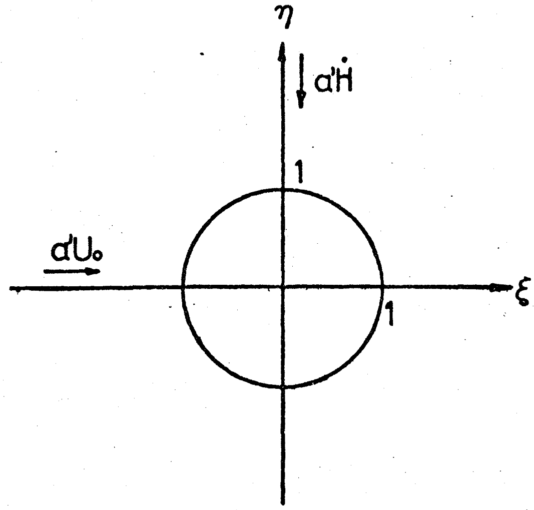


図2 写像面(ζ面)での座標系

$$C = (\xi_0 + (1-\eta_0^2)^{\frac{1}{2}})(1-\delta) \qquad 0 < \delta \ll 1$$

なる関数を考え、係数として

$$a' = 2.2105194$$
$$b' = -0.0272574 \qquad (3)$$
$$\xi_0 = -0.0647384$$
$$\eta_0 = 0$$

なる数値をとると、後縁に丸みがついてNACA0012翼型に非常に近い形となる。

計算の基本は各タイムステップごとにM個の渦糸を翼面上で「滑り無し条件」が満たされるように放出し、その後は渦糸同志の相互干渉を計算して、各タイムステップごとの渦糸の位置を求め、それらの渦糸によって形成される流れ場を調べようとするものである。ζ面でタイムステップNにおける複素ポテンシャル$F(\zeta)$は

$$F(\zeta) = a'U_0(\zeta + \frac{1}{\zeta}) + ia'\dot{H}\ (\zeta - \frac{1}{\zeta})$$
$$+ i\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} K^{ik}\{\ln(\zeta - \zeta^{ik}) - \ln(\zeta - \zeta^{ik*})\} \qquad (4)$$

ただし　$\zeta^{ik*} = 1/\bar{\zeta}^{ik}$

で与えられる。第一項は一様流のポテンシャル、第二項はヒービング運動のポテンシャル、第三項は渦糸とその鏡像によるポテンシャルをあらわす。タイムステップNにおいてあらたに放出される渦の位置は、

$$\zeta^{N,k} = (1+\varepsilon)\, e^{i\frac{2\pi}{M}(k-1)} \quad , k = 1 \cdots\cdots M \qquad (5)$$

と仮定する。ただし ε は正の数である。従って問題は $K^{i,k}$ の強さ（ただし1度放出された渦糸は強さが変化しないとする。）を決定することと各タイムステップにおける渦の位置 $\zeta^{i,k}$ を決定することである。

渦糸の強さ $K^{i,k}$ を決定する方法として「滑り無し条件」を考える。円周上が流線となる条件は(4)式で保証されている。そこでそれに加え、円周上の2節点間で、円周にそった速度成分が0であるという条件を与えることとする。そこで円周上の各節点 $\hat{\zeta}_1, \cdots \hat{\zeta}_M$ で

$$\Phi_{\zeta=\hat{\zeta}_1} = \Phi_{\zeta=\hat{\zeta}_2} = \cdots = \Phi_{\zeta=\hat{\zeta}_M} \qquad (6)$$

ただし

$$\hat{\zeta}_k = \exp i\left(\frac{\arg(\zeta^{N,k+1}) + \arg(\zeta^{N,k})}{2}\right) \qquad (7)$$

$$\zeta^{N,M+1} = \zeta^{N,1}$$

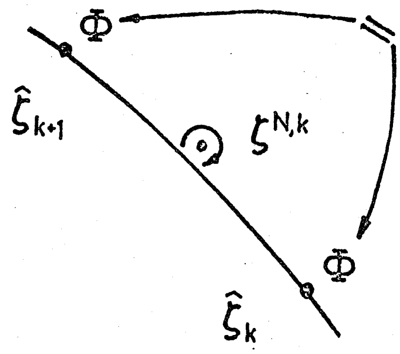


図3 滑り無し条件

なる条件を課す。円周上の2点 $\hat{\zeta}_k$ と $\hat{\zeta}_{k+1}$ での速度ポテンシャルが等しいという条件を(6)式はあらわしている。即ち $\hat{\zeta}_k$ と $\hat{\zeta}_{k+1}$ の間で平均としてどちらか一方へ向かう流れが存在しないという条件である。そしてそのような条件を満たすように、2節点の中間で、円周の少し外側に渦糸を放出する。図3に「滑り無し条件」の意味を示す。渦糸は各タイムステップごとに放出して、常に「滑り

無し条件」が満たされているようにする。「滑り無し条件」として、さらに円周にそっての循環が0である必要であるから、

$$K^{N,1}+K^{N,2}+\cdots+K^{N,M}=0 \qquad (8)$$

をつけ加えなければならない。

(6)～(8)により強さを決定された渦系は、その後渦系間の相互作用と一様流さらに翼の振動により誘起される速度により流されると考えて、各タイムステップごとにすべての渦系の位置を決定する。第iステップに放出されたk番目の渦系の誘導速度は

$$\frac{dz^{ik}}{dt}=\overline{\left(\frac{dF^{ik}}{dz}\right)}_{z=z^{ik}} \qquad (9)$$

とあらわされる。ただし

$$F^{ik}\equiv F(\zeta)-K^{ik}\ln(\zeta-\zeta^{ik}) \qquad (10)$$

である。ζ面で考えた場合は

$$\frac{d\zeta^{ik}}{dt}=\overline{\left(\frac{dF^{ik}}{d\zeta}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|^2\right)}_{\zeta=\zeta^{ik}} \qquad (11)$$

となる。新しい渦の位置は

$$\zeta^{ik}_{N+1}=\zeta^{ik}_{N}+\frac{1}{3}\left(2\left(\frac{d\zeta^{ik}}{dt}\right)_N+\left(\frac{d\zeta^{ik}}{dt}\right)_{N-1}\right)\cdot\Delta t+O(\Delta t^3) \qquad (12)$$

により決定する。Δtは計算の時間きざみをあらわす。翼に働く揚力L，抵抗Dは、非定常のブラジウスの公式

$$D-iL=i\rho\oint\overline{\frac{\partial F}{\partial t}dz}+\frac{1}{2}i\rho\oint\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2dz \qquad (13)$$

より求める。

3 数値計算手順

計算の流れ図を図4に示す。図中のTSは時間きざみ $\Delta t/T_0$ のことである。(T_0は周期) 時刻 $t=0$ に翼が上端から(1)で与えられる速度で運動を開始すると考える。各タイムステップのはじめに渦を放出し、その誘導速度を計算して新しい渦系の位置を決定するわけであるが、この際誤差のため渦系が円の中に飛び込んでしまう場合がある。その場合はTSを半分として同様の計算を行なう。

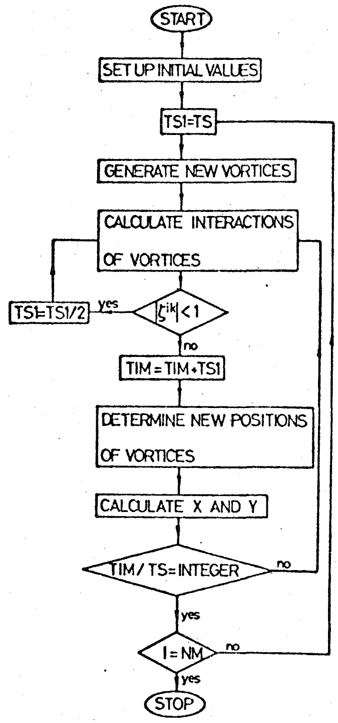
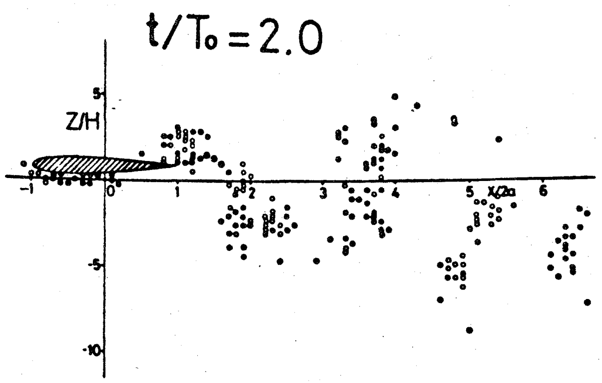


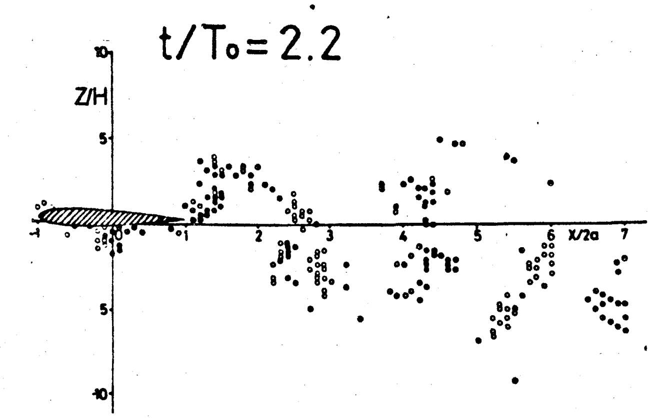
図4 計算流れ図

渦系の個数が多くなると計算時間を非常に必要となるため各タイムステップごとに放出する渦系の個数は2個とした。この場合前縁と後縁の少し外側に渦系を置いた。εは0.3に選んだ。Z面で考えると、前縁と後縁の翼弦長の3%程度外側においたことになる。計算は翼が上端の位置から振動を開始すると考え、その時刻 $t=0$ からはじめ、3周期分行なった。時間きざみ $TS=\Delta t/T_0$ は $1/50$ とした。計算は表1に示す6つのケースについて行なった。ただし表中の α_{max} は最大実効迎角である。

表1 計算条件

CASE	A	B	C	D	E	F
H(cm)	1.0	1.0	1.0	0.5	0.5	0.5
T_0(sec)	0.35	0.51	0.85	0.51	0.85	1.28
K	3.3	2.2	1.3	2.2	1.3	0.9
α_{max}(°)	39	29	19	16	10	6





4 計算結果

図5はcase Bについて計算開始から2.0, 2.2, 2.4周期後の後流パターンを示したものである。白ぬきの丸は時計方向まわりの渦糸、黒丸は反時計方向まわりの渦糸をあらわす。同一種類の渦糸同志が集まって、渦糸の集中した領域が形成されていることがわかる。これが渦の「まきあがり」をあらわしているものと

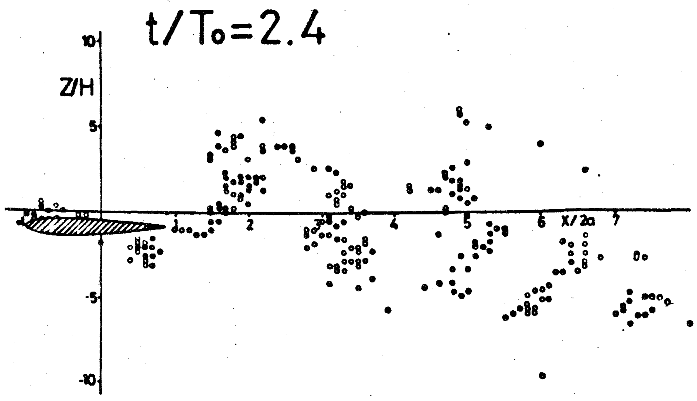


図5　後流の渦糸分布（case B）

考えられる。図6にcase Fの$t/T_0=2.0$における渦糸分布を示す。この場合にはあきらかに「まきあがり」はおこっていない。これらの図は流れ場のストリー

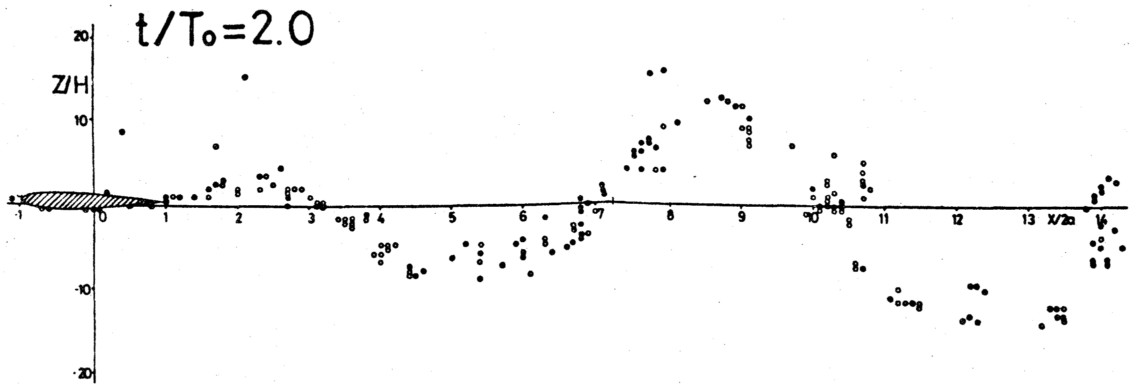


図6　後流の渦糸分布（case F）

クラインをあらわしていると考えられ、色素注入法による可視化写真と直接比較できる。case Bでは翼面上で剥離をおこしていることが可視化写真から観察されるが、図5からも渦糸が翼面上で並んでいることがみとめられる。

図7にcase Bについての$t/T_0=2.0$から3.0までの間の瞬間流線を示す。図中の斜文字の数値は流れ関数の値を示し、＋の場合が反時計方向まわりの渦、－の場合が時計方向まわり

の渦をあらわし、数値1が10cm²/secに相当する。1周期の間に互いに向きの逆の渦が2つ放出され、その中心は振動中心から少し離れた場所に位置しており、カルマン渦列と逆の配置となっている。ただし各図のもっとも右端にある渦対は

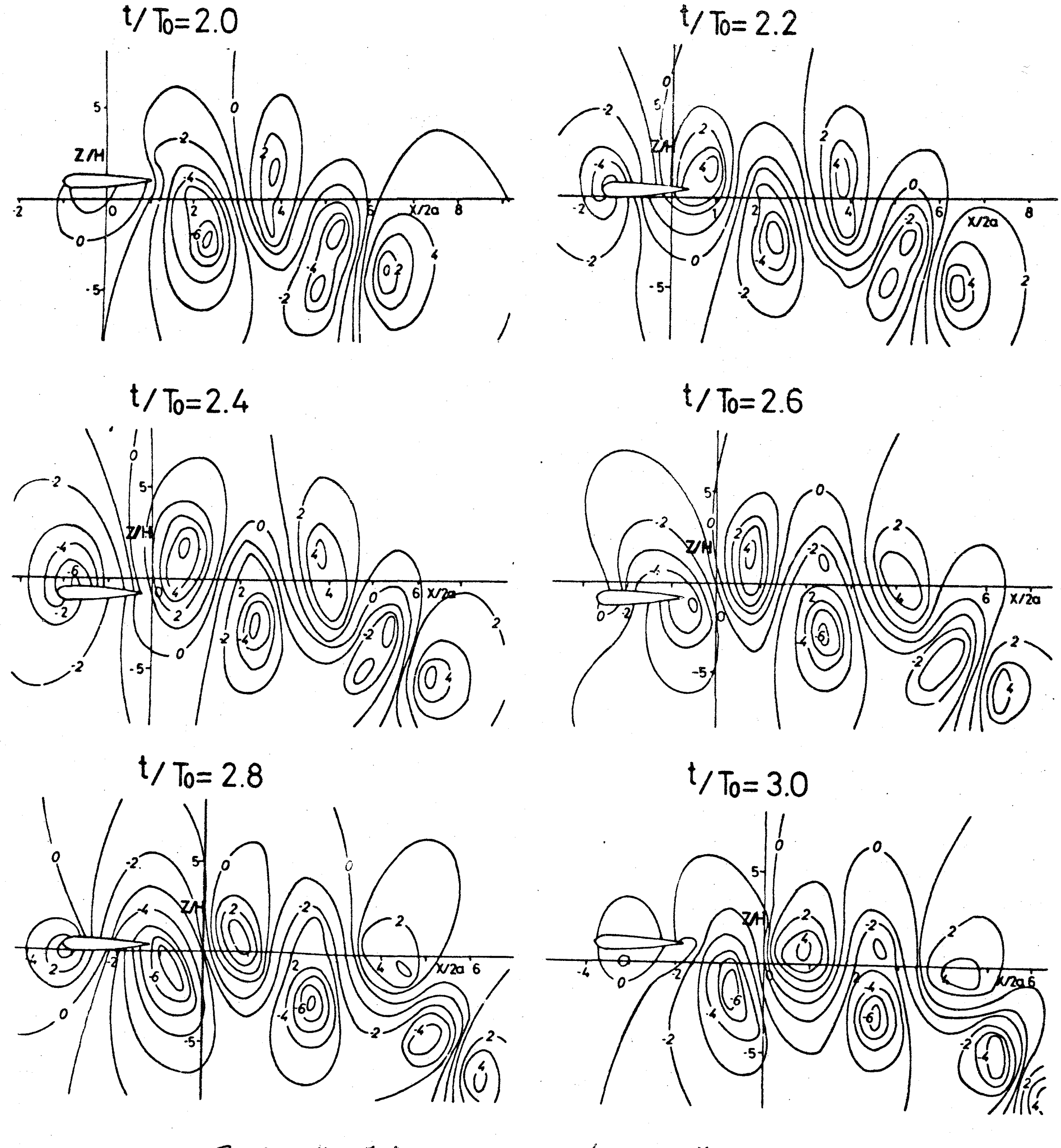


図7　各時刻における瞬間流線（case B）

計算の立ち上がりの不安定さのために他　とは異なった配置となっている。翼面上で剥離をおこしているかどうかは、この流線間隔ではわからない。渦の発生する時刻やその配置は case A～F を通じてあまりかわりがない。ただし、case E, F の場合には渦の中心が振動中心上に並ぶようになる。

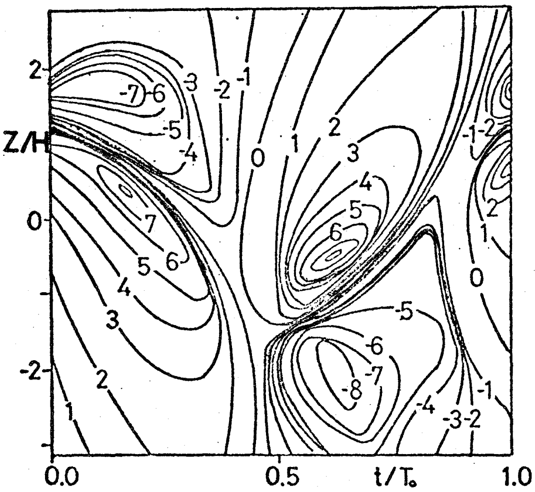


図8-1 一様流方向の速度の等高線

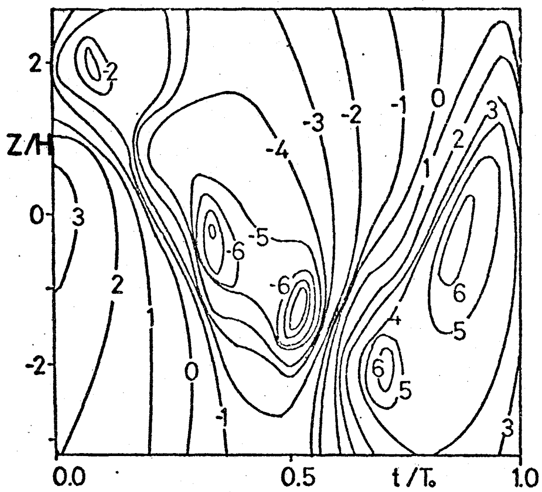
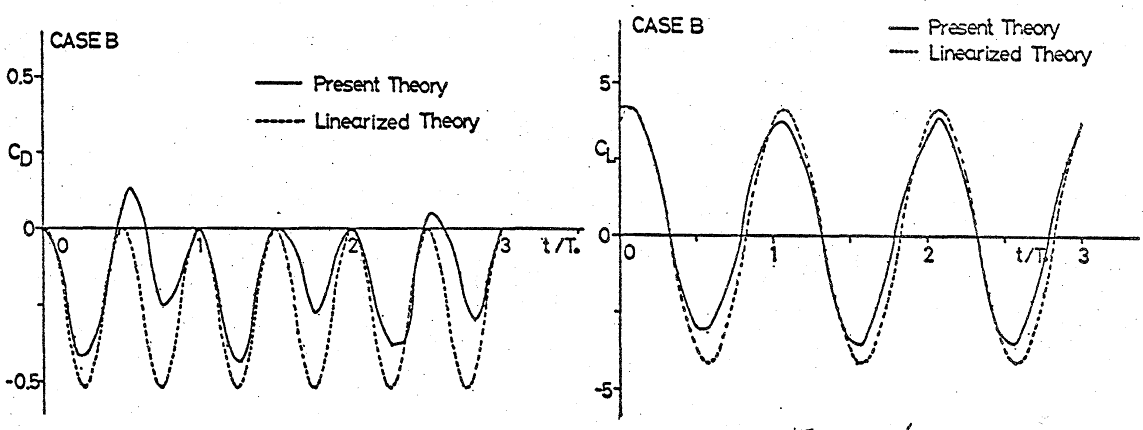


図8-2 一様流と垂直方向の速度の等高線

図8に一様流方向の速度 u とそれと垂直方向の速度 v の1周期にわたる変化を示す。1めもりは約2 cm/sec に相当する。(u については U_0 を差し引いてある。) 軸の原点は翼が最上端にきた時点をあらわす。たて軸は振動中心を0として振巾で無次元化してある。これらの図は case B について、後縁の直後での速度変化である。u については後縁の軌跡にそってせん断層が形成されており、その せん断の向きが半周期ごとに逆向きとなることが特徴的である。

図9に case B についての C_D と C_L (動圧で無次元化してあ



(a) 抵抗係数　　(b) 揚力係数

図9 抵抗係数と揚力係数の時間変化

る。）の時間変化を示してある。図中の点線は線型理論の計算結果である。C_D, C_L が最大値、最小値をとる位相については両者の間にかなりよい一致がみられる。一方振巾についてみると、C_LについてはあまりかわらないがC_Dについては、本計算の方が小さくなっている。又C_Dの平均値も本計算の方が大きい。即ち抵抗分が大きいという結果となっている。

5 議論

図10に「まきあがり」を起こす場合とおこさぬ場合の境界についての大橋・石川[8]の結果と本実験・計算条件を示す。横軸が無次元化周波数、たて軸が振巾である。「まきあがり」がおこる場

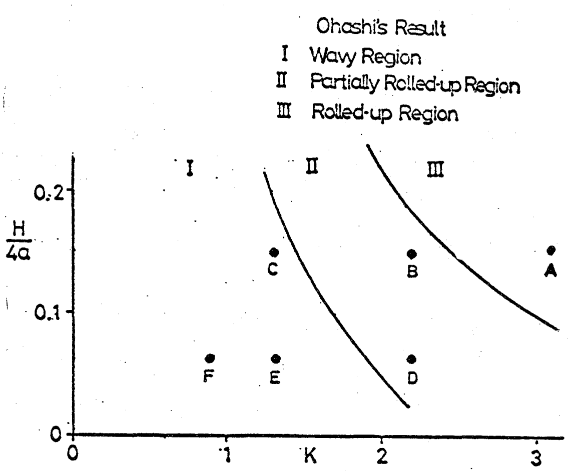


図10 後流流れ場の変化領域

合とおこらぬ場合は、本実験結果と計算結果については完全に一致しており、大橋・石川の分類とも一致している。即ち振巾を一定にすると、振動数を大きくした場合「まきあがり」がおこり、振動数を一定とした場合には振巾を大きくすると「まきあがり」がはじまる。

表2に揚力変化の振巾と位相について示す。本計算結果は線型理論値とかなりよく一致している。この理由は主として、計算を行った振動条件によるものと考えられる。即ちこの条件の範囲の無次元化周波数での振動の場合には仮想質量の効果即ち翼の加速度の効果が支配的となるために、剥離を起こしても、後流が変形しても、あまり揚力には影響を与えないためであると考えられる。図11は推力係数についての測定値と本計算結果、線型理論値を比較して

表2 揚力の振幅と位相

CASE	Present Theory		Linearized Theory	
	C_L	θ	C_L	θ
A	8.85	-7.43°	9.07	-17.1°
B	3.61	-18.5°	4.16	-25.6°
C	1.14	-49.0°	1.67	-41.8°
D	1.76	-20.6°	2.08	-25.6°
E	0.60	-50.1°	0.83	-41.8°
F	0.41	-77.0°	0.45	-58.2°

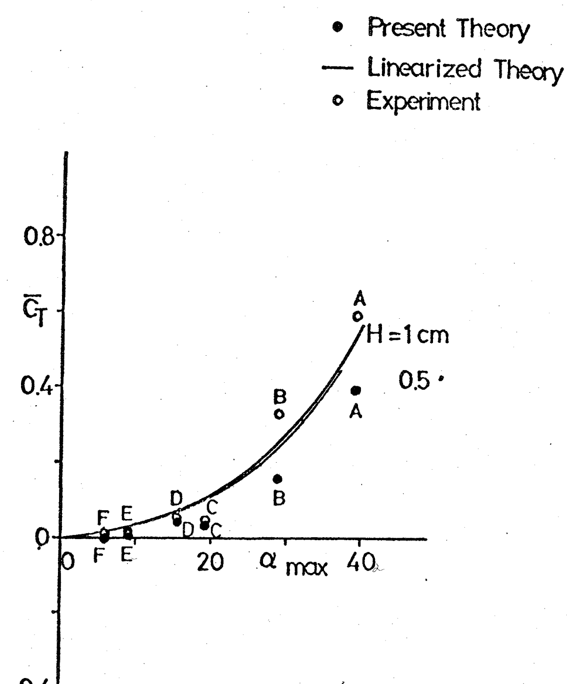


図11 推力係数

示したものである。翼にヒービング運動を行わせた場合、たしかに推力が発生していることが確かめられた。そしてその大きさは、理論値とほぼ同じ大きさを示している。本計算での推力係数の大きさは線型理論値の60%程度となっているが、これは前縁付近から渦を放出することにより、前縁サクションの効果が弱められていることによるものと考えられる。

図12に後縁から放出される渦の強さの変化の位相を示す。本計算、線型理論、実験結果とも統一的な関係は見い出せなかった。後縁から放出される渦の位相が線型理論とシュリーレン写真からの測定値とが一致しないことが、大橋・石川[8]によっても指摘されており、この不一致は今後解決されねばならぬ問題である。

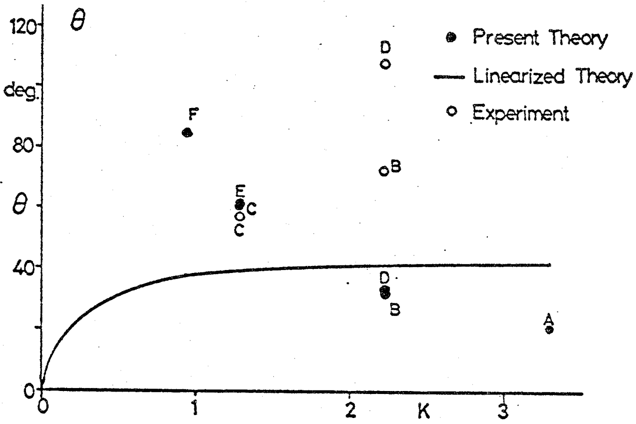


図12 渦放出の位相

後縁でのクッタ条件については、翼面上で大規模な剥離を起こすような場合でも、後縁から少し離れた所では、クッタ条件を満たすように流れ場が形成されているということが測定から得られた結論である。本計算においては、後縁ではクッタ条件は成立しないが、その少し下流側では、クッタ条件をあたかも満足するように渦を置いたためにうまくいったので

あろう。

6 結論

クッタ条件を用いずに、いわば「滑り無し条件」を翼面上の各節点に適用することにより放出される渦の強さを決定して、渦糸近似法により後流の変形を考慮に入れた振動翼の計算を行なった。後流渦の配置や、速度場については測定結果とよく一致した結果が得られた。又本計算法によれば翼面上での剝離の影響も取り入れられることがわかった。McCrosky[5]等のダイナミックストールの実験によると、剝離が起こることによる揚力の大きさの変化は本計算法による計算結果よりはるかに大きいものとなっている。その理由として1つには振動条件が異なることにもよるが、各タイムステップごとに放出される渦の個数が少なすぎて、流れ場特に翼まわりの流れ場の変化を充分にあらわせないことが考えられる。従ってもっと渦糸の個数を多くして計算を行なう必要があるものと考えられる。

References

(1) T.Theodorsen; "General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of the Flutter" NACA Report No.496,1935.

(2) T.von Karman and W.R Sears; "Airfoil Theory for the Non-Uniform Motion" J.Aeronautical Science,vol 5,1938.

(3) H.C.Lessing,J.W.Troutman and G.P.Menees; "Experimental Determination of the Pressure Distribution on a Rectangular Wing Oscillation in the First Bending Mode for the Mach Numbers from 0.24 to 1.30" NASA TND-344,1960.

(4) W.J.McCrosky; " Some Current Research in the Unsteady Fluid Dynamics" J.Fluids Eng.,Transactions of the ASME, vol 99,1977.

(5) L.W.Carr,K.W.McAlister and W.J.McCrosky; "Analysis of the Development of Dynamic Stall based on Oscillating Airfoil Experiments" NASA TND-8382,1977.

(6) J.B.Bratt; "Flow Patterns in the Wake of an Oscillating Airfoil" R&M 2773,1953.

(7) K.Kuwahara; "Study of the Flow past a Circular Cylinder by an Inviscid Model" J.Phys. Soc.Japan, vol 45,1978.

(8) 大橋秀雄・石川宣勝；"非定常翼の後流付近の流れの可視化研究" 日本機械学会誌，第74巻，第634号，1973