

## 2次元 Poiseuille 乱流の Orr-Sommerfeld 固有函数を用いる解析

名大 工学部 後藤 俊幸  
桑原 真二

乱流を記述する際に我々は、無限大の自由度から、何らかの方法でその情報の縮約を行ない、少数の自由度で議論しなければならぬ。

その一方法として我々は、2次元 Poiseuille 乱流を例にとり、Orr-Sommerfeld (O-S) の固有値、固有函数を用いて、解析を行なった。具体的には、2次元の流束函数を、主流の方向に Fourier 展開し、それに垂直な方向には、O-S の固有函数で展開する。そしてその展開係数の非線型連立常微分方程式の初期値問題を考察する。

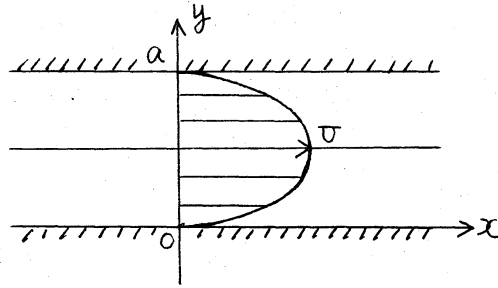
### § 2. 数学的定式化

物理的仮定として次の3つをおく。

- (i) 平均圧力勾配は一定。
- (ii) 攪乱は2次元攪乱である。

(iii) 攪乱は流れ方向に周期的である。

基礎方程式及び境界条件は、無次元化された形で次のように書ける。 Reynolds 数  $R$  は、図に示した量  $\varepsilon$  を用いて  $R = \frac{Ua}{\nu}$  とする。



$\psi$ ; stream function

$\omega$ ; vorticity.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{R} \nabla^2 \omega$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi$$

$$V = (\psi_y, -\psi_x) = 0 \quad y = 0, 1$$

$$0 \leq y \leq 1 \quad (1)$$

まず流れ函数  $\psi$  と渦度  $\omega$  を次のように主流の  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  と攪乱  $(\tilde{\psi}, \tilde{\omega})$  に分ける。

$$\psi = \bar{\psi} + \tilde{\psi} = \int_0^y U(\eta) d\eta + \tilde{\psi} \quad (2)$$

$$\omega = \bar{\omega} + \tilde{\omega} = -\frac{dU}{dy} + \tilde{\omega} \quad (3)$$

$$U(y) \equiv 4y(1-y)$$

これら  $\psi$  基礎方程式 (1) に代入し、攪乱に対する次の方程式を得る；

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} + U'' \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} = \frac{\partial(\tilde{\psi}, \tilde{\omega})}{\partial(x, y)} + \frac{1}{R} \nabla^2 \tilde{\omega}$$

$$\tilde{\omega} = -\nabla^2 \tilde{\psi}$$

$$U'' \equiv \frac{d^2 U}{dy^2}$$

(4)

さてここで攪乱を  $x$  方向に Fourier 展開し、垂直な方向にはある完全系で展開できると仮定する；

$$\psi = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{\ell m}(t) X_{\ell}(x) Y_{\ell m}(y) \quad (5)$$

$$\tilde{\omega} = -\nabla^2 \psi = -\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{\ell m} \omega_{\ell m} \quad (6)$$

$$X_{\ell} \equiv \sqrt{\frac{2}{2\pi}} e^{i\ell x} \quad \int_{-L}^L = \pi$$

$$\omega_{\ell m} \equiv -\nabla^2 \psi_{\ell m}$$

$Y_{\ell m}$  の境界条件は次のようにとる。

$$Y_{\ell m} = Y_{\ell m}' = 0 \quad \text{at } y = 0, 1 \quad (7)$$

(5), (6) を (4) に代入して  $X_{\ell}$  に関する直交性；

$$(X_{\ell}, X_p) \equiv \int_{-L}^L X_{\ell}^* X_p dx = \delta_{\ell p} \quad (8)$$

を使えば次のようになる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ -a_{\ell m} D_x Y_{\ell m} - i\ell \hat{h} a_{\ell m} \left\{ \ell \sigma D_x Y_{\ell m} - \ell \sigma'' Y_{\ell m} - \frac{1}{c^2 R} D_x^2 Y_{\ell m} \right\} \right]$$

$$= i\ell \sqrt{\frac{2}{2\pi}} \sum_{p, m, q} a_{\ell-p, q} a_{p, m}$$

$$\times \left[ -p Y_{\ell m} D_x - p Y_{\ell-p, q}' + (\ell-p) Y_{\ell m}' D_x - p Y_{\ell-p, q} \right]$$

$$D_x \equiv \frac{d^2}{dy^2} - \ell^2 \hat{h}^2, \quad \cdot \equiv \frac{d}{dt}, \quad \prime \equiv \frac{d}{dy} \quad (9)$$

さて  $Y_{\ell m}(y)$  についてある完全系とだけ述べたが、ここで  $Y_{\ell m}(y)$  を Orr-Sommerfeld の固有函数にとり、即ち方程式 (9) の下線部を次のように書く。

$$\ell(D_x Y_{em} - \ell D'' Y_{em} - \frac{1}{cBR} D_x^2 Y_{em} = C_{em} D_x Y_{em} \quad (10)$$

$C_{em}$ は複素定数である。特に $\ell = 1$ は、 $c$ - $\beta'$ 方程式'である。  
(10)と境界条件(7)とから固有値問題がえられる。この固有値と固有函数を用いて(4)式を書きかえると

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} [-a_{em} D_x Y_{em} - c^2 C_{em} D_x Y_{em} a_{em}] \\ & = i^2 \sqrt{\frac{h}{2\pi}} \sum_{p,m,\varepsilon} a_{pm} a_{e-p,\varepsilon} \\ & \quad \times [-P Y_{em} D_x - p Y_{e-p,\varepsilon} + (\ell-p) Y_{pm} D_x - Y_{e-p,\varepsilon}] \end{aligned} \quad (11)$$

となる。さて $c$ - $\beta'$ 方程式は self-adjoint ではないために、普通の直交性をもたず、(11)式と $Y_{em}^*$ との内積取る。 $Y_{em}^*$ をかけて区間 $[0, 1]$ で積分しても(\*は複素共役を表わす)左辺の線型部分が対角化されたい。そこで、次のように

( $c$ - $\beta'$ に Adjoints な Operator) 固有値問題を考える;

$$\begin{aligned} \ell D_x (D_x Y_{em}) - \ell D'' Y_{em} + \frac{1}{cBR} D_x^2 Y_{em} \\ = C_{em} D_x Y_{em} \end{aligned} \quad (12)$$

$$Y_{em} = Y_{em}' = 0 \quad \text{at } y = 0, 1$$

$Y_{em}$ ,  $C_{em}$ はそれぞれ、Adjoints な固有函数、固有値である。  
。(10)と $Y_{em}^*$ との内積と、(12)と $Y_{em}$ の内積の差から)式を得る;

$$(C_{em} - C_{em}^*) \int_0^1 Y_{em}^* D_x Y_{em} dy = 0 \quad (13)$$

今、 $C^{-1}$  及び  $C_m$  のその Adjoint の固有函数が何らかの意味で適当な順序付けと規格化が可能であると仮定する;

$$\int_0^1 Y_{em}^* D_y Y_{em} dy = -\lambda_{em} \quad (14)$$

(14) において、 $m=n$  ならば、 $C_{en} = C_{em}^*$  である。(11) と  $Y_{en}^*$  との内積をとり、(14) の両辺を乗じ、最終的に次の非線形 1 階連立常微分方程式を得る。

$$\dot{A}_{em} + i\lambda_{em} C_{em} A_{em} = i \sum_{p \neq e}^{p \neq e} A_{en}^{p \neq e} A_{e-p} A_{pm} \quad (15)$$

$$A_{em}^{p \neq e} \equiv \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left[ -p (Y_{en}, Y_{pm} D_{e-p} Y_{e-p}) \right. \\ \left. + (e-p) (Y_{en}, Y_{pm} D_{e-p} Y_{e-p}) \right] \\ (\Phi, \Psi) \equiv \int_0^1 \Phi^* \Psi dy. \quad (16)$$

(15) 式では、粘性の影響が左辺の 2 項の  $C^{-1}$  の固有値  $C_{em}$  に入っており、右辺は非線形項である。結局この無次元元方程式を有限次元で打ち切って、計算機による時間発展をたしかめる事になるのである。

§3. Orr-Sommerfeld の固有値と固有函数。

$C^{-1}$  の operator とその Adjoint な operator を次のように書く。(C-1)

$$(L\tau - C_{em}) D_y - (L\tau - \frac{1}{2\pi R}) D_y^2 \equiv L_{em} \quad (17)$$

(Ad. C-β)

$$(L\sigma - C^{em})D_x + 2L\sigma \frac{d}{dy} + \frac{1}{C^2 R} D_x^2 \equiv L^{em} \quad (18)$$

従ってそれぞれ固有値問題は

$$\circ L^{em} Y_{em} = 0 \quad Y_{em} = Y_{em}' = 0 \quad y=0,1 \quad (19)$$

$$\circ L^{em} Y_{em} = 0 \quad Y_{em} = Y_{em}' = 0 \quad y=0,1 \quad (20)$$

となった。二つの場合とも、その厳密解が知られていないので、本稿ではガラ-キ法でその近似解を求めた。C-β' & C-β' (Ad. C-β) 両方とも同じ方法であるので、C-β' (2つ) について述べる。L^{em} は、y = 1/2 に関して対称な形をしているので、Y\_{em} は y = 1/2 に関して偶か奇の parity を持つ。そこで、最初から偶奇に分けて Y\_{em} を作る。今、境界条件を満たす一次独立な関数列を次のようにとってくる。

$$f_n(y) = \cos n\pi y - \cos (n+2)\pi y \quad (21)$$

boundary condition

$$f_n(0) = f_n(1) = f_n'(0) = f_n'(1) = 0 \quad \text{OK!}$$

これを用いて、Y\_{em} を偶、奇に分けて作る。

$$Y_{em}(y) = \sum_{p=0}^N C_{em}^p f_{2p}(y) \quad ; \text{even} \quad (22)$$

$$Y_{em}(y) = \sum_{p=0}^N E_{em}^p f_{2p+1}(y) \quad ; \text{odd} \quad (23)$$

本来なら、加数無限大までとるのであるが、有限項で切ると (22), (23) をそれぞれ (19) に代入する。左から f\_{2p}, f\_{2p+1} を

これそれぞれ  $[0, 1]$  で積分すれば次式を得る。

$$\sum_{p=0}^N (f_{2p}, L_{em} f_{2p}) C_{em}^p = 0 \quad (24)$$

$$\sum_{p=0}^N (f_{2p+1}, L_{em} f_{2p+1}) E_{em}^p = 0 \quad (25)$$

実際の計算においては、 $N$  を 20 までとして計算した。

今まで、 $l \neq 0$  として計算してきたが、 $l=0$  の場合は例外となっている。何故なら、 $\vec{v} = (X_l Y_{em}', -i \sin l X_l Y_{em})$  であるから、 $l=0$  の場合一つの境界条件は常に満たされている。従って、この場合には普通の Navier-Stokes に基づいて考える。

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + (\mathcal{V} \cdot \text{grad}) \mathcal{V} = -\text{grad} p + \frac{1}{R} \Delta \mathcal{V} \quad (26)$$

$$\text{div } \mathcal{V} = 0.$$

$$B.C \quad \mathcal{V} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{これに } \mathcal{V} &= \mathcal{V}_0 + \tilde{\mathcal{V}}, \quad (\mathcal{V}_0 = (\mathcal{V}_0(y), 0, 0)), \\ P &= P_0 + \tilde{P}. \end{aligned} \quad (27)$$

として (26) に代入し、線形化を行なう。そして  $l=0$  であることより、 $\tilde{\mathcal{V}}$  は  $x$  に独立であるから  $y$  のみの関数であるということを用いる。固有値と固有関数は次のように求まる。

$$Y_{0m}(y) = -\frac{\sqrt{2}}{m\pi} \cos m\pi y \quad (29)$$

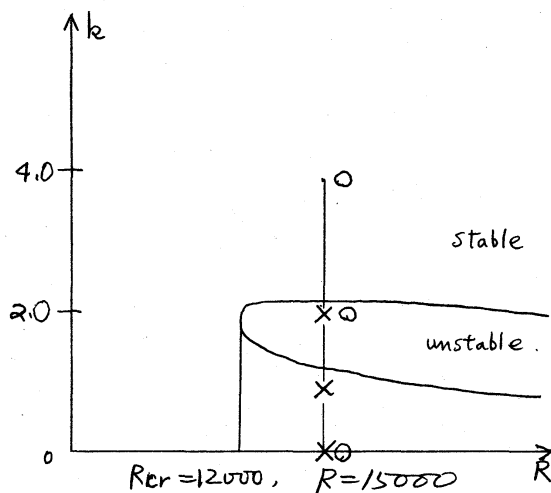
$$W_{0m} = \sqrt{2} C_{0m} = -\frac{m^2 \pi^2}{R} C \quad (30)$$

規格化は (14) から求められる。流形理論より、 $l=0$ 、即ち  $k=0$  の時にはすなわち減衰する mode だけであることを一致す

る。以上で固有値と固有函数が構成される。これが正しいかどうかは  $(k-R)$  平面での中立曲線を描いてみて、それが C.C, Lim の結果と一致するかどうかでチェックできる。Fig 1 にその中立曲線が描いてある。  $k$  も  $R$  も C.C, Lim の 2 倍にあって 113 がこれは規格化のちがいにによるもので、彼らの結果を参考のために書いておいた。計算された  $R_{cr}$  は 12000,  $k_{cr} = 2.0$  である。

#### §4. Mode の選択と数値計算の結果

最終的には、有限次元の方程式 (15) を解くのであるが、 $\tilde{u}$  が実数であることにより、 $a_{em} = a - e_m^*$  の関係がある。(  $-l$  に対しては計算する必要がない。) 従って  $a_{0m}$  は実数であり他のモードに対しては、複素数が対応する。ここで、各モードをどのようにしてとってくるかがこの方法の 1 つの鍵である



我々は計算機の都合上、 $l$  (流れ方向のモード) については  $-2$  から  $2$  まで、そして  $m$  (流れに垂直な方向のモード) については  $1, 2$  と  $2$  つとることとした。左図を参照しながら話をすすめてよ。



今回は、 $R = 15000$ ,  $\hat{h} = 2$  としたので、結局  $h = \varepsilon \hat{h} = 0, 2, 4$  と  $h$  について 3 つの点をとってくることになる。(図. OEP)  
 $\hat{h} = 1$  とすれば XEP の 3 点をとってくることになる。いずれの場合にしても、線形理論での不安定なモードが 1 つは入るようにはとってきた。さてこのようにとってきた各点には、偶関数に対する固有値が 2010, 奇関数に対する固有値が 2010 あることになる。だからこの中から  $m$  として 2 つとってこなければならぬのである。それぞれには、偶、奇それぞれ 1 つずつとってくることにした。残りは、偶、奇それぞれ 2010 の中からどの 1 つをとってくるかという問題である。そこで、偶、奇それぞれの場合について (Fig 2, Fig 3) 固有値を複素平面に図示した。Fig 2 において、 $h=0$  の時には虚軸上に並び、あとは  $h$  が大きくなると奇妙な分布のしかたをしていく。増少率が一定で、位相速度が異なる固有値が一直線に並ぶ部分と、その直線の両側が上下 2 本の分枝を持つ部分に分けられる。この分枝がおこる原因は今のところ不明である。Fig-3 についても同様な事が観察される。

さて、このような分布をもつ固有値に対して、どのような選択を行なうか問題であるが、最初、虚数部分の大きいものから順にとってくる方法をとった。物理的に言えばこの方が、より不安定なモードを選択することになり、より乱流を生じ

やすいであろうと考えたからである。ところが、結合定数を考えると、 $Im(C_{em})$  が最も大きいものより、やや小さくなるが、 $Re(C_{em})$  の小さいほうが、位相速度が小さいことにより、振動数が小さくなって、その結果結合定数が大きくなると考えられる。Fig-2 での例えば、 $k=40$  の分布のうち、右の分枝の一番上にあるものよりも、矢印で示してある左の分枝の一番上のモードを選択するということになる。

固有値の  $k$  依存性は最後の Fig-7 と Fig-8 に示してある。

以上のようなモードを選択して数値計算を行なった。

ただし時間に対しては次のような規格化した時間で計算してある。

$$\tau = \frac{v\tau}{a} \quad \tau: \text{物理時間}$$

Fig-4 を参照しながら話を進めていこう。Fig-4 は流れ方向のモード  $l$  とそれに垂直なモード  $m$  を象徴的に書いてあり、 $l$  については負のものは reality の条件により省略してある。また、 $m$  については  $m=1$  なら奇数モードが、 $m=2$  には偶数モードが入っている。そして、左側の列は、 $t=0$  での初期値の入れ方と (① FP)、線形理論での不安定なモード ( $Im(C_{em}) > 0$ ) が入っているモードを (△ FP) 示してある。右側の列は、ある時間が経過した時の各モードの大きさを示してあり (\* FP と  $\sim 10^{-2}$ )、何も FP がついてないのは、左右の各列とも  $0$  であることを示す。また  $\Delta \tau$  は数値計算のステ

ステップである。

すなわちの初期値の大きさは  $10^{-6}$  である。また  $a_{01}$  のモードは主流の変形を示す。

(i) の場合；左図のように初期値を入れてみても、結局は右図の三つのモードのみが生じてくる。そして  $t = 5000$  付近で  $a_{12}$  のモード、即ち  $\text{Im}(C_{em}) > 0$  をもつモードが発散した。 $a_{12}$ ,  $a_{21}$  のモードの振動数は、 $\text{Re}(C_{em})$  より計算されるものとはほぼ一致する。また、 $a_{01}$  は負で単調減少の逆流となっている。

(ii) の場合、初期値は  $a_{12}$  にしか入れてないが、結局(i)の場合と同じようになつた。そして  $t = 2400$  で  $a_{12}$  が発散した。Fig-5, Fig-6 は時間発展のグラフである。  $t = 2200 \sim 2300$  での様子であり、(i)の場合もこれと似たような様子を示す。またこの場合も  $\text{Re}(C_{em})$  から計算される周期とはほぼ一致した。

(iii) の場合、今度は  $\Delta t = 0.1$  とステップ幅が半分になり、 $\hat{\rho} = 1.0$  になっている。従って  $\text{Im}(C_{em}) > 0$  の不安定モードは  $a_{22}$  になっている。前の二つの場合にくらべて、生き残るモードの数が2つと減ってきている。右図の値は、 $t = 3000$  のときのもので、 $a_{22}$  がさらに大きくなる傾向をもっている。やはりこの場合も、 $\text{Re}(C_{em})$  から計算される振動周期と

ほぼ一致することがわかった。

(iv) の場合、この場合は、 $R=12000$  で  $\bar{\omega}=1.0$  としたために、中立曲線上の  $R_{cr}$  の付近の点をとってまたこととなる。これも (iii) の場合と同様に二つのモードが生き残っている。振動周期も線形理論から計算されるものとはほぼ一致している。そして、不安定モード ( $a_{22}$ ) は、中立曲線上にあることを反映して、終止初期値と同じ大きさであった。

## 5. 結論

以上の数値計算の結果より、Fig-4 の (i) と (ii) を比較すると、前述のモードのとり方の範囲内では初期値の各モードへの与え方には依存しないことがわかった。

また発散の原因は、数値計算上のものではなく、このモードの選択で作られた、方程式固有の性質であるように思われる。

(i), (ii) と (iii) と (iv) の二つのグループに分けて見ると、 $\bar{\omega}=2.0$  と  $\bar{\omega}=1.0$  では、前者の方が、生き残るモードの数も多く、さらに、 $a_{01}$  の大きさをくらべてみると、前者の方が小さくなっている。これは前者の方が、高い波数までとり入れているため、粘性の影響が出てきて、 $a_{01}$  のフィードバックが小さくなっているためであろうと考えられる。

全体的に110で、各モードの初期値を、 $10^{-6}$  という小さい数で始めたために、各モード間のカップリングがあるとはいうものの、発散の一手手前までは、本質的に線形なふるまいがあると結論できる。そして非線形性が真に支配的な領域になつてくるとすぐに発散するのは、このモードのとり方では不十分であることを示している。また、この結果において、非線形性を示すような特徴的な時間の大きさの変化が見られるというのも、このモードのとり方では、非線形の個性を十分に引き出してはなれず、また、一つの結合定数が担う非線形の個性が小さいともいえる。いずれにせよ、この方法で発散をおさえ、各モードが均等な大きさでおさまるようにするには、より高い波数をとり入れて、多くのモードを選択する必要があると考えられる。

## References.

- (1) Eckhaus, W. 1965. Studies in non-linear stability theory. New York; Springer.
- (2) Pekeris, C.L. & Shkoller. 1969. J.F.M. vol-39, part 3, p611-639.
- (3) George, W.B. & Hellums. 1972. J.F.M. vol-51, part 4, p687-704.
- (4) Lin, C.C. The theory of hydrodynamic stability. (1955) Cambridge Univ. Press.
- (5) 桑原真二. 数理解析研講究録 275 (1976/7) P99~P120.
- (6) 桑原真二. 数理解析研講究録 298 (1977/5) P124~P136.

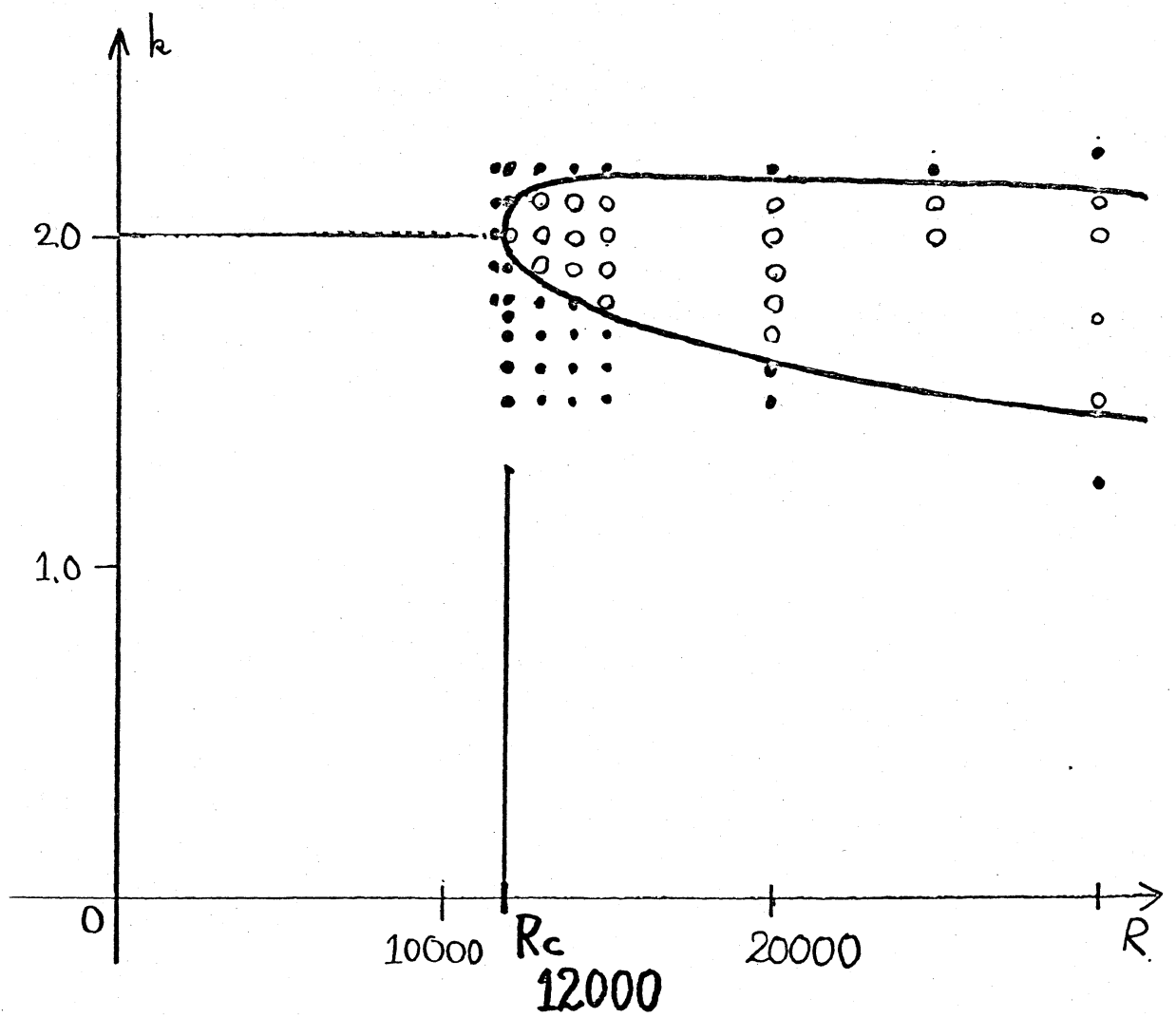


Fig-1

(c.f.  $R=11600$  . Stuart) (1960)  
 $k=2.04$

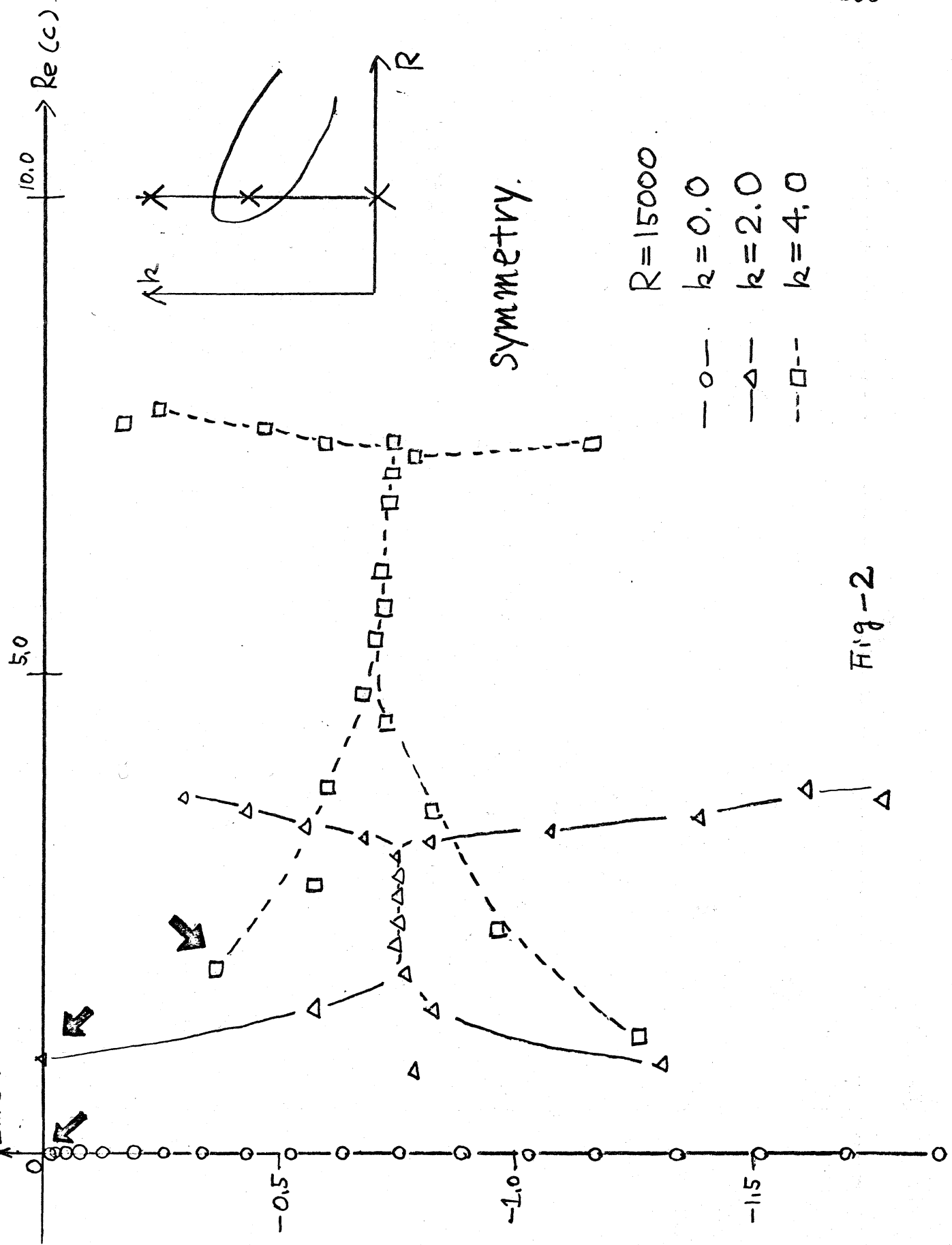


Fig-2

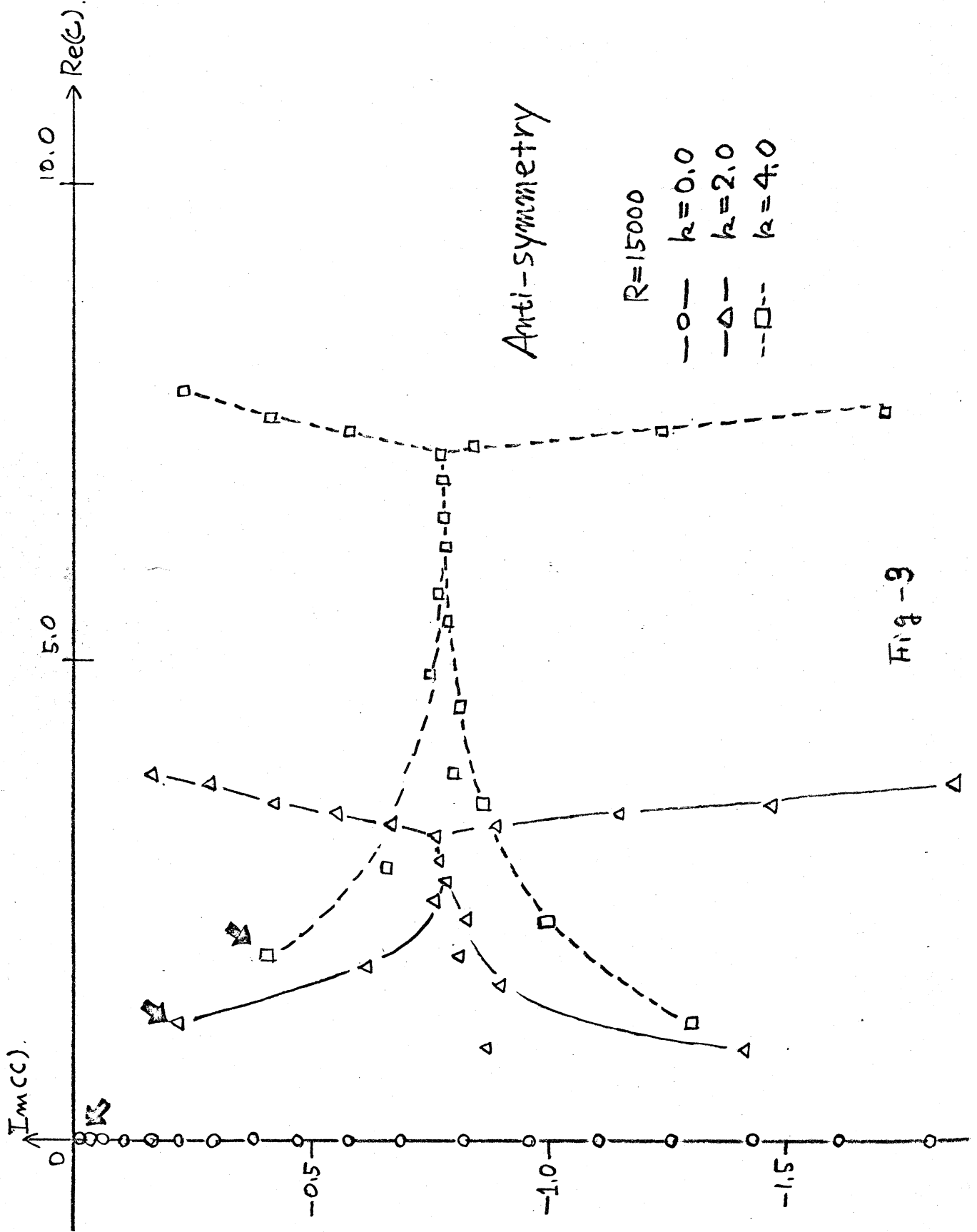


Fig-9



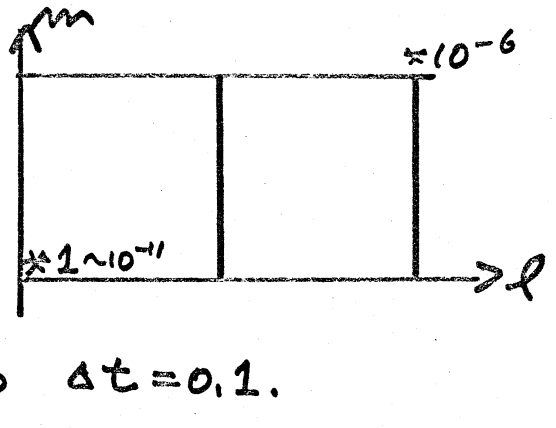
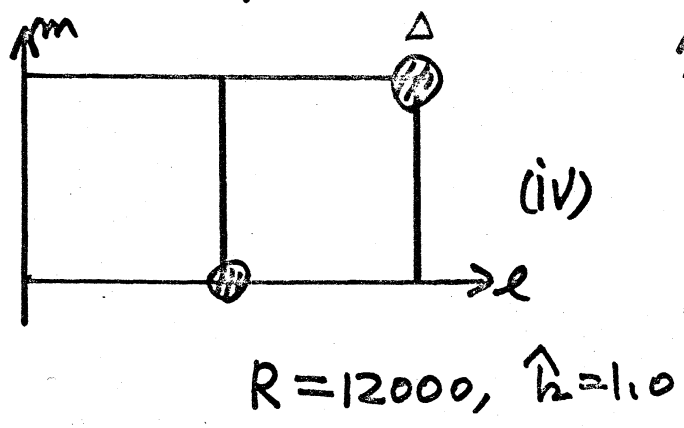
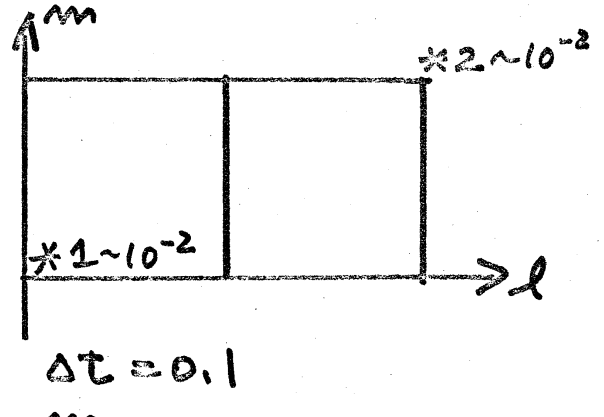
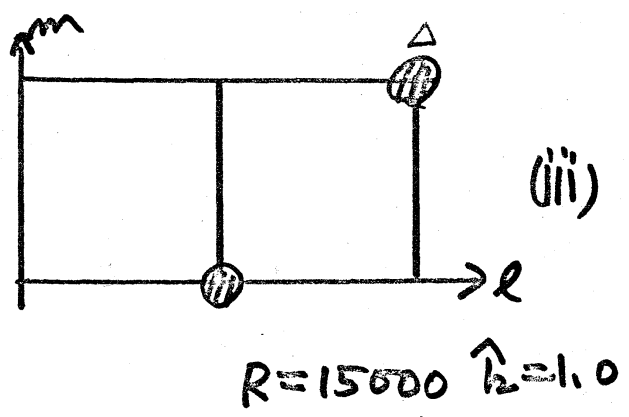
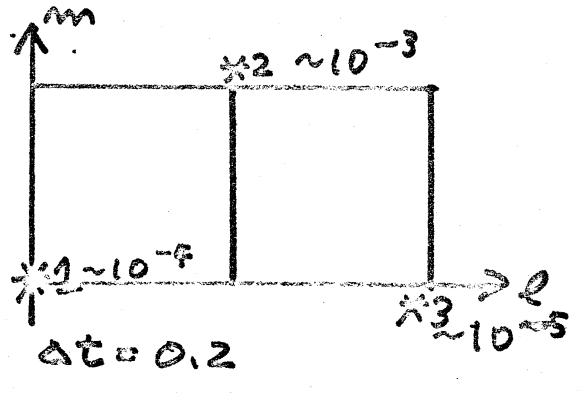
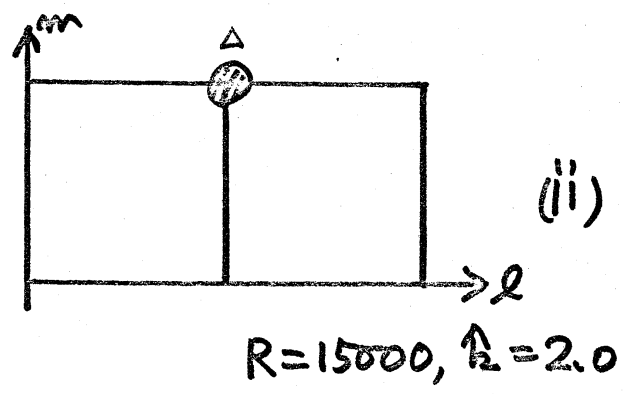
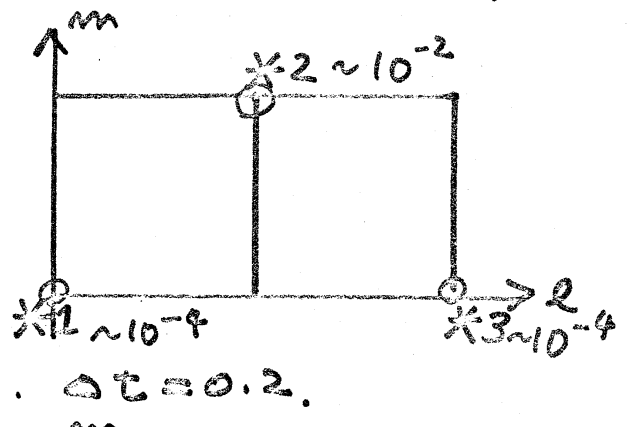
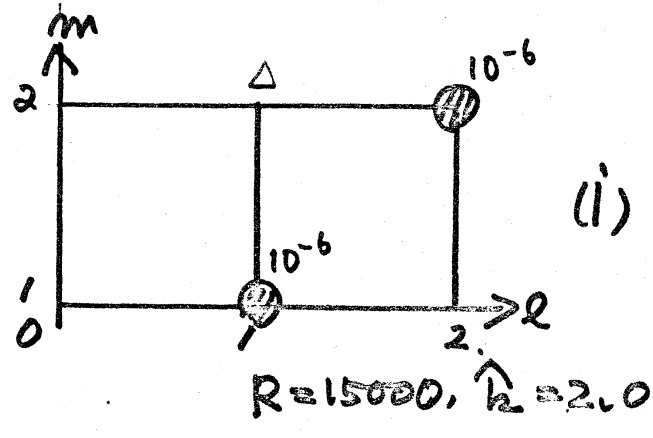


Fig - 4

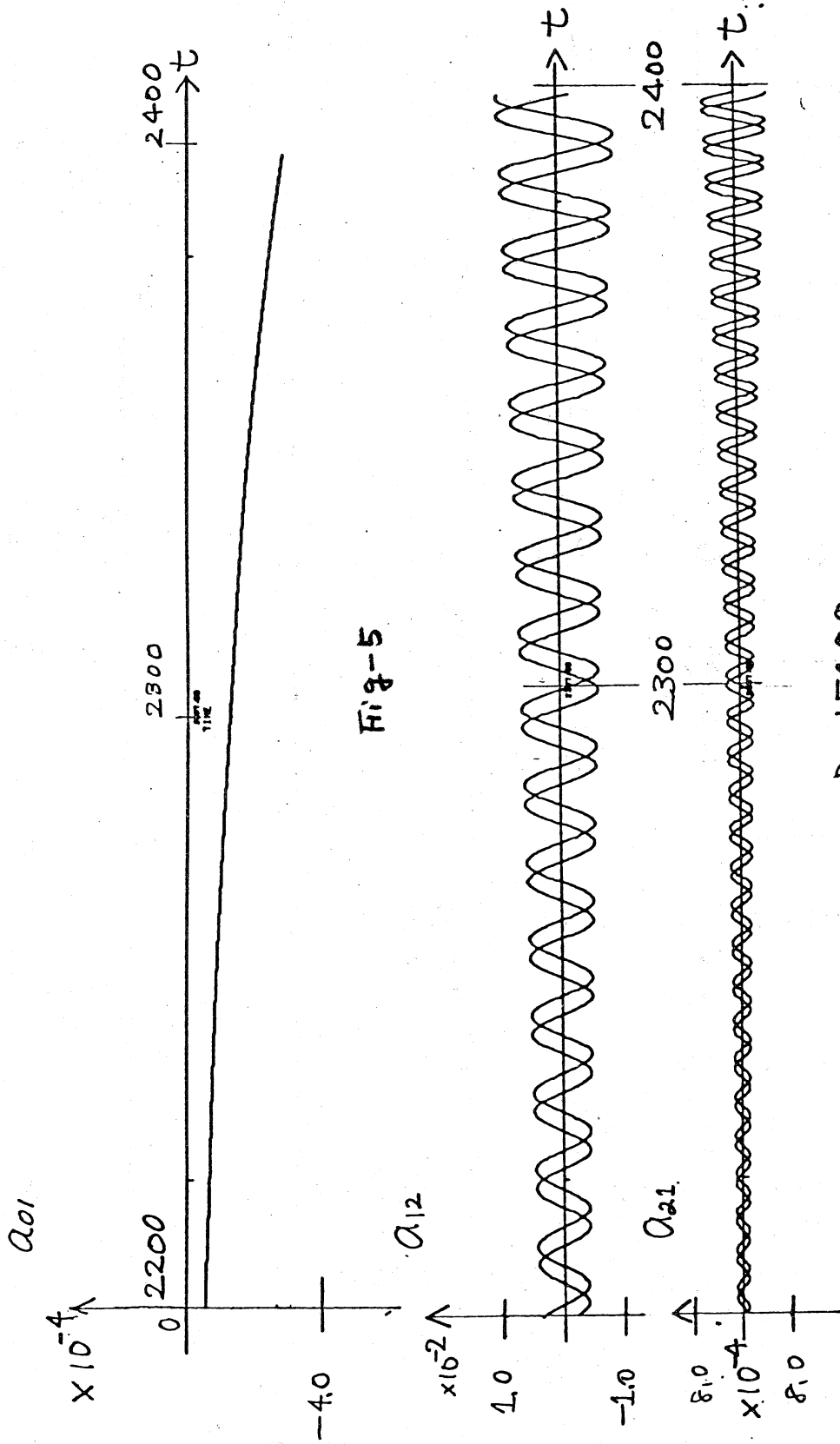
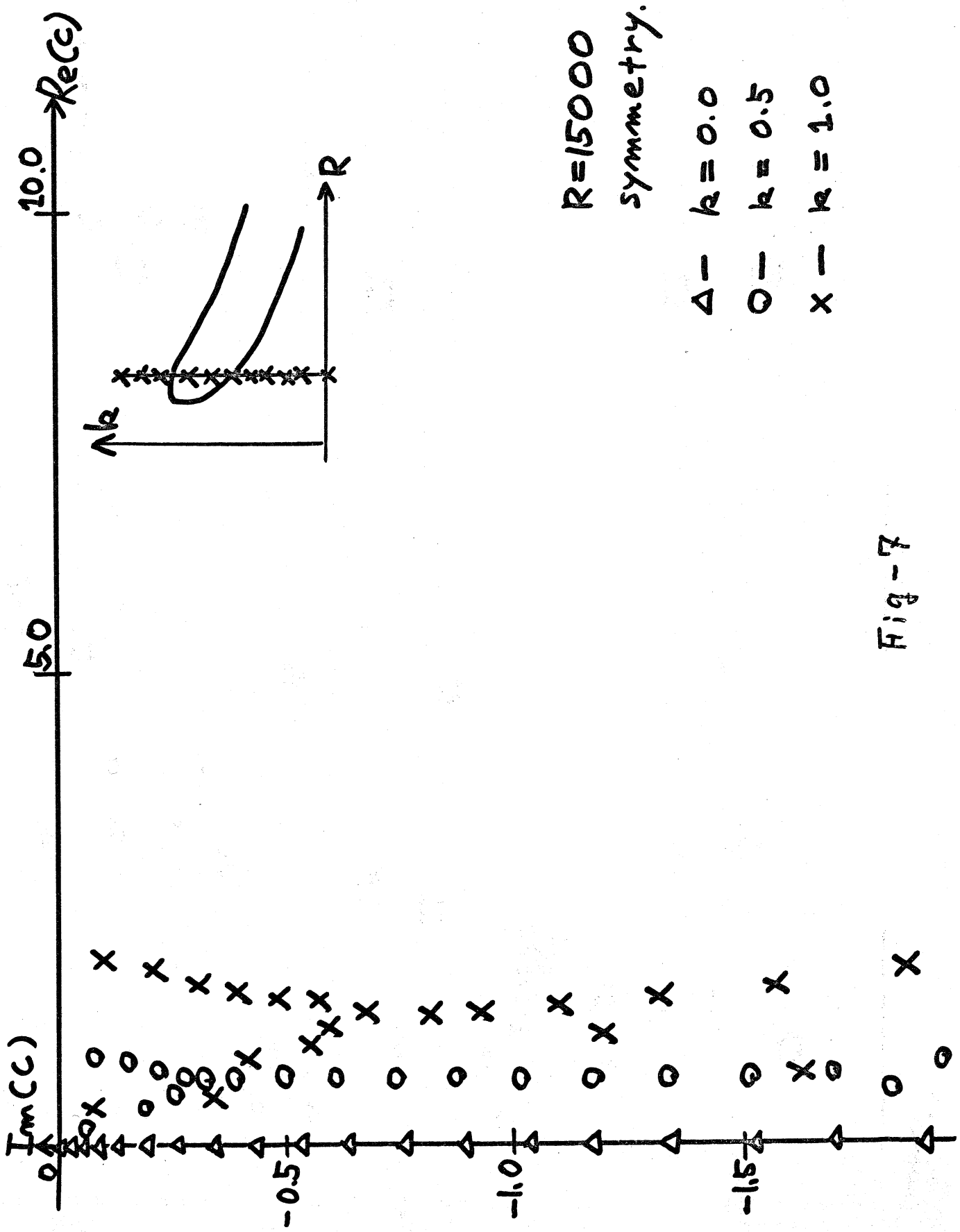


Fig-5

Fig-6

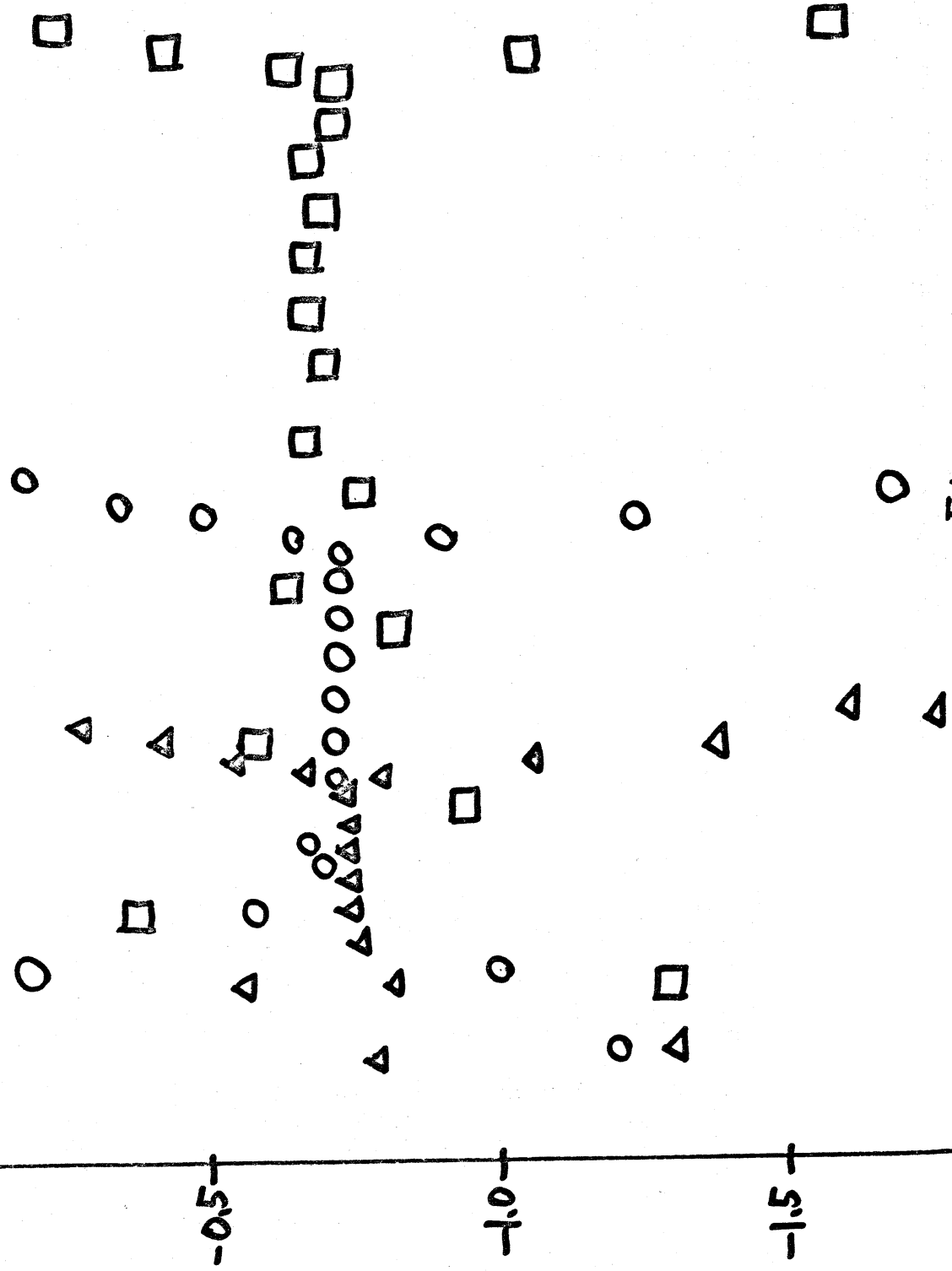


$R=15000$   
Symmetry.

- $\Delta$  -  $k=0.0$
- $\circ$  -  $k=0.5$
- $\times$  -  $k=1.0$

Fig-7

$\Delta \text{Im}(c)$   $\xrightarrow{10.0} \text{Re}(c)$



$R=15000$   
Symmetric  
 $\Delta - h=2.0$   
 $\circ - h=3.0$   
 $\square - h=5.0$

Fig-8