数理解析研究所講究録
第357巻 1979年 14-32

熱核に対する Hadamard 変分公式 と Laplacian の固有値

東大 理 小沢真

§ Introduction

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界領域. $\gamma = \partial\Omega \cdots C^\infty$ boundary

$\rho(x) \in C^\infty(\gamma)$ fix, $\nu_x \cdots \gamma \ni x$ での外向き単位法線vector

$$\gamma_\varepsilon = \{ x + \varepsilon \rho(x) \nu_x \ ; x \in \gamma \}$$

$\Omega_\varepsilon \cdots \gamma_\varepsilon$ が囲む有界領域 (ε : 十分小) とする。

Hadamard は [3] に於いて次の命題を示した。

$G_\varepsilon(x, y) \cdots$ the Green function of Laplacian with Dirichlet boundary condition at γ_ε

とする。

命題 1 [3] $x, y \in \Omega$ とする。

$$\delta G(x, y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} (G_\varepsilon(x, y) - G(x, y))$$

とおくと．

$$\delta G(x,y) = -\int_{\gamma} \frac{\partial G(x,z)}{\partial \nu_z}\frac{\partial G(y,z)}{\partial \nu_z}\rho(z)\,d\sigma_z$$

ここで $d\sigma_z$ は γ 上の面素．

注意．上の命題は $\rho \leq 0$ の場合 Hadamard が，ρ が一般の場合は Garabedian－Schiffer [2] が証明した。[2] の証明は，$\varphi_\varepsilon : \Omega \longrightarrow \Omega_\varepsilon$ なる diffeomorphism の family $\{\varphi_\varepsilon\}$ を構成し，φ_ε によって Ω_ε の Laplacian を Ω での変数係数の2階楕円型作用素に変換し，固定された領域 Ω での作用素の摂動論に話を reduce する所謂 interior variational method である。

Fujiwara－Ozawa [4] は，むしろ Hadamard の idea に忠実な方法で ρ が一般の場合も，証明が可能である事を Whitney's extension theorem を用いて示した。詳述が Ozawa [7] の中にあるから参照して下さい。

この Note では，Hadamard の変分公式を熱方程式の基本解の場合に示し，それを出発点として固有値問題について調べる。証明の大半は省略するが，Trace $Tr(t)$ の変分公式については詳しく述べる。

§ 熱方程式の基本解に対する変分公式

$U_\varepsilon(x,y,t)$ で $\Omega_\varepsilon \times (0,\infty)$ における熱方程式の基本解とする。境界条件は Dirichlet condition，または Neumann, Robin condition とする。

$x, y \in \Omega$, $t>0$ を fix し．

$$\delta U(x,y,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} \left(U_\varepsilon(x,y,t) - U(x,y,t) \right)$$

とおく。ここで $U_0(x,y,t)$ を $U(x,y,t)$ と書いた。

定理 1

(1) Dirichlet 条件の場合 [5], [7]

$$\delta U(x,y,t) = \int_0^t d\tau \int_\gamma \frac{\partial U(x,z,t-\tau)}{\partial \nu_z} \frac{\partial U(y,z,\tau)}{\partial \nu_z} \rho(z)\, d\sigma_z$$

(2) 第3種境界条件の場合 [6]

$$\left\{ \begin{array}{l} k \geq 0 \text{ として} \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial \nu_x^\varepsilon} + k\right) U_\varepsilon(x,y,t) = 0 \qquad x \in \gamma_\varepsilon \end{array} \right.$$

ここで ν_x^ε は $x \in \gamma_\varepsilon$ に於ける単位外向き法線 vector

そのとき

$$\delta U(x,y,t) = -\int_0^t d\tau \int_\gamma \langle \nabla_\gamma U(x,z,t-\tau), \nabla_\gamma U(y,z,\tau) \rangle \rho(z)\, d\sigma_z$$

$$- \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t d\tau \int_\gamma U(x,z,t-\tau)\, U(y,z,\tau)\, \rho(z)\, d\sigma_z$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_\gamma (k^2 - (n-1)k H_1(z))\, U(x,z,t-\tau)\, U(y,z,\tau)\, \rho(z)\, d\sigma_z$$

ここで. $H_1(z)$ は $z \in \gamma$ における γ の first mean curvature。

$a(x)$, $b(x) \in C^\infty(\gamma)$ としたとき

$$\langle \nabla_\gamma a(x), \nabla_\gamma b(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial a}{\partial x_i}(x) \frac{\partial b}{\partial x_i}(x)$$

ここで $x_1, \cdots, x_{n-1}$ は $T_x\gamma$ 上の coordinate

---

(2) の証明の rough sketch を述べよう。 [6] 参照

(1) の証明は [7] を参照の事.

Proof of (2)

$y \in \Omega$ を fix する. $\tilde{U}(z,y,\tau)$ を z, で変数にかんする extension で次の性質をみたすものとする。

$U(z,y,\tau)$ $z \in \Omega$, $\tau \in (0,\infty)$ の

○ $\lim_{\tau\to 0} \tilde{U}(z, y, \tau) = 0$ for $z \notin \overline{\Omega}$.

○ $\tilde{U}(z, y, \tau)$ は $\Omega \times (0, \infty)$ の C^∞ 函数

○ $\tilde{U}(z, y, \tau) = U(z, y, \tau)$ for $z \in \Omega$, $\tau \in (0, \infty)$

そのとき

$$
\begin{aligned}
& U_\varepsilon(x, y, t) - U(x, y, t) \\
&= -\int_0^t d\tau \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega_\varepsilon} U_\varepsilon(x, z, t-\tau)\, \tilde{U}(z, y, \tau)\, dz \right) \\
&= \int_0^t d\tau \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta_z U_\varepsilon(x, z, t-\tau) \cdot \tilde{U}(z, y, \tau)\, dz \\
&\quad - \int_0^t d\tau \int_{\Omega_\varepsilon} U_\varepsilon(x, z, t-\tau) \cdot \Delta_z \tilde{U}(z, y, \tau)\, dz \\
&\quad + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_z \right) \tilde{U}(z, y, t) \right| \leq C \operatorname{dist}(z, \gamma)^2
$$

を用いた。 C は t に無関係にとれる ∵ $y \in \Omega$ と γ とは距離が positive だから

Green の公式より

$U_\varepsilon(x, y, t) - U(x, y, t)$

$$= \int_0^t d\tau \int_{\gamma_\varepsilon} \left(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \nu_z^\varepsilon}(x,z,t-\tau) + k V_\varepsilon(x,z,t-\tau) \right) \tilde{U}(z,y,\tau)\, d\sigma_z^\varepsilon$$

$$- \int_0^t d\tau \int_{\gamma_\varepsilon} V_\varepsilon(x,z,t-\tau) \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \nu_z^\varepsilon}(z,y,\tau) + k \tilde{U}(z,y,\tau) \right) d\sigma_z^\varepsilon$$

$$+ O(\varepsilon^2)$$

$$= - \int_0^t d\tau \int_{\gamma_\varepsilon} V_\varepsilon(x,z,t-\tau) \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \nu_z^\varepsilon}(z,y,\tau) + k \tilde{U}(z,y,\tau) \right) d\sigma_z^\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

少しばかり、幾何学的な議論を行なおう。

今 $\gamma \ni z$ において exterior normal 方向が z_n 座標であり、z における γ の tangent hyperplane 上に $z_1, \cdots, z_{n-1}$ 座標を互いに直交するようにとり、これを $\mathbb{R}^n$ の流通座標とする。

そうすれば、

$$\frac{\partial}{\partial \nu_z^\varepsilon} = \frac{\partial z_1}{\partial \nu_z^\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \nu_z^\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z_{n-1}} + \frac{\partial z_n}{\partial \nu_z^\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z_n}$$

簡単な計算により

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_j}{\partial \nu_z^\varepsilon} = -\varepsilon \dfrac{\partial \rho}{\partial z_j} \mu_\varepsilon + O(\varepsilon^2) & (j = 1, \cdots, n-1) \\ \dfrac{\partial z_n}{\partial \nu_z^\varepsilon} = \mu_\varepsilon + O(\varepsilon^2) & \end{cases}$$

ここで $\qquad \mu_\varepsilon = \left(1 + \varepsilon^2 \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z_j} \right)^2 \right)^{-1/2}$。

したがって、今 $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ とすると

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_z^\varepsilon}\Big|_{z+\varepsilon\rho(z)\nu_z} = \mu_\varepsilon\Big\{\Big(-\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial z_1}\frac{\partial v}{\partial z_1}+\cdots+\frac{\partial\rho}{\partial z_{n-1}}\frac{\partial v}{\partial z_{n-1}}\Big)\Big|_{z+\varepsilon\rho(z)\nu_z}$$

$$+\frac{\partial v}{\partial z_n}\Big|_{z+\varepsilon\rho(z)\nu_z}\Big\}+O(\varepsilon^2)$$

さて

$$\frac{\partial v}{\partial z_n}\Big|_{z+\varepsilon\rho(z)\nu_z} = \frac{\partial v}{\partial z_n}\Big|_z + \varepsilon\rho(z)\frac{\partial^2 v}{\partial z_n^2}\Big|_z + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z_j}\Big|_{z+\varepsilon\rho(z)\nu_z} = \frac{\partial v}{\partial z_j}\Big|_z + O(\varepsilon) \qquad (j=1,\cdots,n-1)$$

故に、 $v\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\Big(\frac{\partial v}{\partial \nu_z^\varepsilon}\Big|_{z+\varepsilon\rho(z)\nu_z}-\frac{\partial v}{\partial \nu_z}\Big|_z\Big)$$

$$=-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\rho}{\partial z_j}\frac{\partial v}{\partial z_j}\Big|_z+\rho(z)\frac{\partial^2 v}{\partial z_n^2}\Big|_z$$

だから

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \nu_z^\varepsilon}(z,y,\tau)+k\tilde{U}(z,y,\tau)\Big|_{z+\varepsilon\rho(z)\nu_z}$$

$$=\frac{\partial U}{\partial \nu_z}(z,y,\tau)+kU(z,y,\tau)\Big|_z$$

$$+\varepsilon\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial \nu_z^2}(z,y,\tau)+k\frac{\partial U}{\partial \nu_z}(z,y,\tau)\Big)\rho(z)$$

$$+\varepsilon\Big(-\langle\nabla_\gamma\rho(z),\nabla_\gamma U(z,y,\tau)\rangle\Big)+O(\varepsilon^2)$$

故に、

$$\delta U(x,y,t) = -\int_0^t d\tau \int_\gamma \frac{\partial^2 U}{\partial \nu_z^2}(z,y,\tau)\, U(x,z,t-\tau) f(z)\, d\sigma_z$$
$$+ k^2 \int_0^t d\tau \int_\gamma U(x,z,t-\tau)\, U(z,y,\tau) f(z)\, d\sigma_z$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_\gamma \langle \nabla_\gamma f(z), \nabla_\gamma U(z,y,\tau) \rangle\, d\sigma_z$$

もちろん精密な Schander estimate を用いての事だが！ [ ] 参照

ところで γ 上では $U(x,z,\tau)$ は次の方程式をみたしている。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \nu_z^2} + \nabla_\gamma^2 + (n-1) H_1(z) \frac{\partial}{\partial \nu_z} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) U(x,z,\tau) = 0$$

ここで ∇^2 は Tangent hyperplane 上の Laplacian である。

故に、

(A)
$$\delta U(x,y,t) = -\int_0^t d\tau \int_\gamma \langle \nabla_\gamma U(x,z,t-\tau), \nabla_\gamma U(z,y,\tau) \rangle f(z)\, d\sigma_z$$
$$- \int_0^t d\tau \int_\gamma U(x,z,t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} U(z,y,\tau) f(z)\, d\sigma_z$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_\gamma \left(k^2 - k(n-1) H_1(z) \right) U(x,z,t-\tau)\, U(z,y,\tau)\, f(z)\, d\sigma_z$$

さて、$x, y \in \Omega$ 故

$$0 = \int_0^t d\tau \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \int_\gamma U(x,z,t-\tau)\, U(z,y,\tau) f(z)\, d\sigma_z \right)$$

よって

$$-\int_0^t d\tau\left(\int_\gamma U(x,z,t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}U(z,y,\tau)\rho(z)d\sigma_z\right)$$

(B)

$$=\int_0^t d\tau\left(\int_\gamma \frac{\partial}{\partial\tau}U(x,z,t-\tau)U(z,y,\tau)\rho(z)d\sigma_z\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t d\tau\left(\int_\gamma U(x,z,t-\tau)U(z,y,\tau)\rho(z)d\sigma_z\right)$$

(A), (B) より, 「Th 1 の (2) を得る。　　　(証明おわり)

§ Trace Tr(t) に対する変分公式

$$Tr(t;\varepsilon)=\int_{\Omega_\varepsilon}U_\varepsilon(x,x,t)dx$$

とおく。その時,

$$\delta Tr(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}(Tr(t;\varepsilon)-Tr(t;0))$$ とすると.

定理 2

(1)　Dirichlet 条件の場合　[5], [7]

$$\delta Tr(t)=\int_\Omega \delta U(x,x,t)dx$$

(2)　第3種境界条件 (定理 1 参照) の場合　[6]

$$\delta Tr(t)=\widetilde{\int_\Omega}\delta U(x,x,t)\,dx+\int_\gamma U(x,x,t)\rho(x)d\sigma_x$$

ここで,

$$\tilde{\int_\Omega} \delta U(x,x,t)\,dx$$

は $(0,\infty)$ における t 変数の distribution であって

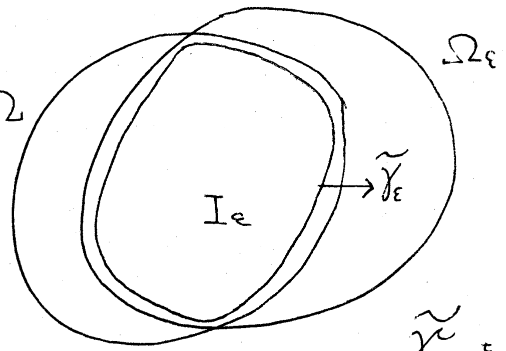
$\varphi(t)\in C_0^\infty(0,\infty)$ に対して

$$\int_\Omega dx\left(\int_0^\infty \delta U(x,x,t)\varphi(t)\,dt\right)$$

を対応させる汎函数として define される。

証明)) (1) の場合は [7] を参照の事.

delicate な (2) の場合について考える。



$\Omega\cap\Omega_\varepsilon$ の境界 $\partial(\Omega\cap\Omega_\varepsilon)$ から ε^h order の距離に C^∞ hyperplane $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ をとる。ここで $1<h$ は後で適当に選ぶ事とする。ε^h order とは, 距離が ε^h と $2\varepsilon^h$ の間にある事としよう。もちろん $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ は $\partial(\Omega\cap\Omega_\varepsilon)$ と homeo (連結成分の個数も同じ) とする。

$\tilde{\gamma}_\varepsilon$ の囲む有界領域を I_ε としよう。

$$\mathrm{Tr}(t;\varepsilon)=\int_{\Omega_\varepsilon} U_\varepsilon(x,x,t)\,dx$$ 故

(C) $\varepsilon^{-1}(\mathrm{Tr}(t;\varepsilon)-\mathrm{Tr}(t;0))$

$$= \varepsilon^{-1}\left\{\int_{\Omega_\varepsilon\setminus\Omega} U_\varepsilon(x,x,t)\,dx-\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} U(x,x,t)\,dx\right\}$$

$$+\varepsilon^{-1}\left\{\int_{(\Omega_\varepsilon\cap\Omega)\setminus I_\varepsilon} U_\varepsilon(x,x,t)\,dx-\int_{(\Omega_\varepsilon\cap\Omega)\setminus I_\varepsilon} U(x,x,t)\,dx\right\}$$

$$+\varepsilon^{-1}\int_{I_\varepsilon}(U_\varepsilon(x,x,t)-U(x,x,t))\,dx$$

さて，$\varepsilon\to+0$ のとき．第一項は

$$\int_\gamma U(x,x,t)\rho(x)\,d\sigma_x$$

に収束する．第二項は 0 に収束する。

問題は第三項であるが，これの処理は大変難しい。

今 $x\in I_\varepsilon$ とすると，$x\in\Omega$ 故

$$U_\varepsilon(x,x,t)-U(x,x,t)=\varepsilon\,\delta U_{\varepsilon\theta(\varepsilon,x,t)}(x,x,t)$$

なる如き $0<\theta(\varepsilon,x,t)<1$ が存在する。

今 $\varphi(t)\in C_0^\infty(0,\infty)$ をとってきて1つ fix しよう。

$\langle\varepsilon^{-1}(\mathrm{Tr}(t;\varepsilon)-\mathrm{Tr}(t;0)),\ \varphi(t)\rangle$ … $\varphi(t)$ を Test function としたときの値．

$$= \sum_{k=1}^{3} \langle (C) \text{ 式右辺第 } k \text{ 項}, \varphi(t) \rangle$$

となるが、第1項, 2項は $\varepsilon \to 0$ のときの処理がすでに終わっているので. $\langle$第3項, $\varphi(t)\rangle$ のみを問題にしよう.

$$\left\langle \varepsilon^{-1} \int_{I_\varepsilon} (U_\varepsilon(x,x,t) - U(x,x,t))\,dx \,,\, \varphi(t) \right\rangle$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{I_\varepsilon} dx \left\langle \varepsilon^{-1}(U_\varepsilon(x,x,t) - U(x,x,t)) \,,\, \varphi(t) \right\rangle$$

$$= \int_{I_\varepsilon} dx \left\langle \delta U_{\varepsilon\theta(\varepsilon,x,t)}(x,x,t) \,,\, \varphi(t) \right\rangle$$

さて, $\delta U_{\varepsilon\theta(\varepsilon,x,t)}$ は次のような表示式をもつ.

$$\delta U_{\varepsilon\theta(\varepsilon,x,t)}$$

$$= -\int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon\theta}} \left\langle \nabla_{\gamma_{\varepsilon\theta}} U_{\varepsilon\theta}(x,z,t-\tau) \,,\, \nabla_{\gamma_{\varepsilon\theta}} U_{\varepsilon\theta}(x,z,\tau) \right\rangle \rho_{\varepsilon\theta}(z)\,d\sigma_z^{\varepsilon\theta}$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon\theta}} U_{\varepsilon\theta}(x,z,t-\tau)\, U_{\varepsilon\theta}(x,z,\tau)\, \rho_{\varepsilon\theta}(z)\,d\sigma_z^{\varepsilon\theta}$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon\theta}} U_{\varepsilon\theta}(x,z,t-\tau)\, U_{\varepsilon\theta}(x,z,\tau) \left(k^2 - (n-1)kH_1(z) \right) \rho_{\varepsilon\theta}(z)\,d\sigma_z^{\varepsilon\theta}$$

ここで, $\nabla_{\gamma_{\varepsilon\theta}}$ は $\gamma_{\varepsilon\theta}$ 上の tangential gradient operator
$d\sigma_z^{\varepsilon\theta}$ は $\gamma_{\varepsilon\theta}$ 上の面素.

$\rho_{\varepsilon\theta}(z)$ は，以下の如く define される。

$\Omega \longrightarrow \Omega_\varepsilon$ なる領域摂動は $\Omega_{\varepsilon\theta} \longrightarrow \Omega_{\varepsilon\theta+\tilde{\varepsilon}}$

なる領域摂動を induce していると考えられる。

$\gamma_{\varepsilon\theta+\tilde{\varepsilon}}$ の全体は $y \in \gamma_{\varepsilon\theta}$ の normal vector $\nu_y^{\varepsilon\theta}$

によって $\{ y + \tilde{\varepsilon}\nu_y^{\varepsilon\theta} \cdot \rho_{\varepsilon\theta}(y;\tilde{\varepsilon}) \ ; y \in \gamma_{\varepsilon\theta} \}$

と represent されるが，そこで $\lim_{\tilde{\varepsilon}\to 0} \rho_{\varepsilon\theta}(y;\tilde{\varepsilon}) \equiv \rho_{\varepsilon\theta}(y)$。

すると，

$$\langle \delta U_{\varepsilon\theta}(x,x,t),\ \varphi(t) \rangle$$

(D)
$$= \left\langle -\int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon\theta}} \langle \nabla_{\gamma_{\varepsilon\theta}} U_{\varepsilon\theta}(x,z,t-\tau), \nabla_{\gamma_{\varepsilon\theta}} U_{\varepsilon\theta}(x,z,\tau) \rangle \rho_{\varepsilon\theta}(z) d\sigma_z^{\varepsilon\theta} \right.$$

$$+ \left\langle \int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon\theta}} U_{\varepsilon\theta}(x,z,t-\tau) U_{\varepsilon\theta}(x,z,\tau) \rho_{\varepsilon\theta}(z) d\sigma_z^{\varepsilon},\ \varphi'(t) \right\rangle$$

$$+ \langle \quad \cdots \quad ,\ \varphi(t) \rangle$$

ここで上式の右辺第二項に於いて $\frac{\partial}{\partial t}$ が test function $\varphi(t)$ の微分に移項している事に注意する。このような形にしないと，estimate が非常にやりにくい。何故ならば

$\Theta(\varepsilon, z, \tau)$ は t によって可微分かどうかわからないから。

さて $\chi_\varepsilon(x)$ を I_ε の characteristic function としよう。

$$Q^{\varphi}(x) \equiv \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \langle \delta U_{\varepsilon\theta(\varepsilon,x,t)}(x,x,t), \varphi(t) \rangle \chi_{\varepsilon}(x)$$

とおく。

Claim. $Q^{\varphi}(x) < +\infty$, $\int_{\Omega} Q^{\varphi}(x)dx < +\infty$

もし．上の claim が証明されれば．Lebesgue の dominated convergence theorem により

$$\int_{I_\varepsilon} dx \langle \delta U_{\varepsilon\theta}(x,x,t), \varphi(t) \rangle$$

$$\longrightarrow \int_{\Omega} dx \langle \delta U(x,x,t), \varphi(t) \rangle$$

故に

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}(\mathrm{Tr}(t;\varepsilon) - \mathrm{Tr}(t;0))$$

$$= \tilde{\int_{\Omega}} \delta U(x,x,t)dx + \int_{\gamma} U(x,x,t)\rho(x)d\sigma_x$$

となり，Th 2，(2) の証明がおわる。そこで．上記 Claim を証明しよう。

Claim の証明 ; $z \in \Omega_\varepsilon$ から γ への垂線の足を $d_\varepsilon(x)$ とする。そのとき，任意の $x \in I_\varepsilon$，$z \in \gamma_{\varepsilon\theta}$ に対して

$$|x - z| \geq \tilde{C} |x - d_\varepsilon(z)|^{k}$$

なる如き．

εに無関係な定数 $\tilde{C}$ が存在する。（図を書いて考えて下さい）。

以下の証明に於いては、熱方程式の基本解に対する pointwise estimate（with parameter ε）を用いる。それらは、よく知られている事なので、一々補題として述べない。

(D)式右辺 第1項のみを評価する。第2項の評価は部分積分のおかげで、第1項より易しくなってしまった。第3項も易しい。

$$\left| \left\langle -\int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon\theta}} \langle \nabla_{\gamma_{\varepsilon\theta}} U_{\varepsilon\theta}(x, z, t-\tau), \nabla_{\gamma_{\varepsilon\theta}} U_{\varepsilon\theta}(x, z, \tau) \rangle \rho_{\varepsilon\theta}(z) \, d\sigma_z^{\varepsilon\theta},\ \varphi(t) \right\rangle \right|$$

$$\leq M \sup_{t \in \mathrm{supp}\,\varphi} \int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon\theta}} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \tau^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x-z|^2}{4(t-\tau)}} e^{-\frac{|x-z|^2}{\tau}} d\sigma_z^{\varepsilon\theta}$$

さて、$e^{-\frac{|x-z|^2}{4(t-\tau)}} \leq e^{-\tilde{C}^2 \frac{|x-d_\varepsilon(z)|^{2k}}{4(t-\tau)}}$

などに注意して考える。一方、$\gamma_{\varepsilon\theta} \xrightarrow{\sim} \gamma$ diffeo だから

$$\int_0^t d\tau \int_{\gamma_{\varepsilon\theta}} \frac{e^{-\tilde{C}^2 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-\tau}+\frac{1}{\tau}\right)|x-d_\varepsilon(z)|^{2k}}}{\{(t-\tau)\tau\}^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}} d\sigma_z^{\varepsilon\theta}$$

$$\leq K\int_0^t d\tau \int_\gamma \frac{e^{-\tilde{c}^2\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{t-\tau}\right)|x-z|^{2h}}}{\{(t-\tau)\tau\}^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}} d\sigma_z$$

よって $Q^{\varphi}(x) < +\infty$ が証明できた。

$$\int_\Omega Q^{\varphi}(x)dx < \int_{\mathbb{R}^n} Q^{\varphi}(x)dx$$

$$\leq \tilde{M}\int_\gamma d\sigma_z \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\{(t-\tau)\tau\}^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}} e^{-\left(\frac{1}{t-\tau}+\frac{1}{\tau}\right)\frac{\tilde{c}^2}{4}|x-z|^{2h}} dx$$

ここで $1<h<\frac{n}{n-1}$ のとき右辺は有界。

だから $h=\frac{n-\frac{1}{2}}{n-1}$ とおけば良い。　　　　（証明おわり）

§ 固有値問題に対する応用

今、領域 Ω に於いて考える

$$0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots$$

を Laplacian with Dirichlet (Neumann or Robin) condition に対する固有値とする。重複度に応じて並べておく。

$\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ で $L^2(\Omega)$ の完全正規直交系とし、$\varphi_j(x)$ は λ_j の固有空間に属する固有函数とする。

$$U(x,y,t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t}\varphi_j(x)\varphi_j(y)$$

であった。

これと．Th 1, 2 により．

Th 3

(1)　Dirichlet 条件の場合　[5], [7]

$$\delta \mathrm{Tr}(t) = t \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \nu_z}(z)\right)^2 \rho(z)\, d\sigma_z$$

(2)　第3種境界条件の場合　[6]

$$\delta \mathrm{Tr}(t) = t \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t} \int_{\gamma} Q_j(z)\, \rho(z)\, d\sigma_z$$

ここで．

$$Q_j(z) = -|\nabla_\gamma \varphi_j(z)|^2 + (k^2 - (n-1)kH_1(z) - \lambda_j)\, \varphi_j(z)^2 .$$

ここに．

$$|\nabla_\gamma \varphi_j(z)|^2 = \langle \nabla_\gamma \varphi_j(z), \nabla_\gamma \varphi_j(z) \rangle .$$

次の結果は良く知られている。

命題　Courant-Hilbert　[1]

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域とし，$\lambda_j(\Omega)$ で $-\Delta$ の j 番目の固有値 with Dirichlet condition とする。そのとき任意の Ω の subdomain ω に対して

$$\lambda_j(\Omega) \le \lambda_j(\omega)$$

上の命題は $\triangle$ with Dirichlet condition に対する固有値が領域に単調に depend している事をしめしている。

Uchiyama [8] は、Neumann 条件の場合 固有値は領域に非単調に依存する事を示した。我々の Th 3 の (2) に於いても $Q_j(2)$ の 定符号性はわからない。これが固有値の領域に対する non monotonous dependence の本質的理由であるように思われる。

Th 3 の証明は略すが、定理2の(2)の事情をよく考慮して計算する必要がある。

§ もはや時間がない。

研究集会に於いては、さらに $\delta\,\mathrm{Tr}(t)$ の $t \downarrow 0$ での漸近展開と hyperplane の geometry を結びつけ、local geometric invariant の意義を強調した。これらのテーマは、Ozawa [5]、[7] にすでに書かれてあるので、興味のある方は参照して下さい。

おしまい。

参考文献

[1] Courant - Hilbert   Methods of mathematical physics, I
Interscience, New York, 1953

[2] Garabedian - Schiffer   J. Anal. Math., 2, 281-368 (1952-53)

[3] Hadamard   Oeuvre, C.N.R.S., 2, 515-631 (1968)

[4] Fujiwara - Ozawa   Proc Japan. Acad., 54 A No 8
215-220 (1978)

[5] Ozawa   Proc. Japan. Acad., 54 A, 322-325 (1978)

[6] ——   Perturbation of domains ... II, to appear in Proc Jap. Acad

[7] ——   東京大学修士論文 (1979) 129p

[8] Uchiyama   J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 24, 281-299
(1977)