数理解析研究所講究録
第357巻 1979年 97-124

定数係数の方程式に対するC^∞-Goursat問題について

京大 理(研修員) 長谷川幸子

§1. 解析関数のクラスにおけるGoursat問題は、今までに何人かの先人によって、かなり詳しく研究されているが、C^∞クラスにおけるこの種の問題は(筆者の知るかぎり)一般的には今まで殆んど取り扱う方法がなかった。この問題を解析する手法を提供し、問題の本質(特にCauchy問題との相違)を明らかにしたいと思う。ここでは定数係数で、初期面が一重特性面である場合についての考察をする。次の定係数偏微分作用素を考えよう。

$$(1.1)\quad P(\partial_t,\partial_x,\partial_y)=\sum_{i+j+|\alpha|\le m} a_{ij\alpha}\,\partial_t^i\partial_x^j\partial_y^\alpha$$

ここで$\partial_t=\frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x=\frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y=\frac{\partial}{\partial y}$, $t\in R^1_+$, $x\in R^1$, $y\in R^\ell$.
最高階(m階)の項をP_m, $m-1$階の項をP_{m-1} 残りをR_{m-2}とすれば、Pは次のようにあらわせる。

$$(1.2)\quad P=P_m+P_{m-1}+R_{m-2}.$$

ここでP_mに対して次の仮定をおこう。

仮定1　$t=0$ は一重特性面である。即ち

$$a_{m,0,0}=0 \quad \text{かつ} \quad |a_{m-1,1,0}|+\sum_{|\alpha|=1}|a_{m-1,0,\alpha}|\neq 0.$$

仮定2　$\partial_t^{m-1}\partial_x$ の係数; $a_{m-1,1,0}\neq 0$.

上の2つの仮定の下で、次の問題(Goursat問題)を $\mathcal{E}_{t,x,y}$ の範ちゅうで考える。

$$(1.3)\quad P(\partial_t,\partial_x,\partial_y)u(t,x,y)=f(t,x,y)\in\mathcal{E}_{t,x,y}\ (t\geq 0),$$

$$(1.4)\quad \begin{cases}\partial_t^i u(0,x,y)=u_i(x,y)\in\mathcal{E}_{x,y}, & 0\leq i\leq m-2\\ u(t,0,y)=\varphi(t,y)\in\mathcal{E}_{t,y} & (t\geq 0).\end{cases}$$

ここで $\{u_i(x,y)\}_{0\leq i\leq m-2}$ と $\varphi(t,y)$ との間には、次の関係式(いわゆる compatibility 条件)がなりたっているとする。

$$(1.5)\quad \partial_t^i\varphi(0,y)=u_i(0,y) \qquad 0\leq i\leq m-2.$$

定義　Goursat問題が $\mathcal{E}$-wellposed であるとは、任意の $\{u_i\}_{0\leq i\leq m-2}$, $\varphi(t,y)$, $f(t,x,y)$ に対して、(1.3), (1.4)を満足する $u(t,x,y)$ が $\mathcal{E}_{t,x,y}$ の中に一意的に存在することである。

Banachの closed graph theorem により、$\mathcal{E}$-wellposed であれば、線形写像 $(\{u_i\},\varphi,f)\longrightarrow u$ は、$\prod^{m-2}\mathcal{E}_{x,y}\times\mathcal{E}_{t,y}\times\mathcal{E}_{t,x,y}$ から $\mathcal{E}_{t,x,y}$ の中への連続写像になる。

さらに次の仮定をおく(§6参照)。

仮定3　$P_m(\tau,\xi,\eta)$ と $P_{m-1}(\tau,\xi,\eta)$ の係数は実数である。

我々の得た結果は次のようなものである。

(1.6) $P_m(\tau, \xi, \eta) = b_1(\xi, \eta)\tau^{m-1} + b_2(\xi, \eta)\tau^{m-2} + \cdots + b_m(\xi, \eta)$

とおこう。$b_1(\xi, \eta) \neq 0$ のとき，P_m は τ の $m-1$ 次の多項式である。このとき，(1.1) の特性方程式 $P_m(\tau, \xi, \eta) = 0$ の根を (1.1) の特性根といい，$\tau_i(\xi, \eta)$ $1 \leq i \leq m-1$ であらわそう。

定理1　Goursat 問題 (1.3)，(1.4) が $\mathcal{E}$-wellposed であるならば，$(\xi, \eta) \in R^1 \times R^\ell$ に対して，特性根 $\tau_i(\xi, \eta)$ は，全て実数である。

この定理は，双曲型方程式の Cauchy 問題に対する結果と類似である。しかし次の定理は Goursat 問題固有の性質であると思われる。

定理2　Goursat 問題が $\mathcal{E}$-wellposed であるならば，$P_m(\tau, \xi, \eta)$ は $b_1(\xi, \eta)$ で割り切れなければならない。即ち

(1.7) $P_m(\tau, \xi, \eta) = b_1(\xi, \eta)\mathring{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta)$,

ここで $\mathring{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta)$ は $m-1$ 次同次多項式である。

次に低階の部分 P_{m-1} に対する制約をのべる。仮定 1, 2, 3 の他にさらに次の仮定をおこう。

仮定4　$\mathring{Q}_{m-1}(\partial_t, \partial_x, \partial_y)$ は t 方向に強双曲型である。即ち，$\mathring{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta) = 0$ の根 $\tau = \tau_i(\xi, \eta)$ は，$(\xi, \eta) \in R^1 \times R^\ell$ に対して，全て実でかつ相異なる。

定理3　仮定1～4の下で，Goursat 問題が $\mathcal{E}$-wellposed であるならば，P_{m-1} は次の形でなければならない。

(1.8) $P_{m-1}(\tau,\xi,\eta)=c\overset{\circ}{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)+b_1(\xi,\eta)Q_{m-2}(\tau,\xi,\eta)$,

ここで c は定数．Q_{m-1} は，(τ,ξ,η) の $m-2$ 次同次多項式．

この定理は，双曲型方程式の Cauchy 問題の Levi 条件に類似のものである。Cauchy 問題では，特性根が重根になってはじめて Levi 条件が登場したが，Goursat 問題では，特性根が単根であっても，このような条件がでてくるところは，私には興味深く思われる。十分条件については次の結果を得た。

定理4　仮定1〜4の下で，P_m, P_{m-1} が上の3つの定理の条件をみたしているならば，即ち

$$P=b_1(\xi,\eta)\overset{\circ}{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)+c\overset{\circ}{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)+b_1(\xi,\eta)Q_{m-2}(\tau,\xi,\eta)+R_{m-2}(\tau,\xi,\eta)$$

ならば，Goursat 問題は $\mathcal{E}$-wellposed である。

注意1　方程式 (1.3) は一般性を失うことなく次の形であると考えてよい。

(1.3)′ $$\partial_t^{m-1}\partial_x u+\sum_{\substack{i+j+|\alpha|\le m\\ i\le m-2}} a_{ij\alpha}\partial_t^i\partial_x^j\partial_y^\alpha u=f.$$

実際，P_m の中で ∂_t^{m-1} なる項を含むものを $(a_0\partial_x+\sum_{j=1}^{l}a_j\partial_{y_j})\partial_t^{m-1}$ であらわして，独立変数変換（仮定2, 3より可能である）

$$x'=\frac{1}{a_0}x,\quad y'_j=y_j-\frac{a_j}{a_0}x\qquad j=1,2,\cdots l$$

を行なえば，

$$\partial_x=\frac{1}{a_0}\partial_{x'}-\frac{1}{a_0}\sum a_j\partial_{y'_j},\quad \partial_{y_j}=\partial_{y'_j}$$

であるから，$a_0\partial_x+\sum a_j\partial_{y_j}=\partial_{x'}$ がしたがう。次に (1.3)

の∂_t^{m-1}の係数をCとして，$u=e^{-cx'}\tilde{u}$ なる未知関数変換を行なう。すると$\partial_t^{m-1}\tilde{u}$の係数は0になる。上の変換で，Goursat data を与える超平面 $t=0$ は不変であるし，$x=0$ は $x'=0$ に変換される。x', y' を改めて x, y とかけば，(1.3)′が得られる。

§2. 定理1の証明.

証明の方法は Mizohata [1] にしたがう。記述を簡略にするために，記号を少し変えよう。$x, y_1, \cdots y_\ell$ の代りに x_1, x_2, $\cdots$, x_ℓ, $x_{\ell+1}$ とかこう。注意1より，

(2.1) $\quad P=\partial_t^{m-1}\partial_{x_1}+\sum_{\substack{i+|\alpha|\le m\\ i\le m-2}}\partial_t^i\partial_x^\alpha$ と考えてよい。

$$P(\partial_t,\partial_x)=P_m(\partial_t,\partial_x)+R_{m-1}(\partial_t,\partial_x)$$

とかこう。Goursat問題が $\mathcal{E}$-well posed であってかつ実数でないような特性根があるとしよう。もう少し詳しく云えば，$R^{\ell+1}$ の点 ξ^0（その第一座標 $\xi_1^0\neq 0$ であるような）があって，$P_m(\tau,\xi^0)=0$ が $\mathrm{Im}\,\tau_1(\xi^0)\neq 0$ であるような根 $\tau=\tau_1(\xi^0)$ をもつとしよう。必要あらば，ξ^0 を $-\xi^0$ でおきかえることにより，

(2.2) $\quad \mathrm{Im}\,\tau_1(\xi^0)<0 \qquad (|\xi^0|=1,\ \xi_1^0\neq 0)$

であるとしてよい。さて $P[u]=0$ をみたす u を評価しよう。そのために，x 空間と，ξ 空間の両方で局所化を行なう。先

ず $\beta(x)\in C_0^\infty$ をとろう。$0\leq\beta(x)\leq 1$ でありかつ原点の近傍で、$\beta(x)\equiv 1$ であるとする。$\beta(x)$ を $Pu=0$ に作用さす。

(2.3) $\quad P[\beta u] = [P,\beta]u.$

次に $d(\xi)\in C_0^\infty$ として、次の条件をみたすものをとる。

$\mathrm{supp}\, d(\xi)$ は ξ^0 の小さな近傍にふくまれる。さらに $0\leq d(\xi)\leq 1$, ξ^0 のある近傍で $d(\xi)\equiv 1$ かつ $d(\xi)$ の support 上で $\xi_1\neq 0$.

$$d_n(\xi) = d\left(\frac{\xi}{n}\right)$$

とおこう。$d_n(D)$ を次で定義する。

$$d_n(D)\,u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(d_n(\xi)\,\hat{u}(\xi)\right], \quad u\in\mathcal{S}'.$$

この $d_n(D)$ を (2.3) に作用さす。P は定数係数であるから、

(2.4) $\quad P[d_n\beta u] = d_n[P,\beta]u.$

$P=P_m+R_{m-1}$ であったから、

(2.5) $\quad P_m[d_n\beta u] = d_n[P,\beta]u - R_{m-1}[d_n\beta u].$

(2.1) より P_m はつぎのような形をしている。

(2.6) $\quad P_m(\partial_t,\partial_x) = \partial_{x_1}\partial_t^{m-1} + \sum_{j=2}^{m} g_j(\partial_x)\,\partial_t^{m-j}$

ここで $g_j(\xi)$ は、ξ に関する j 次同次式である。$d_n(\xi)$ の support の上で、$\xi_1\neq 0$ を考慮して、作用素 $(i\xi_1)^{-1}(D)$ をつぎの式で定義する。

$$(i\xi_1)^{-1}(D)(d_n v) = \mathcal{F}^{-1}\left[(i\xi_1)^{-1}d_n(\xi)\,V(\xi)\right].$$

明らかに $(i\xi_1)^{-1}(D)$ は ∂_{x_1} の逆である。即ち

$$(i\xi_1)^{-1}(D)\,\partial_{x_1}(d_n v) = \partial_{x_1}(i\xi_1)^{-1}(D)(d_n v) = d_n v.$$

この $(i\xi_1)^{-1}(D)$ を (2.5) 式に作用さすと ((2.6) を考慮すれば) つぎの式が得られる。

$$(2.7)\quad \left[\partial_t^{m-1}+\sum_{j=2}^{m}(i\xi_1)^{-1}(D)\,q_j(\partial_x)\,\partial_t^{m-j}\right](d_n\beta u)$$
$$=(i\xi_1)^{-1}(D)\{d_n[P,\beta]u-R_{m-1}[d_n\beta u]\}.$$

$t=0$ は，(2.7) 式では，もはや特性面ではない。(2.7) 式左辺の特性方程式は，

$$\tau^{m-1}+\sum_{j=2}^{m}(i\xi_1)^{-1}q_j(i\xi)\,\tau^{m-j}\equiv(i\xi_1)^{-1}P_m(\tau,i\xi)=0.$$

この方程式の $\xi=\xi^0$ における根を $\tau_1^0,\tau_2^0,\cdots,\tau_{m-1}^0$ とおこう。(2.2) より次の式がなりたつとしてよい ([1] p.116 参照)。

$$(2.8)\quad \begin{cases}\operatorname{Re}\tau_i^0-\varepsilon\geqq 3\delta, & 1\leqq i\leqq N_1,\\ \operatorname{Re}\tau_j^0-\varepsilon\leqq -3\delta, & N_1+1\leqq j\leqq m-1.\end{cases}$$

(2.7) 式を t 方向の双曲型方程式とみる場合，右辺に ∂_t^{m-1} という項があると，それは [1] と同じ方法では取り扱えない。

<u>$\partial_t^{m-1}(d_n\beta_x u)$ の表現</u>

ここで (2.7) 式の右辺で ∂_t^{m-1} をふくんでいる項：$(i\xi_1)^{-1}(D)\cdot\{d_n[P,\beta]u\}$ に注目しよう。

$$[P,\beta]u=-\sum_{|\nu|\geqq 1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}P^{(\nu)}[\beta^{(\nu)}u]$$

であるから

$$(i\xi_1)^{-1}(D)\{d_n[P,\beta]u\}$$
$$=(i\xi_1)^{-1}(D)\sum_{j=1}^{\ell}\frac{\partial P}{\partial\xi_j}(\partial_t,\partial_x)(d_n\partial_{x_j}\beta\cdot u)$$
$$-(i\xi_1)^{-1}(D)\sum_{|\nu|\geqq 2}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}P^{(\nu)}(\partial_t,\partial_x)(d_n\partial_x^{\nu}\beta\cdot u).$$

$P(\partial_t,\partial_x)$の中で∂_t^{m-1}という項をふくんでいるのは，$\partial_t^{m-1}\partial_{x_1}$という項だけである。よって上の式は次のように書ける。

$(i\xi_1)^{-1}(D)\partial_t^{m-1}(\alpha_n\partial_{x_1}\beta\cdot u)+\sum'_{|\nu|\geq 1}C_\nu(\partial_t,D)(\alpha_n\partial_x^\nu\beta\cdot u)$

$C_\nu(\partial_t,D)$はtに関しては微分，xに関しては擬微分作用素で，その order は$m-|\nu|-1$である。そして，tに関する order は$m-2$以下である。記述の都合上，

$$(i\xi_1)^{-1}P(\alpha_n\beta u)\equiv\left[\partial_t^{m-1}+C_0(\partial_t,D)\right](\alpha_n\beta u)$$

であらわそう。C_0はC_νと同じ性質をもつ。これを使って，(2.7)式は次のように書きあらわすことができる。

$$(2.9)\quad \partial_t^{m-1}(\alpha_n\beta u)=(i\xi_1)^{-1}(D)\partial_t^{m-1}(\alpha_n\partial_{x_1}\beta\cdot u)+\sum'_{|\nu|\geq 0}C_\nu(\partial_t,D)(\alpha_n\partial_x^\nu\beta\cdot u).$$

ここでC_νの order は，$m-1-|\nu|$である。(2.9)でβの代りに$\partial_{x_1}\beta\ (\equiv\beta_{x_1})$を代入した式は

$$(2.10)\quad \partial_t^{m-1}(\alpha_n\beta_{x_1}u)=(i\xi_1)^{-1}(D)\partial_t^{m-1}(\alpha_n\partial_{x_1}^2\beta\cdot u)+\sum'_{|\nu|\geq 0}C_\nu(\partial_t,D)(\alpha_n\partial_x^\nu\partial_{x_1}\beta\cdot u).$$

(2.10)を(2.9)に代入する。

$$(2.11)\quad \partial_t^{m-1}(\alpha_n\beta u)=\{(i\xi_1)^{-1}(D)\}^2\partial_t^{m-1}(\alpha_n\partial_{x_1}^2\beta\cdot u)+(i\xi_1)^{-1}(D)\sum'_{|\nu|\geq 0}C_\nu(\partial_t,D)(\alpha_n\partial_x^\nu\partial_{x_1}\beta\cdot u)+\sum'_{|\nu|\geq 0}C_\nu(\partial_t,D)(\alpha_n\partial_x^\nu\beta\cdot u)$$

この操作をくりかえせば，任意の正の整数kに対して，つぎの式が得られる。

$$(2.12)\quad \partial_t^{m-1}(d_n\beta u) = ((i\xi_1)^{-1})^{k}\partial_t^{m-1}(d_n\partial_{x_1}^{k}\beta\cdot u)$$
$$+\sum_{s=0}^{k}\{(i\xi_1)^{-1}\}^{s}\sum_{|\nu|\geq 0}' C_\nu(\partial_t, D)(d_n\partial_x^{\nu}\partial_{x_1}^{s}\beta\cdot u).$$

つぎに方程式の解を下から評価しよう。

__不等式__

(2.7)式を system に直そう。(2.7)の左辺を f とおくと、

$$(2.7)'\quad [\partial_t^{m-1}+\sum_{j=2}^{m}(i\xi_1)^{-1}(D)\,g_j(\partial_x)\partial_t^{m-j}][d_n\beta u] = f.$$

$$U = {}^t((\Lambda+1)^{m-2}(\beta u),\ (\Lambda+1)^{m-3}\partial_t(\beta u),\ \cdots,\ \partial_t^{m-2}(\beta u))$$
$$\equiv E(\Lambda,\partial_t)(\beta u)$$

とおけば、(2.7)′ はつぎのようにかける。

$$(2.13)\quad \partial_t(d_n U) = H\Lambda d_n U + B d_n U + F.$$

ここで $F={}^t(0,\cdots,0,f)$，B は L^2 の有界作用素。

$$H(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ 0 & & \ddots & \ddots\ \ 1 \\ h_{m-1} & \cdots & & h_2\ \ h_1 \end{pmatrix}$$

ここで $h_j(\xi) = |\xi|^{-j}g_{j+1}(i\xi)/(i\xi_1)$．$H(\xi)$ は ξ に関して、0次同次である。H の定義より、

$$\det(\tau I - H(\xi)) = (i\xi_1)^{-1}P_m(\tau, i\xi),\quad \xi_1 \neq 0.$$

[1] P.117 と同様にして、つぎのような non singular matrix N_0 が存在する。

$$N_0 H(\xi^0) N_0^{-1} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\tau}_1 & & 0 & \\ & \overset{\circ}{\tau}_2 & \ddots & \\ \overset{\circ}{a}_{ij} & & & \overset{\circ}{\tau}_{m-1} \end{pmatrix} = \mathcal{Q}_0$$

9

ここで $|a_{ij}| \leq \frac{\delta}{4m}$ ，（δは(2.8)式にあらわれたもの）．

(2.13) に N_0を作用させると，つぎのようになる。

$$(2.14)\quad \partial_t d_m(N_0 U) = [\mathcal{Q}_0 + N_0\{H - H(\xi^0)\}N_0^{-1}]\Lambda d_m(N_0 U) + N_0 B N_0^{-1}(d_m N_0 U) + N_0 F .$$

$$N_0\{H(\xi) - H(\xi^0)\}N_0^{-1} = \mathcal{Q}_\varepsilon(\xi) = (a_{ij}^{(\varepsilon)}(\xi))_{1\leq i,j\leq m-1}$$

とおこう．ξ^0の近傍 V_{ξ^0} を十分小さくとれば，任意の $\xi \in V_{\xi^0}$ に対して $|a_{ij}^{(\varepsilon)}(\xi)| \leq \frac{\delta}{4m}$ になる．$supp[d] \subset V_{\xi^0}$ となるように $d(\xi)$をとろう．

$$\exp(-\varepsilon\Lambda t)N_0 d_m U = V^{(m)} = {}^t(V_1^{(m)}, V_2^{(m)}, \cdots V_{m-1}^{(m)})$$

とおけば，(2.14) はつぎのようになる。

$$\partial_t V^{(m)} = (\mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_\varepsilon - \varepsilon)\Lambda V^{(m)} + N_0 B N_0^{-1} V^{(m)} + \exp(-\varepsilon\Lambda t)N_0 F .$$

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_1}\|V_i^{(m)}\|^2 - \sum_{j=N_1+1}^{m-1}\|V_j^{(m)}\|^2$$

とおこう。ここで$\|\cdot\|$は，x空間のL^2-norm である。$d(\xi)$のsupportを十分小にとれば，つぎの式が得られる．

$$\frac{d}{dt}S(t) \geq \delta n\|V^{(m)}\|^2 - C\|V^{(m)}\|\cdot\|\tilde{F}\|$$
$$\geq \delta' n\|V^{(m)}\|^2 - \frac{C'}{n}\|\tilde{F}\|^2 .$$

ここで，δ'，C'はnに無関係な正の定数．$\tilde{F} = \exp(-\varepsilon\Lambda t)N_0 F$．

結局次の式を得る

$$(2.16)\quad S'(t) \geq \delta' n\|V^{(m)}\|^2 - \frac{C}{n}\|\exp(-\varepsilon\Lambda t)f\|^2 .$$

Cはnに無関係な定数．

定理1の証明

(2.1)が $\mathcal{E}$-wellposed とする。はじめにGoursat問題の解の列を定義しよう。即ちGoursat data の列を定義しよう。$\hat{\varphi}(\xi)$をC^∞関数で、その support はξ^0の小さな近傍にふくまれるとする。さらに$\hat{\varphi}(\xi)$の support 上で$\alpha(\xi)=1$ かつ $\int|\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi=1$ とする。φ_{n+1}を、つぎの式で定義する。

$$(2.17)\quad \hat{\varphi}_{n+1}(\xi)=\hat{\varphi}(\xi-n\xi^0)$$

すなわち

$$(2.18)\quad \varphi_{n+1}(x)=\exp(in\xi^0 x)\varphi(x).$$

つぎのGoursat dataを満足するような$Pu=0$の解を$u_n(t,x)$とする。

$$(2.19)\quad \begin{cases} N_0E(\Lambda,\partial_t)u_n(0,x)={}^t(\varphi_n(x),0\cdots 0) \\ u_n(t,0,x')=\varphi_n(t,x')=\sum_{i=0}^{m-2}\partial_t^i u_n(0,0,x')t^i/i! \end{cases}$$

(2.19)は明らかにcompatibility条件をみたす。(2.19)は、つぎのようにも書ける。

$$(2.20)\quad \begin{cases} \partial_t^i u_n(0,x)=\mathcal{F}^{-1}(c_i\varphi_n(\xi)/(|\xi|+1)^{m-2-i}) & 0\le i\le m-2 \\ u_n(t,0,x')=\varphi_n(t,x'). \end{cases}$$

[1] p.119と同様の計算で、

$$(2.21)\quad \|d_m N_0 E(\Lambda,\partial_t)\beta u(0,x)\|=c+o(\tfrac{1}{n})$$

をうる。ここで、cは正の定数。

さて、(2.7)式で、$u=u_n(t,x)$とおこう。$\mathcal{E}$-wellposed の仮定

から，正の整数kと，x空間における0の近傍Ωと，$T'(>0)$が存在して，

(2.22) $\max_{x\in\Omega}|\partial_t^i u_n(x,t)| \leq O(n^k)$, $0\leq i\leq m-1$, $0\leq t\leq T'$

がなりたつ。ここで$\beta(x)$の support を小さくとって，$\mathrm{supp}\,\beta(x)\subset\Omega$ とすれば，

(2.23) $\|\beta(x)\partial_t^i u_n(t,x)\| \leq O(n^k)$, $0\leq i\leq m-1$, $0\leq t\leq T'$

がなりたつ。

(2.7) の右辺にあらわれてくる $(i\xi_1)^{-1}(D)d_n\partial_{x_1}\beta\partial_t^{m-1}u_n$ なる項は，[1]ではあらわれなかった項である。この項については，(2.12)式を用いる。(2.23) より，

$\|(i\xi_1)^{-k}\partial_t^{m-1}(d_n\partial_{x_1}^k\beta\cdot u_n)\| \leq C$ (定数)

であるから，(2.12) で $k=k$ ととれば，$\partial_t^{m-1}(d_n\beta u_n)$ は，Cauchy問題のときにあらわれるような項と，L^2-norm で有界(nに関して)な項との和であらわすことができる。こうしておけば，[1] と同じ取り扱いができて，

(2.24) $S_n(t) \geq C\exp(\frac{\delta'}{2}nt) - O(\frac{1}{n})$

を得る。$S_n(t)$ の定義については[1] p124 を参照。一方 $\mathcal{E}$-well posed の仮定から，$S_n(t)$は，nに関して多項式の order でなければならない。これは(2.24)に矛盾する。

§3. 定理2の証明.

方程式(1.3)′を考えよう。はじめに$y\in R^1$のときについて定理2を証明する。このとき(1.3)′で$f=0$とおいた式はつぎのようになる。

(3.1) $$\partial_t^{m-1}\partial_x u=\sum_{\substack{i+j+k\leq m\\ i\leq m-2}} a_{ijk}\,\partial_t^i\partial_x^j\partial_y^k u.$$

定理2の主張は, $\mathcal{E}$-well posedならば, $a_{m-i,0,i}=0$, $2\leq i\leq m$.
はじめに証明の概略をのべよう。先ず$a_{m-2,0,2}=0$を示す。
詳しくいえば. $\mathcal{E}$-well posedと$a_{m-2,0,2}\neq 0$を仮定して, (3.1)の解の列で, Goursat dataから, 解への連続性がなりたたないようなものを構成する。次に$a_{m-i,0,i}=0$ $(3\leq i\leq m)$を次の方法で示す。即ち$a_{m-2,0,2}=0$かつ$\sum_{i=3}^{m}|a_{m-i,0,i}|\neq 0$とすれば, 特性多項式$P_m(\tau,\xi,\eta)=0$が虚根をもつことが示され, 定理1より, $\mathcal{E}$-well posedであることに反する。
前記後半の証明は簡単であるので（詳しくは[3]参照）ここでは前半の部分の証明をしようと思う。(3.1)で$u=e^{i\eta y}v(t,x)$とおこう。ηは実数とする。$v(t,x)$のみたすべき方程式は,

(3.2) $$\begin{aligned}&\partial_t^{m-1}\partial_x v(t,x)\\ &=\left[a_{m-2,0,2}(i\eta)^2+a_{m-2,0,1}(i\eta)+a_{m-2,0,0}\right]\partial_t^{m-2}v\\ &+\left(a_{m-2,2,0}\partial_x^2+a_{m-2,1,1}(i\eta)\partial_x+a_{m-2,1,0}\partial_x\right)\partial_t^{m-2}v\\ &+\sum_{i\leq m-3}a_{ijk}(i\eta)^k\partial_t^i\partial_x^j v.\end{aligned}$$

必要ならば, xを$-x$に変換することにより, $a_{m-2,0,2}<0$

であると仮定できる。(3.2)式左辺の第一項を $(a\eta^2+ib\eta+c)\partial_t^{m-2}V$, ($a>0$) と書こう。$\eta>0$ で $+\infty$ にとばした時の(3.2)の解の挙動をみよう。そのため,

$$\zeta=\sqrt{a\eta^2+ib\eta+c}\ ,\quad \mathrm{Re}\,\zeta>0$$

とおこう。$\eta\longrightarrow+\infty$ のとき,

$$\zeta=\sqrt{a}\,\eta+i\frac{b}{2\sqrt{a}}+O\left(\frac{1}{\eta}\right)$$

になる。これより,

$$|\zeta|=\zeta+O\left(\frac{1}{\eta}\right)=\zeta+O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right)$$

がしたがう。さて,(3.2)の解で,次のようなGoursat dataをみたすものを考えよう。

$$(3.3)\quad\begin{cases}\partial_t^i V(0,x)=0 & 0\leq i\leq m-3\\ \partial_t^{m-2}V(0,x)=1 & \\ V(t,0)=t^{m-2}/(m-2)! & \end{cases}.$$

(3.3)の第一式より,

$$(3.4)\qquad V(t,x)=\sum_{p\geq0,\,q\geq0}V_{pq}\frac{t^{m-2+p}}{(m-2+p)!}\cdot\frac{x^q}{q!}$$

とおこう。第2,第3式より

$$(3.5)\qquad V_{00}=1,\quad V_{0,q}=0\quad q\geq1,\quad V_{p,0}=0\quad p\geq1$$

がしたがう。(3.4)を(3.2)に代入して,両辺の $t^r x^s$ の係数をくらべれば,つぎの式が得られる。

$$(3.6)\quad V_{r+1,s+1}=\zeta^2V_{r,s}+\left(a_{m-2,2,0}V_{r,s+2}+a_{m-2,1,1}(i\eta)V_{r,s+1}+a_{m-2,1,0}V_{r,s+1}\right)+\sum_{i\leq m-3}a_{ijk}(i\eta)^kV_{r+i-(m-2),s+j}\ .$$

(3.5)と(3.6)より$v_{p,q}$は一意的に決まる。特にGoursat dataの形から，ただちに

$$(3.7)\qquad v_{pp}=\zeta^{2p}\quad p\geq 0,\qquad v_{p,q}=0\quad q>p$$

が得られる。次にηが大きい時のv_{pq} $(q<p)$を評価しよう。

$\eta<\mathrm{const.}|\zeta|$を考慮すれば，

$$(3.8)\qquad |v_{r,s}|\leq \frac{r!}{s!}|\zeta|^{2s}(c|\zeta|)^{r-s},\qquad s\leq r$$

が得られる。証明は，数学的帰納法による。[3]参照。さて，$\partial_t^{m-2}v=\sum_{p,q}\frac{t^p}{p!}\frac{x^q}{q!}v_{pq}$を下から評価しよう。$t,x\geq 0$として，右辺の和を，$p=q$の部分と$p\neq q$の部分にわけておいて，($v_{p,q}=0$ $q>0$ であるから)(3.8)を使えば，

$$\left|\partial_t^{m-2}v(t,x;\eta)\right|\geq\left|\sum_{p\geq 0}v_{pp}\frac{t^px^p}{(p!)^2}\right|-\left|\sum_{q<p}v_{pq}\frac{t^px^q}{p!q!}\right|$$

$$\geq\left|\sum_{p\geq 0}v_{pp}\frac{(tx)^p}{(p!)^2}\right|-\sum_{q<p}t^p\frac{x^q}{(q!)^2}|\zeta|^{2q}(c|\zeta|)^{p-q}.$$

上式の第2項は，

$$\sum_{q\geq 0}\frac{|\zeta|^{2q}}{(q!)^2}x^q\sum_{p;\,p\geq q}t^p(c|\zeta|)^{p-q}$$

$$=\sum_{q\geq 0}\frac{|\zeta|^{2q}}{(q!)^2}\;x^qt^q\sum_{j\geq 1}(c|\zeta|)^jt^j$$

であるから，結局次の評価が得られる。

$$(3.9)\qquad \left|\partial_t^{m-2}v(t,x;\eta)\right|\geq\sum_{q\geq 0}\frac{|\zeta|^{2q}}{(q!)^2}(xt)^q\Big\{1-\sum_{j\geq 1}(c|\zeta|)^jt^j\Big\}$$

$$-\Big\{\sum_{q\geq 0}\frac{|\zeta|^{2q}}{(q!)^2}(xt)^q-\sum_{q\geq 0}\frac{\zeta^{2q}}{(q!)^2}(xt)^q\Big\}.$$

Bessel 関数の性質を用いれば([3]参照)

(3.10) $\left|\partial_t^{m-1} v(t_\zeta, x_0 ; \eta)\right| \geqq \exp(\delta' \sqrt{|\zeta|}) \quad (0<\delta'<\delta)$

が得られる。ここで $t_\zeta = \dfrac{1}{3C|\zeta|}$, x_0 は正で固定されたものである。さて, $u=e^{i\eta y} v(t, x)$ であったから, (3.3)より

$$(3.11) \quad \begin{cases} \partial_t^i u(0, x, y)=0 & 0 \leq i \leq m-3 \\ \partial_t^{m-2} u(0, x, y)=e^{i\eta y} & \\ u(t, 0, y)=e^{i\eta y} t^{m-2}/(m-2)! \,. & \end{cases}$$

ε-wellposed の仮定より, $\partial_t^{m-2} u(t, x, y)$ は $\eta \longrightarrow +\infty$ のとき, η の, したがって $|\zeta|$ の多項式 order をもつ。一方(3.10)より, $\partial_t^{m-2} u(t_\zeta, x_0, y)$ は $|\zeta|$ の exponential order をもっている。これは矛盾である。

最後に $y \in R^l$ のときを考えよう。(1.3)' で $f=0$ とおいた式は次のようになる。

(3.12) $\displaystyle \partial_t^{m-1} \partial_x u = \sum_{\substack{i+j+|\alpha| \leq m \\ i \leq m-2}} a_{ij\alpha}\, \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^\alpha u$.

定理2の主張は, ε-wellposed ならば, $\sum_{|\alpha|=i} |a_{m-i,0,\alpha}|=0$, $2 \leq i \leq m$. もし $\sum_{|\alpha|=i} |a_{m-i,0,\alpha}| \neq 0$ であれば, 適当な独立変数変換により, $\partial_t^{m-i} \partial_{y_1}^i$ の係数が 0 ではないようにできる。$u=u(t, x, y_1)$ として $y_2 \cdots y_l$ には頼らないような解を考えれば, $l=1$ の場合に帰着できる。$i=3, \cdots, m$ の場合についても, $l=1$ の場合と同様にやればよい。[3]参照。

§4, 定理3の証明.

基本的な証明の方針は、定理1の証明の時と同じである。詳しく記していたら、非常に長くなるので、概略をのべようと思う。(1.3)′より

(4.1) $P(\tau,\xi,\eta) = \tau^{m-1}\xi - \sum_{i\leq m-2} a_{ij\alpha}\tau^{i}\xi^{j}\eta^{\alpha}$

$\equiv P_m(\tau,\xi,\eta) + P_{m-1}(\tau,\xi,\eta) + R_{m-2}(\tau,\xi,\eta)$

とおこう。P_m, P_{m-1} は夫々 m 次, $m-1$ 次の同次多項式, R_{m-2} は, $m-2$ 次の多項式である。(4.1)より, P_{m-1} の中の τ^{m-1} の係数は0である。さらに定理2より $P_m = \xi\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)$ である.

(4.2) $P_{m-1} = \xi Q_{m-2}(\tau,\xi,\eta) + \mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta)$

とおこう。ここで Q_{m-2}, $\mathring{P}_{m-1}$ は夫々 $m-2$ 次, $m-1$ 次の同次多項式である。これより,

(4.3) $P = \xi(\mathring{Q}_{m-1} + Q_{m-2}) + \mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta) + R_{m-2}$

$\equiv \xi Q_{m-1} + \mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta) + R_{m-2}$.

証明したいことは, "$\mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta) \not\equiv 0$ ならば, Goursat 問題は, E-wellposed ではない" ということである。$\mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta) \not\equiv 0$ としよう。$\mathring{P}_{m-1}(\tau,\eta^{0}) \not\equiv 0$ なる $\eta^{0}\in R^{l}$ が存在する。$P_m + P_{m-1}$ を主要部とみて, $P_m(\tau,i\xi,i\eta) + P_{m-1}(\tau,i\xi,i\eta) = 0$ の根を $\xi=\sqrt{\lambda}$, $\eta=\lambda\eta^{0}$ ($\lambda>0$, 十分大) の近傍で考えると, 次の補題を得る。

<u>補題4.1</u> $\mathring{Q}_{m-1}(\tau;\xi,\eta) = 0$ が $(\xi,\eta)\in R^{1}\times R^{l}$, $(\xi,\eta)\neq(0,0)$

に対して，実で相異なる根 $\{\lambda_i(\xi,\eta),\ 1\le i\le m-1\}$ をもつとする。さらに $\overset{\circ}{P}_{m-1}(\tau,\eta^0)\neq 0$ $\eta^0\in R^l$ とする。このとき，特性多項式

(4.4) $i\xi Q_{m-1}(\tau,i\xi,i\eta)+\overset{\circ}{P}_{m-1}(\tau,i\eta)=0$

の根 $\{\tau_i(\xi,\eta)\}_{1\le i\le m-1}$ は，つぎのような評価をもつ．

$$(4.5)\quad \begin{cases} \mathrm{Re}\,\tau_i > \delta\sqrt{\lambda}, & 1\le i\le N_1,\quad N_1\geqq 1,\ \delta>0. \\ |\mathrm{Re}\,\tau_i|\le C\ (\text{定数}) & N_1+1\le i\le N_2 \\ \mathrm{Re}\,\tau_i < -\delta\sqrt{\lambda} & N_2+1\le i\le m-1 \end{cases}$$

$(\xi,\eta)\in \Gamma_\lambda$，$\lambda>0$．十分大．

$\Gamma_\lambda=\{(\xi,\eta)\,;\ |\xi-\varepsilon_0\sqrt{\lambda}|<\varepsilon\sqrt{\lambda},\ |\eta-\lambda\eta^0|<\varepsilon\lambda\}$ ここで ε_0 は，$+1$ 又は -1 で，そのどちらになるかは $\overset{\circ}{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)=0$ の根と，$\overset{\circ}{P}_{m-1}(\tau,\eta)$ によって決まる。

この補題の証明には，ピュイーズ展開を用いる。詳しくは[3]をみて下さい。　$\beta(x,y)$，$\alpha(\xi,\eta)$ を §2で定義した関数として，$Pu=0$ に作用させると，

(4.6) $P[\alpha\beta u]=-\sum_{|\nu|\geqq 1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}P^{(\nu)}[\alpha\,\beta^{(\nu)}u]$.

§2では，$\alpha_n=\alpha\left(\frac{\xi}{n},\frac{\eta}{n}\right)$ とおいたので，$n\longrightarrow\infty$ のとき，ξ,η 向の n の増大 order が同じであったが，ここでは，補題の Γ_λ を考慮して，ξ は $\sqrt{n}$ の order で，η は n の order で増大させよう。そのため，∂_t,∂_y の order を 1，∂_x の order を $\frac{1}{2}$ とみて，(4.6) の両辺の order をみてみよう．左辺の order

は，$m-1+\frac{1}{2}$である．$\frac{\partial P}{\partial \xi}$のorderは$m-1$である．右辺の他の項は，高々$m-1-\frac{1}{2}$である．したがって右辺の最も高いorderの項は，$\frac{\partial}{\partial \xi}P[\alpha, \beta_x u]$である．この項は，§2と同じ方法では，取り扱えない．orderが左辺(主要部)にくらべて1以上小さい項であるならば，同じ取り扱いができる．さて問題の項：$\frac{\partial}{\partial \xi}P[\alpha, \beta_x u]$は次のように処理する(溝畑先生のideaによる)．

$$P = \xi Q_{m-1}(t, \xi, \eta) + \overset{\circ}{P}_{m-1}(t, \eta) + R_{m-2}(t, \xi, \eta)$$

であるから，

$$(4.7)\quad \frac{\partial}{\partial \xi}P = Q_{m-1} + \xi\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial \xi} + \frac{\partial R_{m-2}}{\partial \xi}.$$

(4.6)でβをβ_xでおきかえれば，

$$(4.8)\quad P[\alpha\beta_x u] = -\sum_{|\nu|\geq 1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}P^{(\nu)}[\alpha(\beta_x)^{(\nu)}u].$$

$\alpha(\xi, \eta)$のsupportの上で$\xi \neq 0$とすれば，§2と同様に$(i\xi)^{-1}(D)$が定義できる(このorderは$-\frac{1}{2}$と考える)．これを使えば，

$$(4.9)\quad Q_{m-1}(\alpha\beta_x u) = -(i\xi)^{-1}(D)(\overset{\circ}{P}_{m-1} + R_{m-2})[\alpha\beta_x u]$$
$$-\sum_{|\nu|\geq 1}\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}(i\xi)^{-1}(D)P^{(\nu)}[\alpha(\beta_x)^{(\nu)}u].$$

ところで(4.6)と(4.7)より

$$P(\alpha\beta u) = [Q_{m-1} + \partial_x\frac{\partial Q_{m-1}}{\partial \xi} + \frac{\partial R_{m-2}}{\partial \xi}](\alpha\beta_x u)$$
$$-\sum_{|\nu|\geq 1}{}'\frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}P^{(\nu)}(\alpha\beta^{(\nu)}u)$$

である．ここでΣ'は$\frac{\partial}{\partial \xi}P$なる項をふくまないものをあらわす．上式に(4.9)を代入すれば，

$$P(d\beta u) = -(i\xi)^{-1}(D)(\overset{\circ}{P}_{m-1} + R_{m-2})(d\beta_x u) - \sum_{|\nu|\geq 1} \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}(i\xi)^{-1}(D)P^{(\nu)}[d(\beta_x)^{(\nu)}u] + \left(\partial_x \frac{\partial Q_{m-1}}{\partial \xi} + \frac{\partial R_{m-2}}{\partial \xi}\right)(d\beta_x u) - \sum_{|\nu|\geq 1}{}' \frac{(-1)^{|\nu|}}{\nu!}P^{(\nu)}(d\beta^{(\nu)}u).$$

結局次の式を得る。

$$(4.10)\quad P(d\beta u) = \sum_{|\nu|\geq 1} C_\nu(\partial_t, \partial_x, \partial_y, (i\xi)^{-1}(D))(d\beta^{(\nu)}u).$$

左辺の order は $m-1+\frac{1}{2}$. 右辺は $m-1-\frac{1}{2}$. 以後(4.10)で $P_m + P_{m-1}$ を主要部, R_{m-2} を低階とみて, §2 の (2.16)に対応する式を求めるのである。§2では方程式を system に直し, 主要部の行列を三角化したが, 今の場合, 三角化では, 非対角元の部分の評価がうまくゆかないので, 対角行列に直す。ここで仮定4 ($\overset{\circ}{Q}_{m-1}$ が強双曲型) が利いてくる。詳しくは[3]を参照。

§5. 定理4の証明.

定理の仮定より P は次の形をしていると考えてよい。

$$P(\tau, \xi, \eta) = \xi\overset{\circ}{Q}_{m-1}(\tau, \xi, \eta) + \xi\overset{\circ}{Q}_{m-2}(\tau, \xi, \eta) + R_{m-2}(\tau, \xi, \eta) \equiv \xi Q_{m-1} + R_{m-2}.$$

さらに, 一般性を失うことなく, Goursat data は 0 であるとしてよい。記述を簡略にするために, 記号を少し変えよう。$(x, y_1, \cdots, y_\ell)$ の代りに $(x_1, x_2, \cdots, x_{\ell+1})$, $(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_\ell)$ の代りに $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{\ell+1})$ と書こう。結局我々は, 次の Goursat 問題を考えよう。

(5.1) $Q_{m-1}\partial_{x_1}u = R_{m-2}u + f \qquad f\in\mathcal{E}_{t,x}$

(5.2) $\begin{cases}\partial_t^i u(0,x)=0 & 0\le i\le m-2\\ u|_{x_1=0}=0\end{cases}$

$$x=(x_1,x')=(x_1,x_2,\cdots,x_{\ell+1}),\quad x\in R^{\ell+1}.$$

ここでQ_{m-1}はorder $m-1$ の微分作用素であり，かつt方向に強双曲型である．R_{m-2}は$m-2$階の微分作用素である．逐次近似法によって定理を証明する。即ちV_0を

$$Q_{m-1}V_0=f,\ \partial_t^i V_0(0,x)=0 \qquad 0\le i\le m-2$$

の解とする。u_0を

$$\partial_{x_1}u_0=V_0,\quad u_0|_{x_1=0}=0$$

の解とする．一般に$j\geq 1$に対して，V_jは

(5.3) $Q_{m-1}V_j=R_{m-2}u_{j-1},\ \partial_t^i V_j(0,x)=0,\ 0\le i\le m-2$

の解であるとし，u_jを

(5.4) $\partial_{x_1}u_j=V_j,\quad u_j|_{x_1=0}=0$

の解であるとする．我々は$u_0+u_1+\cdots$が収束することが示したい。 ここでGoursat問題の依存領域という概念を導入しよう。$\overset{\circ}{Q}_{m-1}(\tau,\xi)=0$ の根を$\lambda_i(\xi)_{1\le i\le m-1}$とする。$\lambda_{max} = \max\limits_{1\le i\le m-1,\,|\xi|=1}\lambda_i(\xi)$ とおく。$\tilde{t}>0$とする．$\Omega(\tilde{t},\tilde{x})$を，backward cone; $\{(t,x);\ |x-\tilde{x}|\le\lambda_{max}(\tilde{t}-t)\}$で$t\geq 0$の部分とする．さらに$D(\tilde{t},r)=\bigcup\limits_{|x|\le r}\Omega(\tilde{t},x)$ とする。ここで$D(\tilde{t},r)$を1つとり固定する。$D(\tilde{t},r)$と超平面$t=s\ (<\tilde{t})$

との共通部分をD(s)であらわす。次の2つの補題を得る。

補題5.1

$$(5.5)\quad \begin{cases} \partial_{x_1} u = v(t,x), & v(t,x) \in H^0_{loc} \\ u|_{x_1=0} = 0 \end{cases}$$

(5.5)の解はつぎの評価をもつ。

$$(5.6)\quad \|u(t)\|_{D(t)} \leq C_1 \|v(t)\|_{D(t)}.$$

ここで $\|u(t)\|^2_{D(t)} = \int_{D(t)} |u(t,x)|^2 dx$. C_1 は $D(t)$ には依存するが, v には無関係な定数.

補題5.2

$$(5.7)\quad \begin{cases} Q_{m-1} v = g(t,x) & g(t,x) \in H^k_{loc} \\ \partial_t^i v(0,x) = 0, & 0 \leq i \leq m-2. \end{cases}$$

(5.7)の解は, つぎの不等式をみたす。

$$(5.8)\quad |||v(t)|||_{k,D(t)} \leq C_2 \int_0^t \|g(s)\|_{k,D(s)} ds. \quad k = 0,1,2,\cdots$$

ここで $\|g(s)\|_{k,D(s)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_x^\alpha g(s)\|_{D(s)}$

$$|||v(t)|||_{k,D(t)} = \sum_{i=0}^{m-2} \|\partial_t^i v(t,x)\|_{m-2-i+k,D(t)}.$$

Remark 補題5.1で $\|\cdot\|_{D(t)}$ を $|||\cdot|||_{k,D(t)}$ でおきかえてもよい。

即ち. 補題5.1′ $v(t,x) \in H^k_{loc}$ ならば, (5.5)の解はつぎの評価をもつ。

$$(5.6)'\quad |||u(t)|||_{k,D(t)} \leq C_1' |||v(t)|||_{k,D(t)}.$$

さて, 上の補題の証明であるが, 補題5.1は(5.5)の解が具体的に積分の形で書き下せることにより, 容易に示される。

補題5.2は、双曲型方程式の依存領域を考慮すれば、本質的には、[2] p338. 定理6.12と同じである。

さて、定理の証明であるが、$0 \leq t \leq T$, $M = \sup_{0 \leq s \leq T} \|f(s)\|_{k,D(s)}$ とおこう。補題5.1′と5.2より(R_{m-2}が$m-2$階の微分作用素であることを使って)

(5.9) $|||u_j|||_{k,D(t)} \leq (C_1C_2)^{j+1} C_3^j M t^{j+1}/(j+1)!$

を得る。ここでC_3はR_{m-2}の係数によって決まる定数。

u_jを$\partial_t^i u_j$(iは任意)でおきかえても、(5.9)と類似の不等式が得られる。$D(t, r)$は任意であったから、$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$は広義一様収束することがわかる。同様に任意のi, jに対して、

$\sum_{k=0}^{\infty} \partial_t^i \partial_x^j u_k$も、$R^{l+1} \times [0, T]$で広義一様収束する。$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$とおけば、これはGoursat問題(5.1)-(5.2)の解であり、$u \in C_{t,x}^{\infty}$である。解の一意性についても、補題5.1′, 5.2を使って、容易に示される。詳しくは[3]をみて下さい。

§6. 補足—仮定3についての考察

仮定3で、P_mとP_{m-1}は実係数としたが、このうち、P_mについては、必要条件としてでてくるものである。

<u>命題6.1</u> 仮定1, 2の下で、Goursat問題(1.3)-(1.4)が$\mathcal{E}$-well-posedであるならば、主要部P_mの係数は実数である。(ここで、仮定2より、$\partial_t^{m-1}\partial_x$の係数を1と考える)

証明.

$$P=(\partial_x+\sum_{j=1}^{l}a_j\partial_{y_j}+c)\partial_t^{m-1}$$
$$-\{h_2(\partial_x,\partial_y)\partial_t^{m-2}+h_3(\partial_x,\partial_y)\partial_t^{m-3}+\cdots+h_m(\partial_x,\partial_y)\}$$

とおこう。ここで $h_j(\xi,\eta)$ は，(ξ,η) の j 次多項式である。命題を示すためには，"$\mathcal{E}$-wellposed ならば，a_j $(1\leq j\leq l)$ は実数である" が示されれば十分である。実際 a_j $(1\leq j\leq l)$ が実数であれば，§1 の注意 1 により，方程式は(1.3)′に帰着でき，定理 1 の証明がそのまゝ使えて，特性根は実数であることが云える。これより P_m の係数は実数であることがしたがう。

さて，ある j $(1\leq j\leq l)$ があって，$\mathrm{Im}\,a_j\neq 0$ としよう。

$Pu=0$ なる u のうちで，(t,x,y_j) のみの関数を考えよう。簡単のために記号を少し変えて，つぎの方程式を考えよう。

$$(6.1)\quad Pu\equiv(\partial_x-a\partial_y)\partial_t^{m-1}u-\{h_2(\partial_x,\partial_y)\partial_t^{m-2}$$
$$+\cdots+h_m(\partial_x,\partial_y)\}u=0,\quad y\in R^1,\quad \mathrm{Im}\,a\neq 0.$$

$u=e^{i\eta(ax+y)}v(t,x)$ とおけば，v のみたす式は，

$$(6.2)\quad \partial_x\partial_t^{m-1}v=\{h_2(\partial_x+ia\eta,i\eta)\partial_t^{m-2}+\cdots+h_m(\partial_x+ia\eta,i\eta)\}v$$
$$\equiv\sum_{s=2}^{m}\sum_{p+q\leq s}a_{spq}\,\partial_x^p\,\eta^q\,\partial_t^{m-s}v(t,x).$$

(6.2)の解でつぎのような Goursat data をみたすものを考えよう。

$$(6.3)\quad\begin{cases}\partial_t^i v(0,x)=0 & 0\leq i\leq m-2\\ v(t,0)=t^{m-1}/(m-1)!.\end{cases}$$

(6.2)−(6.3) の形式解を，

$$(6.4)\qquad v(t,x)=\sum_{j,k} v_{j,k}\frac{t^j x^k}{j!\,k!}$$

とおこう。(6.3)より，

$$(6.3)'\quad\begin{cases} v_{j,k}=0 & j=0,1,\cdots,m-2,\quad k=0,1,2,\cdots \\ v_{m-1,0}=0\,, & \\ v_{j,0}=0 & j\neq m-1\,. \end{cases}$$

(6.4)を(6.2)へ代入すれば，

$$\sum v_{j,k}\frac{t^{j-m+1}x^{k-1}}{(j-m+1)!\,(k-1)!}=\sum_{s=2}^{m}\sum_{p+q\leq s}a_{spq}\eta^q\sum_{j,k}\frac{t^{j-m+s}x^{k-p}}{(j-m+s)!\,(k-p)!}.$$

両辺の $t^\ell x^\gamma$ の係数をくらべると，

$$(6.5)\qquad v_{\ell+m-1,\gamma+1}=\sum_{s=2}^{m}\sum_{p+q\leq s}a_{spq}\eta^q v_{\ell+m-s,\gamma+p}\,.$$

(6.3)'と(6.5)より

$$(6.6)\qquad v_{m-1+\ell,k}=0\qquad k>\ell\geqq 0\,.$$

$k\leq\ell$ なる項については、つぎの評価をうる。

$$(6.7)\quad |v_{\ell+m-1,k}|\leq AC^\ell\eta^{k+\ell}(k+\ell)!\quad k\leq\ell,\ A,C\text{は定数.}$$

(6.7)の証明は，$k=0$ のときは，(6.3)'よりただちにしたがう。他の部分は，帰納法による。 さて，(6.4)と(6.6)より，$v_{m-1,0}=1$ を使えば，

$$(6.8)\quad v(t,x)=\sum_{k\leq\ell}v_{m-1+\ell,k}\frac{t^{m-1+\ell}x^k}{(m-1+\ell)!\,k!}$$
$$=\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}+\sum_{\ell\geq1}\sum_{k=0}^{\ell}v_{m-1+\ell,k}\frac{t^{m-1+\ell}x^k}{(m-1+\ell)!\,k!}\,.$$

上式第2項を，(6.7)を使って評価しよう。

$$\sum_{\ell\geq 1}\sum_{k=0}^{\ell} AC^{\ell}\eta^{k+\ell}(k+\ell)!\,\frac{t^{m-1+\ell}\,x^{k}}{(m-1+\ell)!\,k!}$$
$$\leq \sum_{\ell\geq 1}\sum_{k=0}^{\ell} AC^{\ell}\eta^{k+\ell}2^{k+\ell}t^{m-1+\ell}x^{k}.$$

$x=x_0$で固定し，$C>1$，$\eta>1$ とすれば上式はつぎの式でおさえられる

$$A\cdot t^{m-1}\sum_{\ell\geq 1}C^{\ell}\eta^{2\ell}2^{2\ell}t^{\ell}(1+|x_0|)^{\ell}$$

(6.9) $\quad t < 1/4C\eta^2(1+x_0)$

のとき，上の級数は収束する。結局(6.9)をみたすtに対して

$$|v(t,x_0)|\geq t^{m-1}\Big(1-\sum_{\ell=1}^{\infty}A\{4C\eta^2(1+|x_0|)t\}^{\ell}\Big)$$

を得る。よって，例えば，$t_\eta=\dfrac{1}{8C\eta^2(1+|x_0|)\cdot A}$ ととれば，

(6.10) $\quad |v(t_\eta,x_0)|\geq M/\eta^{2(m-1)}.$

Mはηに無関係な正の定数.

さて，もとのuにもどれば，

(6.11) $\quad u=e^{ia\eta x+i\eta y}\,v$

であった。$\mathrm{Im}\,a\neq 0$ より，$a=a_1+ia_2$ $(a_2\neq 0)$とおこう。$-a_2x_0>0$ となるようにx_0をとろう。

(6.12) $\quad |u(t_\eta,x_0,y)| = e^{-a_2\eta x_0}|v(t_\eta,x_0)|$
$$\geq e^{-a_2x_0\eta}M\,\eta^{-2(m-1)}.$$

一方(6.11)のuのみたすGoursat dataは，(6.3)より，

$$\begin{cases}\partial_t^i u(0,x,y)=0 & 0\leq i\leq m-2\\ u(t,0,y)=e^{i\eta y}\,t^{m-1}/(m-1)!\end{cases}$$

であるから，$\mathcal{E}$-well posedの仮定より，解はηに関して，高

く多項式の増大orderをもつ。これは(6.12)に矛盾する。

次にP_{m-1}が実係数であるという仮定について考えてみよう。

仮定3′　P_mの係数は実数である。

命題6.2　仮定1, 2, 3′, 4の下で、Goursat問題が$\mathcal{E}$-well-posedならば、

$$\mathrm{Re}\,P_{m-1}(\tau,\xi,\eta)=c\,\mathring{Q}_{m-1}(\tau,\xi,\eta)+b_1(\xi,\eta)Q_{m-2}(\tau,\xi,\eta)$$

である。即ち、定理3がP_{m-1}の実部についてなりたつ。

証明は、定理3のそれをたどってみればよい。$\mathrm{Im}\,P_{m-1}$についてはどうであろうか。簡単な例で説明しよう。

$$(6.13)\qquad \partial_t\partial_x u=i\partial_y u$$

特性多項式(4.4)は今の場合

$$\tau(i\xi)=i\cdot i\eta$$

したがって$\tau=i\dfrac{\eta}{\xi}$となり、$\mathrm{Re}\,\tau=0$であるから、補題4.1はなりたたない。即ち、$\mathrm{Im}\,P_{m-1}$については定理3の証明は全く通用しないのである。もっとも、(6.13)については、定理3の証明とは別の方法で$\mathcal{E}$-wellposedでないことが示される。実際

$$(6.14)\qquad u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\eta xt)^n}{(n!)^2}e^{i\eta y}$$

は、(6.13)をみたす。$u(0,x,y)=u(t,0,y)=e^{i\eta y}$であるから、Goursat問題が$\mathcal{E}$-wellposedとすれば、解は$\eta$

の多項式orderでおさえられなければならない。しかし(6.14)より、多項式orderではおさえられないことがわかる。よって、(6.13)は$\mathcal{E}$-well posedではない。

参照文献

[1] S. Mizohata. Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ. vol 1. No 1, 1961. p.109 — p127

[2] 溝畑茂　偏微分方程式論 岩波 (1965)

[3] Y. Hasegawa. On the C^∞-Goursat problem for equations with constant coefficients. to appear in J. Math. Kyoto Univ.