数理解析研究所講究録
第357巻 1979年 125-136

定数係数偏微分方程式の解の波束について

京大数理解析研　西和田公正

§1. 序

$n+1$ 変数 $(\tau,\xi)=(\tau,\xi_1,\cdots,\xi_n)$ の多項式 $P(\tau,\xi)$ で次の形のものを考える。

$$(1)\qquad P(\tau,\xi)=\tau^{\ell}+\sum_{j=1}^{\ell}a_j(\xi)\tau^{\ell-j},$$

ここで $\ell\geqq 1$ とする。$(D_t,D_x)=-i\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ と書くことにより偏微分作用素 $P(D_t,D_x)$ がえられる。

今斉次方程式

$$(2)\qquad P(D_t,D_x)\psi(t,x)=0$$

を考えることにする。(2) が有限伝播性を表わす、自明

でない解 ψ をもてば、P のある既約因子は弱双曲型（主部が双曲型であるという意味で）でなければならぬ、ということが古典的結果としてよく知られている。正確に述べると、次の定理がなりたつ。（John [2], Hörmander [1, Th. 5.7.1]）

<u>定理1</u>　$\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} ; a < t < b, x \in \mathbb{R}^n\}$ とあらわす。方程式(2)が、自明でなく $\mathrm{supp}\,\psi$ が Ω の中で有界となる C^∞ 解 $\psi(t,x)$ をもつ為の必要十分条件は $P(\tau,\xi)$ のある非定数因子が $(1,0,\cdots,0)$ 方向に弱双曲型となることである。

本研究の出発点は、この定理を Schrödinger 作用素 $L = D_t - \Delta$ を含むぐらいにまで拡張できないかと考えたことにある。その場合、もちろん $\mathrm{supp}\,\psi \Subset \Omega$ という部分は変更する必要がある。次の例を考えてみよう。

Gauss 分布を初期値とする自由空間での Schrödinger 方程式の解を $u(t,x)$ とおく。即ち

$$Lu = 0, \quad u(0,x) = \exp\left(-\sum \frac{x_j^2}{2a_j}\right), \quad a_j > 0$$

$u \in C^\infty(\mathbb{R}_t ; \mathcal{S}'_x)$ という条件を課せば、Fourier変換を使う計算により、

$$u(t,x) = \prod_1^n \left(\frac{a_j}{a_j + 2ti} \right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\sum \frac{x_j^2}{2(a_j + 2ti)} \right).$$

となる。従がって

$$(3) \qquad |u(t,x)| \leq \exp\left(-\sum \frac{1}{2} \left(\frac{x_j}{s_j} \right)^2 \right),$$

$$s_j = s_j(a_j, t) = (a_j + \frac{4t^2}{a_j})^{1/2},$$

という評価が得られる。(3) は (t, a_j) に依存した波束の挙動を表わしている。特に興味深いのは、$t \neq 0$ を固定し、$a_j \to 0$ としたとき $s_j \to \infty$ となることである、i.e. 初期値の波束の広がりが小さいほど、t 秒後の波束が広がる。このような現象は熱方程式の場合には起こらない。また双曲型方程式の場合にも起こらない。(但し、この場合、波束の広がりを台の広がりでおきかえる。)

さて、L の Cauchy 問題の基本解を $E(t,x)$ とおくと $u = E *_x \exp(-\sum \frac{x_j^2}{2a_j})$ とかける。(3) を E の性質と考え、次のような問題をたててみる: 方程式(2)が自明でない C^∞ 解 $\psi(t,x)$ をもち、更に $|\psi * \exp(-\sum \frac{x_j^2}{2a_j})|$ が (3) と似た不等式を満足するとき、P はどのような

代数的条件をみたすか？

この問題に対する結果を記すためには若干の準備を要する。

まず (1) の型をした P に対し、有理数 p を

$$(4)\qquad p = \max_j \left(\deg a_j(\xi)/j\right)$$

により定める。多項式 $a_j(\xi)$ の pj 次の斉次部分を $a_j^\circ(\xi)$ と書き、P の（τ 方向に重みをつけた）主部を

$$(5)\qquad P^\circ(\tau,\xi) = \tau^\ell + \sum_1^\ell a_j^\circ(\xi)\,\tau^{\ell-j}$$

によって定義する。

<u>定義</u>　$\alpha>0$ とする。P が次の2条件のいずれかをみたす時、P を weak α-evolution polynomial とよぶ。

(i)　$\alpha > p$

(ii)　$\alpha = p$ かつ方程式 $P^\circ(\tau,\xi)=0$ は任意の $\xi\in\mathbb{R}^n$ に対して実根のみをもつ。

<u>注意</u>　P が weak p-evolution polynomial となるのは p が整数のときのみであることが容易に示される。

また、weak 1-evolution poly. は弱双曲型方程式に他ならない。

次に、先程の問題の中で'(3)に似た'と不正確に述べた部分は、以下のように捉えることも可能であろう。

(6)

$\psi(t,x) \in C^\infty(\Omega) \cap C^{\ell-1}\left((a,b)\,;\, \mathcal{S}'_x\right)$。

ある定数 $A_j>0$, $c_j>0$, $0<\varepsilon\leqq 1$, $m\geqq 0$ が存在し不等式

$$\left| D_x^\alpha D_t^k \psi(t,x) *_x \exp\left(-\sum_1^n \frac{x_j^2}{2a_j}\right)\right|$$
$$\leqq M_\alpha \prod_{j=1}^n s_j^m \exp\left(\sum_1^n \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_j}{s_j}\right)^2 + c_j\left|\frac{x_j}{s_j^2}\right|^{2-\varepsilon}\right)\right),$$

$\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\forall a_j>0$, $(j=1,\cdots,n)$, $t=t_1,t_2$, $k=0,\cdots,\ell-1$,

が成り立つ。ここで $s_j = s_j(a_j, A_j) = \left(a_j + \dfrac{4A_j^2}{a_j}\right)^{\frac{1}{2}}$.
t_1, t_2 は $a<t_1<t_2<b$ をみたす固定された2点.

但し、前の E（L の基本解）に対して $E=\psi$ とおくとき、(6) は充たされない。一つの理由として $\psi\in C^\infty$

であるが E は C^∞ でないことがあげられる。もし $\psi = E \ast_x \exp(-\sum |x_j|^{2-\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$ とおけば (6) が成り立つ。ゆえに (6) は Gauss 分布を初期データとする Cauchy 問題ではなく、若干修正したデータ (e.g. Gauss 分布 $\ast \exp(-\sum |x_j|^{2-\varepsilon})$) に対応する解の評価と解釈することも可能である。もちろんこの修正により波束の形はあまり変化しない。

<u>定理2</u> 方程式 (2) が不等式 (6) をみたす、自明でない解 ψ をもつための必要十分条件は $P(\tau, \xi)$ のある非定数因子 $Q(\tau, \xi)$ が存在し、各 $Q(\tau, \theta_1\xi_1, \cdots, \theta_n\xi_n)$, $\theta_j^4 = 1$ が weak 2-evolution polynomial となることである。

<u>注意</u> 双曲型方程式のクラスは、つねに $p \leq 1$ である。ゆえに、定理2の代数的条件を満足する。しかし $p<2$ より、(6) における定数 $A_j > 0$ はいくらでも小さくとることができる。ゆえに見かけ上 '$a_j \to \infty$ when $a_j \to 0$' となるが、実際には ψ の波束は広がらない。

今までは方程式(2)を、時間 t に関して有界な領域 Ω で考えてきた。次に全空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ での波束の運動と P との関係を調べてみる.($\alpha=1$ の場合の結果しか得られていない。)

ある'伝播錐'の外側で指数的に2次の order で減衰している解を考える。正確に述べると.

$$
(7)\begin{cases}
\psi(t,x)\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}),\ \text{ある正定数}\ a, A, c,\\
1\leq g<2\ \text{が存在し、不等式}\\
|D_x^\alpha D_t^k\psi(t,x)|\leq M_\alpha \exp(-L_a(|x|-A|t|)+c|t|^g),\\
\qquad\qquad (t,x)\in\mathbb{R}^{n+1},\\
\text{が任意の}\ \alpha\ \text{と}\ k=0,\cdots,l-1\ \text{に対して成り立つ。}\\
\text{ここで}\quad L_a(s)=\begin{cases}\frac{1}{2a}s^2, & s\geq 0,\\ 0, & s<0.\end{cases}
\end{cases}
$$

定理3 方程式(2)が(7)をみたす自明でない解 ψ をもつための必要十分条件は P のある非定数因子が $(1,0,\cdots,0)$ 方向に弱双曲型となることである。

注意 もし P のある因子が d-hyperbolic (Larsson [ ] の意味で)ならば、(7)において $g=2d/(2d-1)$

となるような自明でない解ψが存在することがわかる。たぶんこの逆も成り立つのであろうが、今のところ未解決である。

なお、定理1.2.3は外観こそ大分異なるが、本質的には同一の類型に属している。このことは、次節で述べるように、Fourier変換してみることによりわかる。

§2 証明の方針

まず定理2から始めよう。$\psi(t,x)$をx変数に関してFourier変換したものを$u(t,\xi)$と書くことにする。評価(6)は次のようにいい換えられる：$D_t^k u(t,\xi)$, $k=0,1,\cdots,\ell-1$はζに関する整関数となり、不等式

$$|D_t^k u(t,\zeta)| \leqq M'_N(1+|\xi|)^{-N}\prod(a_j^{-\frac{1}{2}}s_j^{2+m})\times$$
$$\exp\Bigl(\sum\Bigl(\frac{a_j}{2}(\xi_j^2-\eta_j^2)+\frac{1}{2}|s_j\eta_j|^2+c'_j|\eta_j|^{2-\varepsilon}\Bigr)\Bigr),$$
$$N=0,1,\cdots,$$

をみたす。左辺は$a_j>0$に依存しないゆえ$a_j=2A_j\left(\dfrac{1+\xi_j^2}{1+\eta_j^2}\right)^{1/2}$とおくことにする。$N$は十分大きくとり、固定すると

(8) $$|D_t^k u(t,\zeta)| \leqq M\exp(\Phi(\zeta)),$$

ここで
$$\Phi(\zeta)=\sum_1^n 2A_j|\xi_j||\eta_j|+o(|\zeta|^2),$$

となる。今 Φ の主部を $\phi(\zeta)=\Sigma 2A_j|\xi_j||\eta_j|$ とおくと、$\phi(\theta_1\xi_1,\cdots,\theta_n\xi_n)=0$, $\xi\in R^n$, $\theta_j^4=1$ が成立することに注意する。また u はもちろん常微分方程式

(9) $$P(D_t,\zeta)u(t,\zeta)=0,\quad \zeta\in\mathbb{C}^n$$

の解である。

補題として次の定理が必要となる。

<u>定理4</u>　$\alpha>0$ と P に関する次の2条件は同値である。

(a) 方程式(9)の自明でない解 $u(t,\zeta)$ で以下の性質をみたすものが存在する。

$D_t^k u(t,\zeta)$, $0\leqq k<l$, は ζ の整関数となり

(10) $$|D_t^k u(t,\zeta)|\leqq M\exp(\Phi_\alpha(\zeta)),\ \zeta\in\mathbb{C}^n,\ 0\leqq k<l$$

をある2点、$t=t_1, t_2$ $(a<t_1<t_2<b)$ でみたす。ここで Φ_α ((8)とは無関係に)は ξ の連続関数 $\geqq 0$ であり、ある α 次の正斉次連続関数 ϕ_α がみつかり条件

$$\Phi_\alpha(\xi)-\phi_\alpha(\xi)=o(|\xi|^\alpha), \quad |\xi|\to\infty,$$
$$\phi_\alpha(\theta\xi)=0, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \quad \arg\theta=\frac{k}{\alpha}\pi, \quad k=0,1,\cdots,$$

をみたす。

(b) P のある非定数因子は weak α-evolution polynomial となる。

この定理を(8)に適用することにより求める結論が得られる。また $\alpha=1$ とおくことにより定理1の証明にも使える。定理4の証明は基本的には John [2] と同様に行なえる。

定理3についても、同様に u の Fourier 変換をとり方程式(9)の考察に帰着させる。この場合に定理4にあたるのは下記の命題である。

定理5 $\alpha>0$, P に関する下記の2条件は同値となる。

(a) 方程式(9)の自明でない解 $u(t,\zeta)$ で以下の性質をみたすものが存在がする。

$D_t^k u(t,\zeta)$, $0\leqq k<l$, は ζ の整関数となり、不等式

$$|D_t^k u(t,\zeta)| \leqq M\exp\left(c|\zeta|^{2\beta}+h(t)+|t|\Phi_\alpha(\zeta)\right),$$

$$(t,\zeta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n, \qquad j=0,\cdots,l-1.$$

ここで $c, M, \beta>0$, $\frac{\alpha}{\beta}\in\mathbb{Z}$, h, Φ_α は連続, $\geqq 0$, であり,

$$h(t)=o(t^2),\ |t|\to\infty$$

$$\Phi_\alpha(\zeta)-\phi_\alpha(\zeta)=o(|\zeta|^\alpha),\ |\zeta|\to\infty$$

をみたす。ここで ϕ_α はある α次正斉次連続関数であり、

$$\phi_\alpha(\theta\xi)=0,\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ \arg\theta=\frac{k}{\beta}\pi,\ k=0,1,\cdots,$$

をみたす。

(b) P のある非定数因子は weak α-evolution poly. となる。

以上の諸定理の証明の詳細、またこの話題に関連した他の結果については [4], [5] にゆずることにする。

References

1. Hörmander, L.: Linear Partial Differential Operators. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.
2. John, F.: Non-admissible data for differential equations with constant coefficients. Comm. Pure Appl. Math. 10, 391-398(1957).
3. Larsson, E.: Generalized hyperbolicity. Ark. Mat. 7, 11-32(1967).
4. Nishiwada, K,: On weak evolution operators with constant coefficients and spreading of wave packets. Proc. Japan Acad. 55A, 41-44(1979).
5. Nishiwada, K.: Characterization of Partial Differential Operators with Constant Coefficients in Terms of the Wave Packet Spreading for Solutions. (to appear)