数理解析研究所講究録
第 358 巻 1979 年 134-159

Multi-variate Stopping Problem with a Monotone Logical Rule

千葉大 教養 安田正実
理 中神潤一
教育 藏野正美

§1. Formulation

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の分布既知なる p 次元 random vector の process $\mathbb{X}_n \equiv \begin{bmatrix} X_n^1 \\ \vdots \\ X_n^p \end{bmatrix} : \Omega \to R^p$ $n = 1, 2, \cdots$ が与えられている。 p 人の players からなる system はこの process を次々に観測していく。各期毎にそれぞれの player は random vector の表われた値によって, stop または continue を宣言する。各個人の宣言に対して, system 全体の意志をあらかじめ定められた rule にもとづいて決定する。全体の意志決定が continue であれば, process の観測を続け, もし, n 期において stop ということであれば, player i $(i = 1, \cdots, p)$ は net gain として

(1.1) $\qquad Y_n^i \equiv X_n^i - nc^i$

を受けとるとする。ここで c^i は cost を表わす定数。

n期での player i の宣言が stop ならば $\sigma_n^i = 1$, continue ならば $\sigma_n^i = 0$ と対応させると

(1.2) $$\sigma_n^i = \sigma_n^i(\omega) : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$$

であって，ここでは

(1.3) $$\sigma_n^i \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_n)$$

と仮定する。ただし，$\mathcal{B}(\mathbb{X}_n)$ は $\mathbb{X}_n$可測な σ-algebra。つまり，各 player の宣言は自分に対応した値 X_n^i だけでなく他人の値までを情報として考慮しながら宣言をしてよい。

定義 1.1. 用語の定義として

(1.4) $$\sigma^i \equiv (\sigma_1^i, \cdots, \sigma_n^i, \cdots)$$

を player i の individual stopping strategy (i.s.s.)，その集まりを S^iで表わす。 p次元 $\{0,1\}$値 random vector

(1.5) $$\sigma_n \equiv \begin{bmatrix} \sigma_n^1 \\ \vdots \\ \sigma_n^p \end{bmatrix}$$

は n期での player の strategy を表わしている。これの列

(1.6) $$\sigma \equiv (\sigma_1, \cdots, \sigma_n, \cdots)$$

を stopping strategy (s.s.) とよぶ。この全体を S で表わす。

これらの individual な宣言から system全体の意志決定として stop か continue かを定める rule として，p変数の $\{0,1\}$値

logical function :

(1.7) $f = f(x^1, \cdots, x^p)$; $\{0,1\}^p \longrightarrow \{0,1\}$

を導入する。

$x^i, y^i \in \{0,1\}$ とする。すべての $i=1,\cdots,p$ に対して $x^i \leqq y^i$ ならば

(1.8) $f(x^1, \cdots, x^p) \leqq f(y^1, \cdots, y^p)$

が成り立つとき，logical function は monotone とよばれている。(cf. Fishburn [2])

定義 1.2　stopping rule は logical function と同一視し，定数ではなく (i) monotone で (ii) $f(1,1,\cdots 1) = 1$ なる logical function を monotone logical rule (m.l.r.) とよぶ。

性質(ii) $f(1,\cdots,1) = 1$ は unanimity (cf. [2]) とよばれ，これの dual (cf. [2]) として当然 $f(0,0,\cdots 0) = 0$ も考えられ，自然な性質であるが，ここでは仮定する必要がない。$f(0,0,\cdots,0) = 1$ ということは，定数ということで，問題が trivial になってしまう。

定義 1.3　s.s. $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots) \in S$ に対して，各 n での $\sigma_n = \begin{bmatrix} \sigma_n^1 \\ \vdots \\ \sigma_n^p \end{bmatrix}$ から　$f = f(\sigma_n^1, \cdots, \sigma_n^p)$ を考えて

Stopping time (s.t.) $\tau(f,\sigma)$ を

$$(1.9)\qquad \tau(f,\sigma)=n \longleftrightarrow \text{first } n\geq 1 \text{ such that } f(\sigma_n^1,\cdots,\sigma_n^p)=1$$
$$\qquad\qquad =\infty \longleftrightarrow \text{if no such } n \text{ exists}$$

で定義する。

いま (1.1) の Y_n^i にたいして

$$(1.10)\qquad Y^i_{\tau(f,\sigma)} = Y_n \quad \text{on } \{\tau(f,\sigma)=n\}$$
$$\qquad\qquad = 0 \quad \text{on } \{\tau(f,\sigma)=\infty\}$$

と定義すると，はじめて system が stop，つまり "$f=1$" となる time $\tau(f,\sigma)$ で各 player i は $Y^i_{\tau(f,\sigma)}$ を受けとる。

例 1.1. m.l.r の例をいくつか考える。

(i) Kurano, Yasuda, Nakagami [5] では p 人中 r 人以上（ただし $p\geq r\geq 1$）が stop と宣言すれば system が stop という rule で議論している。これは平等な marority rule で

$$(1.11)\qquad f(\sigma_n^1,\cdots,\sigma_n^p)=1 \longleftrightarrow \sum_{i=1}^p \sigma_n^i \geq r$$
$$\qquad\qquad =0 \longleftrightarrow \qquad < r$$

である。たとえば $p=3$，$r=2$ ならば + を論理和，・を論理積として $f(\sigma_n^1,\sigma_n^2,\sigma_n^3)=\sigma_n^1\cdot\sigma_n^2+\sigma_n^2\cdot\sigma_n^3+\sigma_n^1\cdot\sigma_n^3$ である。

(ii) 必ずしも平等とは限らない場合に拡張した

$$(1.12) \qquad f(\sigma_n^1, \cdots, \sigma_n^p) = 1 \iff \sum w_i \sigma_n^i \geqq r$$
$$= 0 \iff \qquad < r$$

（ただし $w_i \geqq 0$ は定数）

なども (1.8) の monotone な性質をもつ。

(iii) monotone な logical function の合成関数は，また monotone であり，これは階層的な意志集約な system（Murakami's representative system, cf. [2]）と考えられ，我々の対象とする rule の例である。

本論では，f を m.l.r として定義される s.t. $t(f,\sigma)$ に対し，vector valued な expected net gain：

$$(1.13) \qquad E[\mathbb{Y}_{t(f,\sigma)}] \qquad \left(\text{但し } \mathbb{Y}_n = \begin{bmatrix} Y_n^1 \\ \vdots \\ Y_n^p \end{bmatrix}\right)$$

を，$S_f \equiv \{\sigma \in S \,;\, P(t(f,\sigma) < \infty) = 1\}$ の class で考える。

<u>定義 1.4</u>　f を m.l.r. とし，s.s. ${}^*\sigma = \begin{bmatrix} {}^*\sigma^1 \\ \vdots \\ {}^*\sigma^p \end{bmatrix}$ が f に関する equilibrium stopping strategy (e.s.s.) であるとは，各 i について

$$(1.14) \qquad E[Y^i_{t(f,{}^*\sigma)}] \geqq E[Y^i_{t(f,{}^*\sigma(i))}]$$

$${}^*\sigma(i) \equiv \begin{bmatrix} {}^*\sigma^1 \\ \vdots \\ \sigma^i \\ \vdots \\ {}^*\sigma^p \end{bmatrix} {}_{(i} \qquad (\text{任意の } \sigma^i \in S^i)$$

で，${}^*\sigma \in S_f$ が成り立つとき。

この e.s.s. を求めるのが，本論の目的である。 この概念は，Nash の non-cooperative game theory にもとづいている。つまり，player i について考えると，他の individual strategy を $*\sigma^1, \dots, *\sigma^{i-1}, *\sigma^{i+1}, \dots, *\sigma^P$ と固定したとき，σ^i を動かした実数値 $Y^i_{\tau(f, *\sigma(i))}$ の最大化であり，$*\sigma^i$ がその max を attain しているということ。

与えられた rule に対して system が stop という event がどんな ω-set で表わされるかを述べる。 いま $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots) \in S$ としたとき，

(1.15) $$A^i_n \equiv \{\omega \in \Omega \mid \sigma^i_n(\omega) = 1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_n)$$

を，player i の n 期での individual stopping event (i.s.e.) とよぶ。 A^i_n が起った，$\omega \in A^i_n$，ならば，player i は stop を宣言しているから

(1.16) $$\begin{array}{lcl} \omega \in A^i_n & \longleftrightarrow & \sigma^i_n(\omega) = 1 \\ \quad\ \notin & \longleftrightarrow & \qquad\quad\ = 0 \end{array}$$

$\{0, 1\}$ 上の logical function f と $\mathcal{B}$ 上の logical function F とを

(1.17)

	論理和	論理積	否定		
f	$+$	$\cdot$	$\bar{\ }$	0	1
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
F	$\cup$	$\cap$	$\bar{\ }$	$\emptyset$	Ω
	和集合	積〃	補〃	空〃	全〃

で対応させる。 たとえば $f(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = \sigma^1 + \sigma^2 \cdot \sigma^3$ と $F(A^1, A^2, A^3) = A^1 \cup (A^2 \cap A^3)$ 。 この対応から

$$(1.18) \qquad \begin{array}{ccc} \omega \in F(A_n^1, \cdots, A_n^p) & \leftrightarrow & f(\sigma_n^1(\omega), \cdots, \sigma_n^p(\omega)) = 1 \\ \notin & \leftrightarrow & = 0 \end{array}$$

したがって system が stop という event は

$$(1.19) \qquad T(f, \{A_n^i\}_{i=1,\cdots,p}) \equiv F(A_n^1, \cdots, A_n^p)$$

で表わされる。

<u>定義 1.5</u> 上の $T(f, \{A_n^i\}_{i=1,\cdots,p})$ を rule f についての i.s.e. $\{A_n^i\}_{i=1,\cdots,p}$ に関する <u>stopping event</u> (s.e.), また rule f に対応する $\mathcal{B}$ 上の logical function F を <u>stopping event function</u> (s.e.f) とよぶ。

明らかに, stopping rule f が monotone であるならば すべての $i = 1, \cdots, p$ に対して $A^i \subset B^i$ のとき

$$(1.20) \qquad F(A^1, \cdots, A^p) \subset F(B^1, \cdots, B^p)$$

が成り立っている。

m.l.r のもとでの strategy の形を明らかにするため, 次の問題を考えてみる。

$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^p \end{bmatrix}$ を $E|X^i| < \infty$ $(i=1,\cdots,p)$ なる p次元 random variable で $\{A^i\}_{i=1,\cdots,p}$ を i.s.e., f は monotone であるとして systemの

s.e. を $T(\{A^i\}) = T(f, \{A^i\}_{i=1,\cdots,p}) = F(A^1, \cdots, A^p)$ とする。いうまでもなく，各 player の宣言は A^i が起ったかどうかによって決めていて，system の決定は s.e. $T(\{A^i\})$ によって意志決定される。いま system が stop ならば player i は $X^i - c^i$, continue ならば $v^i - c^i$ なる net gain を受けとるものとする。ここで c^i, v^i は定数。このとき，player i の expected net gain は

$$(1.21) \qquad E[(X^i - c^i) I_{T(\{A^i\})}] + P(\overline{T(\{A^i\})})(v^i - c^i)$$
$$= E[(X^i - v^i) I_{T(\{A^i\})}] + v^i - c^i$$

で与えられる。ただし I は indicator を表わす。一般に

$f(x^1, \cdots, x^p) = x^i \cdot f(x^1, \cdots, \overset{i}{1}, \cdots, x^p) + \overline{x^i} \cdot f(x^1, \cdots, \overset{i}{0}, \cdots, x^p)$

と書けるから，s.e. の関係式では $T(\{A^i\}) = \{A^i \cap F(A^1, \cdots, \overset{i}{\Omega}, \cdots, A^p)\} \cup \{\overline{A^i} \cap F(A^1, \cdots, \overset{i}{\phi}, \cdots, A^p)\}$ が成り立つ。これを (1.21) に代入すれば (1.21) は

$$(1.22) \qquad \int_{A^i} (X^i - v^i)\{I_{F(A^1,\cdots,\Omega,\cdots,A^p)} - I_{F(A^1,\cdots,\phi,\cdots,A^p)}\} dP$$
$$+ \int_{F(A^1,\cdots,\phi,\cdots,A^p)} (X^i - v^i)\, dP + v^i - c^i$$

に等しい。stopping rule f は monotone としているから，(1.20) より $I_{F(A^1,\cdots,\Omega,\cdots,A^p)} - I_{F(A^1,\cdots,\phi,\cdots,A^p)} \geqq 0$ である。したがって $A^1, \cdots, A^{i-1}, A^{i+1}, \cdots, A^p$ を固定して $A^i \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ を動かしたとき，player i の maximum expected net gain は

(1.23) $\quad {}^*A^i \equiv \{ X^i \geqq v^i \}$

のときに attain され，その値は

(1.24) $$\int_\Omega (X^i - v^i)^+ I_{F(A^1,\cdots,\Omega,\cdots,A^p)} dP - \int_\Omega (X^i - v^i)^- I_{F(A^1,\cdots,\phi,\cdots,A^p)} dP$$

である。 ここで $X^+ = \max(X, 0)$, $a^- = \max(-X, 0)$ 。

このことから，上の形に帰着される問題では，maximum を attain する i.s.e. は (1.23) の形で，random vector $\mathbb{X}$ のうち自分の値 X^i だけにしか依存しないこともわかった。 これは直感的にもうなづける。 要するに非協力であり，他人の値は自分の利得にならないから，自分の値だけに注目していればよいということである。 また自分の宣言が，どの程度 system にくみいれてくれるかは別にして，自分の値を大きくしたければ，あるレベル v^i より大なる観測が現われたら stop と宣言すべきということを (1.23) は意味している。 注意として，monotone でない一般の rule では必ずしもこの形 (1.23) にはならない。

この section の最後に Kadane [4] の winning class との関係を述べる。 これは Sakaguchi [6] の conjecture （多人数による秘書採用の問題での Reversibility ）で用いられた rule である。 彼は Reversibility の証明が目的であったので，順序についての

仮定をしているが，ここでは次のように定義する。

<u>定義1.6</u>　$p>1$ を players の数。$\{1,2,\cdots,p\}$ の部分集合の集まり $\mathcal{W}$ が winning class であるとは

(i)　$\{1,2,\cdots,p\}\in\mathcal{W}$

(ii)　$W\in\mathcal{W}$ で $W'\supset W$ ならば $W'\in\mathcal{W}$

いま，l 人の player $i_1,\cdots,i_l$ が stop と宣言したとする。集合 $\{i_1,\cdots,i_l\}$ が $\mathcal{W}$ の要素ならば system は stop と決定し，そうでなければ continue という rule である。

$\{1,2,\cdots,p\}$ の空でない部分集合 W と p 次元立方体の頂点 x とは

$$\mathcal{W}\ni W=\{i_1,\cdots,i_l\}$$
$$\updownarrow$$
$$R^p\ni x=(x^1,\cdots,x^{i_1},\cdots,x^{i_l},\cdots,x^p)$$

ただし $\left(\begin{array}{ll} x^{i_k}=1 & k=1,\cdots,l, \\ x^j=0 & j\neq i_1,\cdots,i_l \end{array}\right)$

で1対1対応できる。また，2つの対応 $W\longleftrightarrow x\in R^p$, $W'\longleftrightarrow x'\in R^p$ があるとき，$W\subset W'$ である必要十分条件は，成分毎に $x\leqq x'$ となること。したがって class $\mathcal{W}$ に対応する頂点の集合を ∇ とおいて，logical function f を $f(x^1,\cdots,x^p)=1$，$(x^1,\cdots,x^p)\in\nabla$,

$f(x^1,\cdots,x^p)=0$ その他，と定義すれば次の定理を得る。

<u>定理 1.1</u>　p 人の winning class $\mathcal{W}$ による stopping rule と，p 変数の logical function f が m.l.r. であることとは同値。

§2. Finite horizon case

観測期間が与えられた $N<\infty$ で制限されている場合をとり扱う。次の仮定をする。

<u>仮定 2.1</u>

(a) 任意の $\sigma\in\mathcal{S}$ に対して $\sigma_N^i=1$　$i=1,\cdots,p$。

(b) random vector $\mathbb{X}_1,\cdots,\mathbb{X}_N$ は independent で，各 n で $E|X_n^i|<\infty$　$i=1,\cdots,p$。

(c) rule f は m.l.r.。

我々はまず次の p 次元 vector 列 $v_n=\begin{bmatrix} v_n^1 \\ \vdots \\ v_n^p \end{bmatrix}$ を定義する。

(2.1)
$$v_{n+1}\equiv v_n-\mathbb{C}+\begin{bmatrix} E[(X_{N-n}^1-v_n^1)^+\beta_n^{F\{1\}}(v_n^{\{1\}}\,|\,X_{N-n}^1)] \\ \qquad -E[(X_{N-n}^1-v_n^1)^-\alpha_n^{F\{1\}}(v_n^{\{1\}}\,|\,X_{N-n}^1)] \end{bmatrix}$$

$$
\left[\begin{array}{l}
\cdots \qquad\qquad \cdots \\
E[(X^p_{N-n}-v^p_n)^+ \beta_n^{F\{p\}}(v_n^{\{p\}} \mid X^p_{N-n})] \\
\qquad\qquad - E[(X^p_{N-n}-v^p_n)^- \alpha_n^{F\{p\}}(v_n^{\{p\}} \quad X^p_{N-n})]
\end{array}\right]
$$

$$n \geqq 1$$

(2.2)
$$v_1 \equiv \begin{bmatrix} E[X^1_N] \\ \cdots \\ E[X^p_N] \end{bmatrix} - \mathbb{C}$$

ここで

(2.3)
$$
\begin{aligned}
\beta_n^{F\{i\}}(v_n^{\{i\}}) &\equiv P(F({}^*A^1_{N-n},\cdots,\overset{i}{\Omega},\cdots,{}^*A^p_{N-n}) \mid X^i_{N-n}) \\
\alpha_n^{F\{i\}}(v_n^{\{i\}}) &\equiv P(F({}^*A^1_{N-n},\cdots,\phi,\cdots,{}^*A^p_{N-n}) \mid X^i_{N-n})
\end{aligned}
$$

$v_n^{\{i\}} \equiv (v^1_n,\cdots,v^{i-1}_n,v^{i+1}_n,\cdots,v^p_n) \in R^{p-1}$ $\quad i=1,\cdots,p$ で，F は m.l.r. f に対応する s.e.f. であり，${}^*A^i_{N-n} \equiv \{X^i_{N-n} \geqq v^i_n\} \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_{N-n})$ とする。

明らかに，すべての f, $\sigma \in S$ に対して $P(t(f,\sigma) \leqq N) = 1$ が成り立っている。

<u>定理 2.1</u>　　(2.1), (2.2) の vector 列 $\{v_n\}$ から定まる s.s. ${}^*\sigma$;

(2.4)
$$
\begin{aligned}
{}^*\sigma^i_n(\omega) &= 1 \quad \text{if} \quad \omega \in {}^*A^i_n \text{ , i.e., } X^i_n(\omega) \geqq v^i_{N-n} \\
&= 0 \quad \text{if} \quad \quad \notin \qquad\qquad\qquad < \\
&(1 \leqq n \leqq N-1) \\
{}^*\sigma^i_N(\omega) &= 1 \quad (\text{すべての } \omega \in \Omega \text{ に対して})
\end{aligned}
$$

は m.l.r. f に関する e.s.s. であり，

(2.5)
$$E[Y_{t(f,{}^*\sigma)}] = v_N$$

が成り立つ。

とくに $\mathbb{X}_n$ で $X_n^1, \cdots, X_n^p$ も independent で X_n と同一分布とすれば (2.1) は

$$(2.6) \qquad v_{n+1}^i = v_n^i - c^i + \beta_n^{F(i)} E(X_{N-n} - v_n^i)^+ - \alpha_n^{F(i)} E(X_{N-n} - v_n^i)^-$$

ただし $\beta_n^{F(i)} \equiv \beta_n^{F(i)}(v_n^{(i)}) \equiv P(F({}^*A_{N-n}^1, \cdots, \underset{i}{\Omega}, \cdots, {}^*A_{N-n}^p))$, $\alpha_n^{F(i)} \equiv \alpha_n^{F(i)}(v_n^{(i)}) \equiv P(F({}^*A_{N-n}^1, \cdots, \underset{i}{\phi}, \cdots, {}^*A_{N-n}^p))$, $i=1, \cdots, p$, となる。

さらに cost vector $\mathbb{C}$ が $c^i = c^j$ かつ m.l.r. f が i, j について対称；

$$(2.7) \qquad f(\cdots, \underset{i}{\sigma^i}, \cdots, \underset{j}{\sigma^j}, \cdots) = f(\cdots, \underset{i}{\sigma^j}, \cdots, \underset{j}{\sigma^i}, \cdots)$$

ならば $v_n^i = v_n^j \quad n=1, \cdots, N$。 さらにまた，ある定数 c があって $c^i = c \quad i=1, \cdots, p$ ，すべての組に対して f が対称ならば つまり，cost も rule も平等ならば v_n の成分，expected net gain は等しくなる。

<u>例 2.1</u>　　3人の player 1, 2, 3 が $\overbrace{\text{1 人}}^{\text{N人の中から}}$ の秘書を選ぼうとしている。 rule は player 1 が "yes" (stop と宣言) というか，または player 2 と 3 がともに "yes" と宣言した場合に彼女は accept される。 つまり

$$(2.8) \qquad f(x^1, x^2, x^3) = x^1 + x^2 \cdot x^3 \qquad x^i \in \{0, 1\}$$

a_n^i, y_n^i を n 番目に表われた秘書に対する player i についての

real rank, relative rank とし, player 間 では real rank が独立と仮定する。 $\mathbb{X}_n = \begin{bmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \\ X_n^3 \end{bmatrix}$ を $X_n^i \equiv P(a_n^i = 1 \mid y_n^i)$ と定めると $X_n^i = \begin{cases} n/N & \text{if } y_n^i = 1 \\ 0 & \text{if } y_n^i \neq 1 \end{cases}$ である。 任意の stopping time $t = t(f, \sigma)$ $\sigma \in S$ に対して

(2.9) $$E\,\mathbb{X}_t = \begin{bmatrix} P(a_t^1 = 1) \\ P(a_t^2 = 1) \\ P(a_t^3 = 1) \end{bmatrix}$$

となるから, 我々はこれについて equilibrium strategy を考える。

定理 2.1 より strategy を定める v_n^i $i=1,2,3$ は

(2.10) $$v_{n+1}^i = v_n^i + \beta_n^{\{i\}} E[(X_{N-n}^i - v_n^i)^+] - \alpha_n^{\{i\}} E[(X_{N-n}^i - v_n^i)^-]$$

ただし $\beta_n^{\{1\}} \equiv 1$, $\alpha_n^{\{1\}} \equiv P(X_{N-n}^2 \geqq v_n^2, X_{N-n}^3 \geqq v_n^3)$, $\beta_n^{\{i\}} \equiv P(\{X_{N-n}^1 \geqq v_n^1\} \cup \{X_{N-n}^{5-i} \geqq v_n^{5-i}\})$ $i=2,3$ $\alpha_n^{\{2\}} \equiv \alpha_n^{\{3\}} \equiv P(X_{N-n}^1 \geqq v_n^1)$

(2.11) $$v_1^i = 1/N \qquad i=1,2,3$$

明らかに (2.8) の rule は player 2, 3 については対称だから $v_n \equiv v_n^1$, $w_n \equiv v_n^2 = v_n^3$ とおいて(2.10)を計算すればよい。 しかし, ここでは次のような考え方で進む。

いま $v_{N-n} > n/N$ とすると w_{N-n} の値がどうあろうと, $v_{N-n+1} > (n-1)/N$ であり, w についても同様なことが成り立つ。 また $v_n \geqq w_n$ $n=1,\cdots,N$ もわかる。 したがって equilibrium strategy は次の形である: player 1 ははじ

めの$m-1$人までは観測するだけで，m人以降でいままでと比較して best rank な秘書が現われたら "yes" を宣言する。player 2, 3 でも同様で，$l-1$人までは観測するだけで，それ以降に，それぞれにとって best が現われたら，それぞれが "yes" を宣言する。ここで $l \leqq m$ である。我々はこのような (m, l) の形を strategy とした場合の各 player の expected gain $\varphi^1(m,l)$，$\varphi^2(m,l)=\varphi^3(m,l)$ を計算する。これを (m, l) について maximize すれば equilibrium となる。その前に $N\to\infty$ としたものを考える。このとき $m/N \longrightarrow a$ なる極限値があると仮定すれば

$$(2.12)\quad \varphi^1(m,l)\longrightarrow -a\log a\ ,\quad \varphi^2(m,l)\longrightarrow 0$$

を得る。player 1 は $a=e^{-1}$ のとき maximum となる。これは1次元の秘書選択問題（Gilbert, Mosteller[3]）と同じ値で，これから次のことが考えられる。この問題では best 秘書以外，利得は0となるから，(2.8)の rule の場合 player 1 の1人問題で player 2, 3 は無視されている。player 2 と3にとっては，同時にそれぞれの best が現われなければ利得が得られず，たぶん，この事象の起る確率が小さすぎるのである。

§ 3. Infinite horizon case

期間 $N=\infty$ なる infinite horizon の場合を考える。

仮定 3.1

(a) random vector の process $\mathbb{X}_1, \cdots, \mathbb{X}_n, \cdots$ と $\mathbb{X}$ は independent identically distributed で $E|X^i|<\infty$。

(b) $\mathbb{C}$ は positive ($C^i>0$) な定数 vector。

(c) f は m.l.f. とし，対応する s.e.f. を F で表わす。

(d) vector $v=\begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^p \end{bmatrix}$ に関する方程式：

$$(3.1)\quad \begin{bmatrix} E[(X^1-v^1)^+\beta^{F\{1\}}(v^{\{1\}}|X^1)]-E[(X^1-v^1)^-\alpha^{F\{1\}}(v^{\{1\}}|X^1)] \\ \cdots \\ E[(X^p-v^p)^+\beta^{F\{p\}}(v^{\{p\}}|X^1)]-E[(X^p-v^p)^-\alpha^{F\{p\}}(v^{\{p\}}|X^p)] \end{bmatrix}=\mathbb{C}$$

は解をもつ。　ここで

$$\beta^{F\{i\}}(v^{\{i\}}\ X^i)\equiv P(F(A^1,\cdots,\underset{i}{\Omega},\cdots,A^p)\,|\,X^i)$$

$$\alpha^{F\{i\}}(v^{\{i\}}|X^i)\equiv P(F(A^1,\cdots,\underset{i}{},\cdots,A^p)\,|\,X^i)$$

で $v^{\{i\}}\equiv(v^1,\cdots,v^{i-1},v^{i+1},\cdots,v^p)$，　$A^i\equiv\{X^i\geqq v^i\}$ とする。

もし $p=1$ のとき m.l.r. f は定義 1.2 より $f(0)=0$ であるから (d) の方程式は $E(X-v)^+=C$ の形でよく知られた 1 次元 stopping problem である。(Chow, Robbins [1])

定理3.1　仮定3.1のもとで (3.1) の解 $^*v = \begin{bmatrix} ^*v^1 \\ \vdots \\ ^*v^p \end{bmatrix}$ から

$$(3.2) \qquad {}^*\sigma_n^i(\omega) = 1 \quad \text{if} \quad X_n^i(\omega) \geqq {}^*v^i$$
$$= 0 \quad \text{if} \quad <$$

で定まる strategy $^*\sigma = (^*\sigma_1, \cdots, ^*\sigma_n, \cdots)$ は m.l.r. f に関する

e.s.s. で $^*\sigma \in S_f$ かつ

$$(3.3) \qquad E[Y_{t(f, {}^*\sigma)}] = {}^*v$$

が成り立つ。

証明は truncation を行ない，$\overbrace{Y_n^i \to -\infty}^{\text{(b) の仮定より}}$, $n \to \infty$ が本質である。

もし (b) で $\mathbb{C} = 0$ のときには $^*\sigma \in S_f$ と限らない。

そこで

系3.2　もし (b) の代わりに

(b′)　$\mathbb{C} = 0$

であるときは，さらに仮定をつけ加えて

(e)　$\mathbb{X}$ は確率1で有界

(f)　(3.2) の s.s. $^*\sigma$ が $P(t(f, {}^*\sigma) < \infty) = 1$

とするならば，定理3.2 の結果は成り立つ。

さらに簡単のため

(a′)　各 n で X_n^i　$i = 1, \cdots, p$ も independent

とすれば (3.1)の方程式は

$$(3.4) \qquad \frac{E(X^i-v^i)^+}{E(X^i-v^i)^-} = \rho_F^{\{i\}}(v^{\{i\}})$$

ここで $\rho_F^{\{i\}}(v^{\{i\}}) \equiv \dfrac{\alpha^{F\{i\}}(v^{\{i\}})}{\beta^{F\{i\}}(v^{\{i\}})} \equiv \dfrac{P(F(A^1,\cdots,\phi,\cdots,A^p))}{P(F(A^1,\cdots,\Omega,\cdots,A^p))}$

で表わされる。

$P(t(f,{}^*\sigma)=\infty)=1$ を含めれば $\overbrace{\lim_{n\to\infty} v_n^i}^{(3.4)\text{の解は}} \equiv v^i$ の存在する場合の net gain の値を求めることができる。よく知られているように (3.4)の左辺は v^i の関数として，連続かつ単調減少。 また右辺は f が monotone であるから (1.20) より

$$(3.6) \qquad 0 \leqq \rho_F^{\{i\}}(v^{\{i\}}) \leqq 1$$

したがって

<u>定理3.3</u> 任意の m.l.f f に対し (b′) のもとで (e), (f) をさらに仮定すれば expected net gain v の値は 各 i に対して

$$(3.7) \qquad EX^i \leqq v^i \leqq \sup\{x\,;\,P(X^i>x)=1\}$$
$$(= X^i\text{の max. increasing point})$$

(3.7) の右の等号は $\rho_F^{\{i\}}(v^{\{i\}})=0$，左の等号は $\rho_F^{\{i\}}({}^*v^{\{i\}})=1$ のとき。

これらの等号の意味するところを考えてみる。

$$(3.8) \qquad \rho_F^{\{i\}}(v^{\{i\}})=0 \longleftrightarrow F(A^1,\cdots,\overset{i}{\phi},\cdots,A^p)=\phi$$

$$\longleftrightarrow f(\sigma^1,\cdots,0,\cdots,\sigma^p)=0$$

すなわち，player i が　$\sigma^i=0$，continue と宣言するときは，他 player がどう宣言しようとも continue する。(stop と宣言しても stop しない場合はあり得る)　これは，stop したくないとき，continue するから，この player i は"veto"の権利をもつと考えられる。つぎに

(3.9) $$\rho_F^{\{i\}}(v^{\{i\}})=1 \longleftrightarrow F(A^1,\cdots,\phi,\cdots A^p)=F(A^1,\cdots,\Omega,\cdots,A^p)$$
$$\longleftrightarrow f(\sigma^1,\cdots,0,\cdots,\sigma^p)=f(\sigma^1,\cdots,1,\cdots,\sigma^p)$$

すなわち　$\sigma^i=0$ とか 1 とか宣言しても system の決定は変らない。つまり player i は決定に影響を与えない"outsider" におかれている。　(a)－(f)，(a′) に加えて

(a″)　各 n, i で X_n^i は X と identically distributed

と仮定すれば　1つの m.l.r. f に対する player 間の比較として

__定理3.4__　(3.4) の解を $v=\begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^p \end{bmatrix}$ とする。　i, j に対して

(3.10)　$v^i \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} v^j$ なる必要十分条件は $\rho_F^{\{i\}}(v^{\{i\}}) \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} \rho_F^{\{j\}}(v^{\{j\}})$

__例3.1__　3人 player ですべて一様分布　$X \sim U(0,1)$ と

とする。 m.l.r. f は $f(x^1,x^2,x^3)=x^1+x^2\cdot x^3$ を考える。

$v=\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ v^{(3)} \end{bmatrix}$ を gain とすると player 2 と 3 は対称だから

$v\equiv v^{(1)}$, $w\equiv v^{(2)}=v^{(3)}$ とおける。 簡単な計算で

$\rho_F^{\{1\}}(w)=(1-w)^2$, $\rho_F^{\{2\}}(v,w)=\rho_F^{\{3\}}(v,w)=\dfrac{1-v}{1-vw}$

を得る。 一方 $X\sim U(0,1)$ であるから, $\dfrac{E(X-v)^+}{E(X-v)^-}=\dfrac{(1-v)^2}{v^2}$

(3.4) の関係式から $\dfrac{(1-v)^2}{v^2}=(1-w)^2$. ゆえに $v=\dfrac{1}{2-w}$。

これから $\rho_F^{\{3\}}\left(\dfrac{1}{2-w},w\right)=\dfrac{1}{2}$ $(w\neq 1)$。 w の値は

(3.7) より 等号を除いて $\frac{1}{2}<w<1$ であるから, 明らかに

$\rho_F^{\{1\}}<\rho_F^{\{2\}}=\rho_F^{\{3\}}$。 したがって player 1 のほうが

player 2, 3 より gain は大きくなる。

この定理と同様な特徴づけは, rule の違いによる比較としても求められ

系 3.5 2つの m.l.r. f, g に対する s.e.f. を F, G とするとき, (3.4) の解を v_F, v_G と表わせば

(3.11) $v_F^i \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} v_G^j$ なる必要十分条件は $\rho_F^{\{i\}}(v_F^{\{i\}}) \left\{\begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}\right\} \rho_G^{\{j\}}(v_G^{\{j\}})$

となるが, あまり有効ではない。 各 i についての比較として, 次の十分条件を述べる。

<u>定理3.6</u>　m.l.r. f, g において　任意の $x^j \in \{0,1\}, (j \neq i)$

$$(3.12) \quad \begin{aligned} f(x^1,\cdots,\underset{i}{1},\cdots,x^p) &\geq g(x^1,\cdots,\underset{i}{1},\cdots,x^p) \\ f(x^1,\cdots,\underset{i}{0},\cdots,x^p) &\leq g(x^1,\cdots,\underset{i}{0},\cdots,x^p) \end{aligned}$$

ならば　$v_F^i \geqq v_G^i$　である。

仮定をつけ加えて

(c′)　m.l.r. f はすべての組で対称，すなわち平等なrule

とし，

(a‴)　X は有界区間で，密度関数をもつ

とすれば　(3.4) の方程式は1変数に関するもので明らかに解をもつ。　そこで　$\rho_F(v) \equiv \rho_F^{\{i\}}(v^{\{i\}})$　とおいて　この $\rho_F(v)$ を計算すれば　次の定理を得る。

<u>定理3.6</u>　p 人の player がいて，r 人以上 stop と宣言したら system は stop するという rule の s.e.f. を $F[r]$ と表わせば（平等な majority rule），それに対応する gain $v_{F[r]}$ は

$$(3.12) \quad v_{F[p]} > v_{F[p-1]} > \cdots > v_{F[1]} > EX$$

ただし　$F[p]$ の unanimity の場合，stopping time $= \infty$ で $v_{F[p]} = \sup\{x \,;\, P(X > x) = 1\}$。

§4. Numerical Example

$p=3$ のとき，考えられる自明でない8通りのruleに対する数値計算を行なう。ここで分布は一様分布 $U(0,1)$ とする。Table 1, Figure 1,2,3 を見よ。

Refference

[1] Chow, Y. S., Robbins, H. and Siegmund, D. : Great Expectation: The Theory of Optimal Stopping, Houghton Mifflin, Boston, 1971.

[2] Fishburn, P. C. : The Theory of Representative Majority Decision, Econometrica, 39, (1971), 273-284.

[3] Gilbert, J. and Mosteller, F. : Recognizing the Maximum of Sequence, Amer. Stat. Assoc. 61 (1966), 35-73.

[4] Kadane, J. B. : Reversibility of a Multilateral Sequential Game : Proof of a Conjecture of Sakaguchi, J. Op. Res. Soc. Japan, 21 (1978), 509-516.

[5] Kurano, M., Yasuda, M. and Nakagami, J. : Multi-variate Stopping Problem with a Majority Rule, (preprint)

[6] Sakaguchi, M. : A Bilateral Sequential Games for Sums of Bivariate Random Variables, J. Op. Res. Soc. Japan, 21 (1978), 486-508.

番号	stopping rule $f(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$	comment	$v^1 = \lim_{n\to\infty} v_n^1$ (pl. 1) v^2 (pl. 2) v^3 (pl. 3)
①	$\sigma^1+\sigma^2+\sigma^3$	p=3, r=1 の平等な majority	0.5437 0.5437 0.5437
②	$\sigma^1+\sigma^2$	pl. 1 と pl. 2 は同じ力でそれぞれ単独で stop できる pl. 3 は outsider	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180$ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\frac{1}{2}$
③	$\sigma^1+\sigma^2\cdot\sigma^3$	pl. 1 がやゝ強 pl. 2 と 3 は協同して stop できる	$\sqrt{2}/2 = 0.7071$ $2-\sqrt{2} = 0.5858$ $2-\sqrt{2}$
④	$\sigma^1\cdot\sigma^2+\sigma^2\cdot\sigma^3+\sigma^1\cdot\sigma^3$	p=3, r=2 の平等な simple majority	$\sqrt{2}/2 = 0.7071$ $\sqrt{2}/2$ $\sqrt{2}/2$
⑤	σ^1	pl. 1 が dictator pl. 2 と 3 は outsider	1 ½ ½
⑥	$\sigma^1\cdot\sigma^2+\sigma^1\cdot\sigma^3$	pl. 1 は pl. 2 または 3 の協力を得て stop できる pl. 1 は veto をもつ	1 $(\sqrt{5}-1)/2 = 0.6180$ $(\sqrt{5}-1)/2$
⑦	$\sigma^1\cdot\sigma^2$	pl. 1 は pl. 2 の協力で stop できる. pl. 3 は outsider	1 1 ½
⑧	$\sigma^1\cdot\sigma^2\cdot\sigma^3$	unanimity, p=3, r=3 の majority	1 1 1

Table 1. p=3 で一様分布 U(0, 1) のとき, $v^i = \lim v_n^i$ の値, つまり (3.4) の解

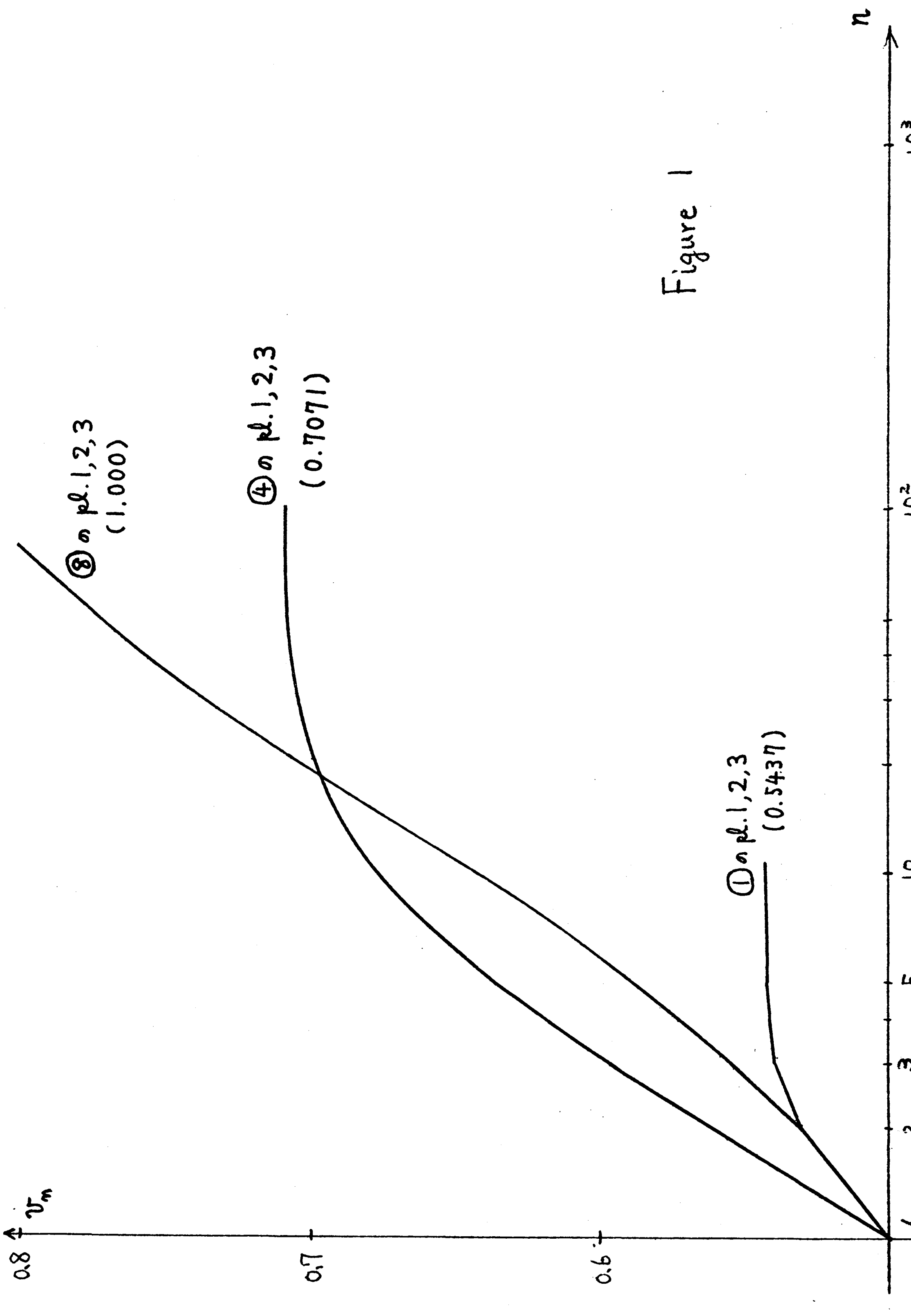

8 ∩ pl.1,2,3
(1.000)
4 ∩ pl.1,2,3
(0.7071)
1 ∩ pl.1,2,3
(0.5437)
v_m
0.8
0.7
0.6
n
1
2
3
5
10
10^2
10^3

Figure 1

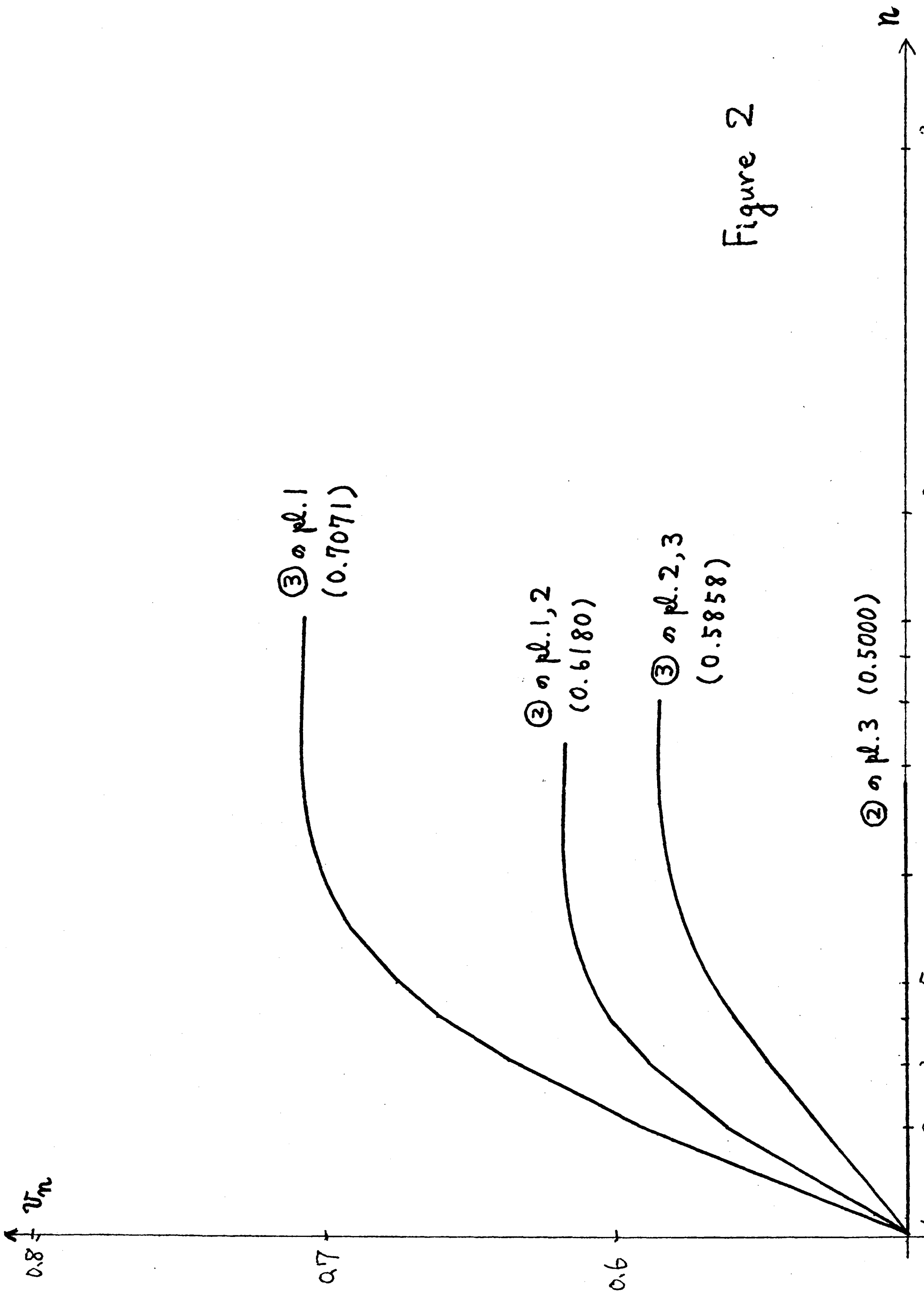
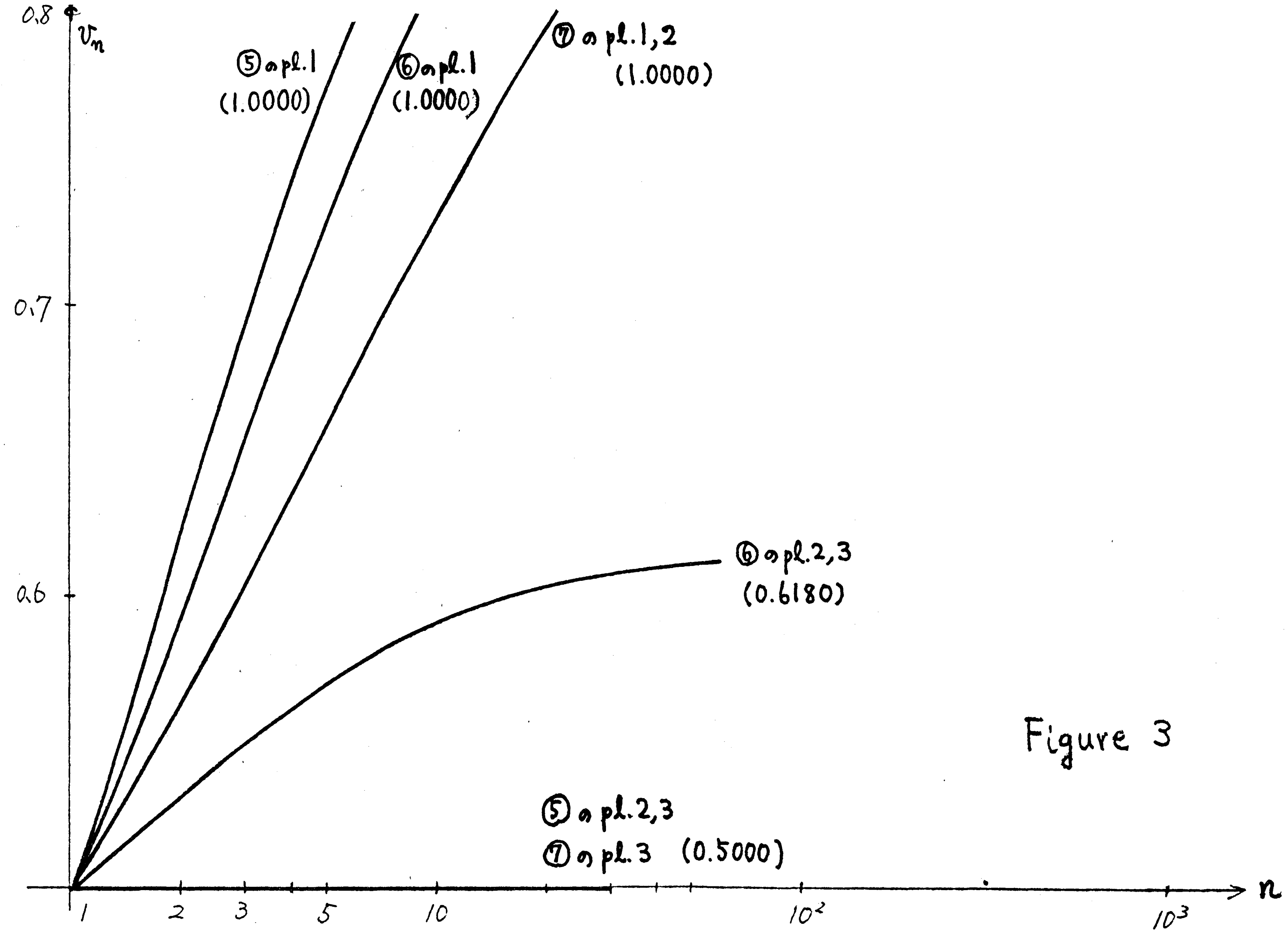

③ の pl.1
(0.7071)
② の pl.1,2
(0.6180)
③ の pl.2,3
(0.5858)
② の pl.3 (0.5000)
v_n
0.8
0.7
0.6
n
1
2
3
5
10
10^2
10^3

Figure 2



0.8
0.7
0.6
v_n
⑤ の pl.1
(1.0000)
⑥ の pl.1
(1.0000)
⑦ の pl.1,2
(1.0000)
⑥ の pl.2,3
(0.6180)
⑤ の pl.2,3
⑦ の pl.3 (0.5000)
1
2
3
5
10
10^2
10^3
n

Figure 3