数理解析研究所講究録
第358巻 1979年 219-238

単一システムの最適予防保全方式について

名古屋工業大学　児玉　正憲
安達　公一

1. はじめに

一般にシステムの信頼性解析では修理によってユニットまたはシステムは再生し，新品同様になると仮定している。この仮定が成立しないこともあるので，仮定が成立しないとき信頼性への影響を考察することは重要である。ここでは予防取替を考慮した修理によって必ずしも再生しない単一システムの時点アベイラビリティのラプラス変換形，定常アベイラビリティを求め，さらに定常アベイラビリティを最大にする事前取替時期（予防保全時期）を決定するという意味での最適予防保全方式を考察する。

Barlow, R and L. Hunter [1]は“稼動時間がT（一定値）に達すると取替を行なうがそれまでに起った故障に対しては小修理（minimal repair）のみ行なう”という方策を提案した。小修理というのは普通扱われている修理のように新品同様(再

生)の状態に戻るのではなく，小修理直前の状態に戻るものをいう。　これに対して Makabe,H and H.Morimura[2] は“n 回目の故障までは小修理を行ない，(n+1) 回目の故障時に取替を行なう”という方策を考えた。　しかし，現実には小修理の仮定が成立しない場合も多いので，本論文ではこの仮定をはずし，修理を受けたシステムは修理を受ける前の故障分布とは必ずしも同一でない故障分布に従って稼動するものとする。

2.　記号とモデルの定義

記号

X_i　：再生後，第 i 回目の稼動中のシステムの寿命を表わす確率変数　($1 \leq i \leq n$)

Y_j　：再生後，第 j 回目の修理中のシステムの修理時間を表わす確率変数　($1 \leq j \leq n-1$)

Y　：再生後，第 n 回目の故障 (major breakdown) による取替が完了するまでの時間を表わす確率変数

Z_1　：予防取替 (事前取替) を行なう時間間隔を表わす確率変数

Z_2　：予防取替が完了するまでの時間を表わす確率変数

$F_i(t), f_i(t), \lambda_i(t), m_i$　：X_i の分布関数，密度関数，$f_i(t)/\bar{F}_i(t)$ (瞬間故障率)，期待値 (有限) .

$G_j(t), g_j(t), \mu_j(t), \theta_j$ ：Y_jの分布関数，密度関数，$g_j(t)/\bar{G}_j(t)$（瞬間修理率），期待値（有限）．

$A(t), a(t), \alpha(t), T$ ：Z_1の分布関数，密度関数，$a(t)/\bar{A}(t)$，期待値（有限）．

$B(t), b(t), \beta(t), T_r$ ：Z_2の分布関数，密度関数，$b(t)/\bar{B}(t)$，期待値（有限）．

$B^*(t), b^*(t), \beta^*(t), T_r^*$ ：Yの分布関数，密度関数，$b^*(t)/\bar{B}^*(t)$，期待値（有限）．

$F_{1\cdots i}(y) = \int_0^y F_i(y-x)\,dF_{1\cdots i-1}(x)$，　（$2 \le i \le n$）．

$f_{1\cdots i}(y) = dF_{1\cdots i}(y)/dy$，　（$2 \le i \le n$）．

$\gamma_{1\cdots i}(y) = f_{1\cdots i}(y)/\bar{F}_{1\cdots i}(y)$，　（$2 \le i \le n$）．

一般に$C(x)$が分布関数のとき，$\bar{C}(x)$は$1-C(x)$を表わす。

$p_1(t;x_1)\Delta x_1$ ：P{時刻tで再生後，1回目の稼動中のシステムの稼動経過時間がx_1と$x_1+\Delta x_1$の間にある}．

$p_i(t;\sum_1^{i-1} y_k, x_i)\Delta x_i$ ：P{時刻tで再生後，$(i-1)$回目までの全稼動経過時間が$\sum_1^{i-1} y_k$で，i回目の稼動中のシステムの稼動経過時間がx_iと$x_i+\Delta x_i$の間にある}，（$2 \le i \le n$）．

$q_j(t;\sum_1^{j} y_k, z_j)\Delta z_j$ ：P{時刻tで再生後j回目までの全稼動経過時間が$\sum_1^{j} y_k$で，j回目の修理中のシステムの修理経過時間がz_jとΔz_jの間にある}，（$1 \le j \le n-1$）

$r(t;z)\Delta z$ ：P{時刻tで予防取替中のシステムの取替経過

時間が z と $z+\Delta z$ の間にある}

$r^*(t;z)\Delta z$ ：P{時刻 t で major breakdown による取替中のシステムの取替経過時間が z と $z+\Delta z$ の間にある}

$p_i(t)$ ：P{時刻 t でシステムが再生後 i 回目の動作の状態}

$p_A(t)$ ：P{時刻 t でシステムが動作の状態} $=\sum_{1}^{n} p_i(t)$

$\delta_{ij} = 1 \quad (i=j) \quad ; \quad 0 \quad (i \neq j)$

一般に関数 $h(x)$ のラプラス変換を $\widetilde{h}(s)$ とする。

モデルの定義

予防取替を考慮した単一システムを考える。 $t=0$（再生点）で新品のシステムを稼動させる。 稼動システムの寿命は一般分布 $F_1(t)$ に従う。 システムの稼動時間が予防取替を行なう時間に達しないとき，第1回目の故障が起きると、ただちに修理を行なう。 修理分布を一般分布 $G_1(t)$ とする。修理完了後必ずしも再生しないでシステムの寿命は $F_1(t)$ と必ずしも同一でない一般分布 $F_2(t)$ に従うとする。 稼動時間の合計 (X_1+X_2) が予防取替を行なう時間に達しないとき、第2回目の故障が起るとただちに修理を行なう。 このときの修理時間分布を一般分布 $G_2(t)$ とする。 修理完了後必ずしも再生しないでシステムの寿命は一般分布 $F_3(t)$ に従うとする。以下稼動時間の合計 $(X_1+X_2+\cdots+X_i)$ が予防取替を行なう時間に

達しないとき第i回目($i \leq n-1$)の故障が起きるとただちに修理を行なう。　修理分布は一般分布$G_i(t)$とする。　修理完了後必ずしも再生しないでシステムの寿命は一般分布$F_{i+1}(t)$に従うとする。　稼動時間の合計が予防取替を行なう時間に達しないときn回目の故障が起きるとmajor breakdown が起ったといい，ただちに事後取替(故障後の取替)を行なう。　このときの取替時間の分布は一般分布$B^*(t)$に従う。　事後取替後システムは再生し，システムは寿命分布$F_1(t)$に従って稼動する。システムの稼動時間の合計が予防取替を行なう時間に達したときシステムに対して予防取替を行なう。　予防取替を行なう時間間隔の分布と完了までの時間分布はそれぞれ一般分布$A(t)$，$B(t)$に従うものとする。　予防取替を行なった後システムは再生し，寿命分布$F_1(t)$に従う。　再生後は上記と同様な動作をくり返す。　以上のシステムの稼動に対する保全方策は次のように記述できる。「次の(i)，(ii)のいずれか早い方が起った時点で，(i)に対しては事後取替，(ii)に対しては事前取替を行ない，それ以前の故障に対しては修理を行なう。

(i)　稼動時間の合計が事前取替を行なう時間に達する前にn回目の故障(major breakdown)が起る。

(ii)　稼動時間の合計が事前取替を行なう時間に達する。

修理によってはシステムは必ずしも再生しないで，事前取

替，事後取替によってはシステムは再生する」。システムの状態推移は図1のようになる。

3. システムの解析

システムの特性より次の差分方程式を得る。

$$p_1(t+\Delta;x_1+\Delta)=p_1(t;x_1)\{1-[\lambda_1(x_1)+\alpha(x_1)]\Delta\}+o(\Delta) \tag{1}$$

$$p_i(t+\Delta;\sum_1^{i-1}y_k,x_i+\Delta)=p_i(t;\sum_1^{i-1}y_k,x_i)\{1-[\lambda_i(x_i)+\alpha(\sum_1^{i-1}y_k+x_i)]\Delta\}$$

$$+o(\Delta),\quad (2\leq i\leq n) \tag{2}$$

$$q_j(t+\Delta;\sum_1^{j}y_k,z_j+\Delta)=q_j(t;\sum_1^{j}y_k,z_j)\{1-\mu_j(z_j)\Delta\}+o(\Delta)$$

$$(1\leq j\leq n-1) \tag{3}$$

$$r(t+\Delta;z+\Delta)=r(t;z)\{1-\beta(z)\Delta\}+o(\Delta) \tag{4}$$

$$r^*(t+\Delta;z+\Delta)=r^*(t;z)\{1-\beta^*(z)\Delta\}+o(\Delta) \tag{5}$$

(1) − (5)より次の差分方程式をうる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}+\lambda_1(x_1)+\alpha(x_1)\right]p_1(t;x_1)=0 \tag{6}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}+\lambda_i(x_i)+\alpha(\sum_1^{i-1}y_k+x_i)\right]p_i(t;\sum_1^{i-1}y_k,x_i)=0$$

$$(2\leq i\leq n) \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z_j}+\mu_j(z_j)\right]q_j(t;\sum_1^{j}y_k,z_j)=0,\quad (1\leq j\leq n-1) \tag{8}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}+\beta(z)\right]r(t;z)=0 \tag{9}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial Z}+\beta^*(Z)\right] r^*(t;Z)=0 \tag{10}$$

これらの方程式は次の境界条件，初期条件のもとで解かれる。

$$P_1(t;0)=\int_0^t r(t;Z)\beta(Z)dZ+\int_0^t r^*(t;Z)\beta^*(Z)dZ \tag{11}$$

$$P_i(t;\sum_1^{i-1}y_k,0)=\int_0^t q_{i-1}(t;\sum_1^{i-1}y_k,Z_{i-1})\mu_{i-1}(Z_{i-1})dZ_{i-1} \qquad (2\le i\le n) \tag{12}$$

$$q_1(t;x_1,0)=P_1(t;x_1)\lambda_1(x_1) \tag{13}$$

$$q_j(t;\sum_1^{j-1}y_k+x_j,0)=P_j(t;\sum_1^{j-1}y_k,x_j)\lambda_j(x_j) \qquad (2\le j\le n-1) \tag{14}$$

$$P_i(t;0,0)=q_j(t;0,0)=0, \qquad (2\le i\le n,\ 1\le j\le n-1) \tag{15}$$

$$r(t;0)=\int_0^t P_1(t;x_1)\alpha(x_1)dx_1+(1-\delta_{1n})\Big[\int_0^t\int_0^{t-y_1}P_2(t;y_1,x_2)\alpha(y_1+x_2) \times dx_2dy_1+\cdots+\int_0^t\int_0^{t-y_1}\cdots\int_0^{t-\sum_1^{n-1}y_k}P_n(t;\sum_1^{n-1}y_k,x_n)\alpha(\sum_1^{n-1}y_k+x_n)dx_n dy_{n-1}\cdots dy_1\Big] \tag{16}$$

$$r^*(t;0)=\delta_{1n}\int_0^t P_1(t;x_1)\lambda_1(x_1)dx_1+(1-\delta_{1n})\Big[\int_0^t\int_0^{t-y_1}\cdots\int_0^{t-\sum_1^{n-1}y_k} \cdot P_n(t;\sum_1^{n-1}y_k,x_n)\lambda_n(x_n)dx_n dy_{n-1}\cdots dy_1\Big] \tag{17}$$

$$P_1(0,0)=1 \tag{18}$$

(6)－(7)の両辺をラプラス変換すると

$$\left[s+\frac{\partial}{\partial x_1}+\lambda_1(x_1)+\alpha(x_1)\right]\tilde{P}_1(s;x_1)=0 \tag{19}$$

$$\left[s+\frac{\partial}{\partial x_i}+\lambda_i(x_i)+\alpha\left(\sum_1^{i-1}y_k+x_i\right)\right]\tilde{P}_i\left(s;\sum_1^{i-1}y_k,x_i\right)=0 \quad (2\le i\le n) \tag{20}$$

$$\left[s+\frac{\partial}{\partial z_j}+\mu_j(z_j)\right]\tilde{q}_j\left(s;\sum_1^{j}y_k,z_j\right)=0 \quad (1\le j\le n-1) \tag{21}$$

$$\left[s+\frac{\partial}{\partial z}+\beta(z)\right]\tilde{r}(s;z)=0 \tag{22}$$

$$\left[s+\frac{\partial}{\partial z}+\beta^*(z)\right]\tilde{r}^*(s;z)=0 \tag{23}$$

$$\tilde{P}_1(s;0)=\int_0^\infty \tilde{r}(s;z)\beta(z)dz+\int_0^\infty \tilde{r}^*(s;z)\beta^*(z)dz \tag{24}$$

$$\tilde{P}_i\left(s;\sum_1^{i-1}y_k,0\right)=\int_0^\infty \tilde{q}_{i-1}\left(s;\sum_1^{i-1}y_k,z_{i-1}\right)\mu_{i-1}(z_{i-1})dz_{i-1} \quad (2\le i\le n) \tag{25}$$

$$\tilde{q}_1(s;x_1,0)=\tilde{P}_1(s;x_1)\lambda_1(x_1) \tag{26}$$

$$\tilde{q}_j\left(s;\sum_1^{j-1}y_k+x_j,0\right)=\tilde{P}_j\left(s;\sum_1^{j-1}y_k,x_j\right)\lambda_j(x_j), \quad (2\le j\le n-1) \tag{27}$$

$$\tilde{P}_i(s;0,0)=\tilde{q}_j(s;0,0)=0, \quad (2\le i\le n,\ 1\le j\le n-1) \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\tilde{r}(s;0)=&\int_0^\infty \tilde{P}_1(s;x_1)\alpha(x_1)dx_1+(1-\delta_{1n})\Big[\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \tilde{P}_2(s;y_1,x_2)\alpha(y_1+x_2)\\&\times dx_2dy_1+\cdots+\int_0^\infty\!\!\cdots\!\int_0^\infty \tilde{P}_n\left(s;\sum_1^{n-1}y_k,x_n\right)\alpha\left(\sum_1^{n-1}y_k+x_n\right)dx_ndy_{n-1}\\&\cdots dy_1\Big]\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\tilde{r}^*(s;0)=&\ \delta_{1n}\int_0^\infty \tilde{P}_1(s;x_1)\lambda_1(x_1)dx_1+(1-\delta_{1n})\int_0^\infty\!\!\cdots\!\int_0^\infty \tilde{P}_n\left(s;\sum_1^{n-1}y_k,x_n\right)\\&\times\lambda_n(x_n)dx_ndy_{n-1}\cdots dy_1\end{aligned} \tag{30}$$

(19)-(23)の解が

$$\tilde{p}_1(s;x_1) = \tilde{p}_1(s;0)\,e^{-sx_1}\,\bar{F}_1(x_1)\bar{A}_1(x_1) \tag{31}$$

$$\tilde{p}_i(s;\sum_1^{i-1}y_k,x_i) = \tilde{p}_i(s;\sum_1^{i-1}y_k,0)\,e^{-sx_i}\,\bar{F}_i(x_i)\bar{A}(\sum_1^{i-1}y_k+x_i)/\bar{A}(\sum_1^{i-1}y_k) \tag{32}$$

$$\tilde{g}_j(s;\sum_1^{j}y_k,z_j) = \tilde{g}_j(s;\sum_1^{j}y_k;0)\,e^{-sz_j}\,\bar{G}_j(z_j) \tag{33}$$

$$\tilde{r}(s;z) = \tilde{r}(s;0)\,e^{-sz}\,\bar{B}(z) \tag{34}$$

$$\tilde{r}^*(s;z) = \tilde{r}^*(s;0)\,e^{-sz}\,\bar{B}^*(z) \tag{35}$$

であることを用いると式(24), 式(25), 式(26) および 式(27)より

次式を得る。

$$\tilde{p}_1(s;0) = \tilde{r}(s;0)\tilde{b}(s) + \tilde{r}^*(s;0)\hat{B}^*(s) + 1 \tag{36}$$

$$\tilde{g}_1(s;x_1,0) = \tilde{p}_1(s;0)\,e^{-sx_1}f_1(x_1)\bar{A}(x_1) \tag{37}$$

$$\tilde{g}_j(s;\sum_1^{j}y_k,0) = \tilde{p}_j(s;\sum_1^{j-1}y_k,0)\,f_j(y_j)e^{-sy_j}\,\bar{A}(\sum_1^{j}y_k)/\bar{A}(\sum_1^{j-1}y_k) \tag{38}$$

$$\tilde{p}_i(s;\sum_1^{i-1}y_k,0) = \tilde{g}_{i-1}(s;\sum_1^{i-1}y_k,0)\,\tilde{g}_{i-1}(s) \tag{39}$$

式(32), 式(38) および 式(39)より次式を得る

$$\tilde{p}_i(s;\sum_1^{i-1}y_k,x_i) = \tilde{p}_1(s;0)\,e^{-sx_i}\,\bar{F}_i(x_i)\bar{A}(\sum_1^{i-1}y_k+x_i)\prod_{m=1}^{i-1}\tilde{g}_m(s)f_m(y_m)e^{-sy_m} \tag{40}$$

式(40)を式(29) および 式(30)に代入して次式を得る

$$\tilde{r}(s;0) = \tilde{p}_1(s;0)\Big\{\int_0^\infty e^{-sx_1}\bar{F}_1(x_1)dA(x_1) + (1-\delta_{1n})\Big[\tilde{g}_1(s)\int_0^\infty e^{-sy}\Big(F_1(y)$$

$$-\int_0^y F_2(y-x_2)dF_1(x_2)\Big)dA(y) + \tilde{g}_1(s)\tilde{g}_2(s)\int_0^\infty e^{-sy}\Big(F_{12}(y)$$

$$-\int_0^y F_3(y-x_3)dF_{12}(x_3)\Big)dA(y) + \cdots + \tilde{g}_1(s)\cdots\tilde{g}_{n-1}(s)$$

$$\times\int_0^\infty e^{-sy}\left(F_{1\cdots n-1}(y)-\int_0^y F_n(y-x_n)\,dF_{1\cdots n-1}(x_n)\right)dA(y)\Big\}$$

$$=\tilde{p}_1(s;0)\Big\{\int_0^\infty e^{-sx_1}\bar{F}_1(x_1)\,dA(x_1)+(1-\delta_{1n})\Big[\tilde{g}_1(s)\int_0^\infty e^{-sy}F_1(y)\,dA(y)$$

$$+\tilde{g}_1(s)\left(\tilde{g}_2(s)-1\right)\int_0^\infty e^{-sy}F_{12}(y)\,dA(y)+\cdots+\tilde{g}_1(s)\cdots\tilde{g}_{n-2}(s)$$

$$\times\left(\tilde{g}_{n-1}(s)-1\right)\int_0^\infty e^{-sy}F_{1\cdots n-1}(y)\,dA(y)-\tilde{g}_1(s)\cdots\tilde{g}_{n-1}(s)$$

$$\times\int_0^\infty e^{-sy}F_{1\cdots n}(y)\,dA(y)\Big\} \tag{41}$$

$$\tilde{r}^*(s;0)=\tilde{p}_1(s;0)\Big\{\delta_{1n}\int_0^\infty e^{-sx_1}\bar{A}(x_1)\,dF_1(x_1)+(1-\delta_{1n})\prod_{m=1}^{n-1}\tilde{g}_m(s)$$

$$\times\int_0^\infty e^{-sy}\bar{A}(y)\,dF_{1\cdots n}(y)\Big\} \tag{42}$$

式(36)，式(41) および 式(42)から式(43) および 式(44)を得る

$$\tilde{p}_1(s;0)=\Big\{1-\tilde{b}(s)\Big\{\int_0^\infty e^{-sx}\bar{F}_1(x)\,dA(x)+(1-\delta_{1n})\Big[\tilde{g}_1(s)\int_0^\infty e^{-sy}F_1(y)\,dA(y)$$

$$+\tilde{g}_1(s)\left(\tilde{g}_2(s)-1\right)\int_0^\infty e^{-sy}F_{12}(y)\,dA(y)+\cdots+\prod_{m=1}^{n-2}\tilde{g}_m(s)$$

$$\times\left(\tilde{g}_{n-1}(s)-1\right)\int_0^\infty e^{-sy}F_{1\cdots n-1}(y)-\prod_{m=1}^{n-1}\tilde{g}_m(s)\int_0^\infty e^{-sy}F_{1\cdots n}(y)$$

$$\times dA(y)\Big]\Big\}-\tilde{B}^*(s)\Big\{\delta_{1n}\int_0^\infty e^{-sx}\bar{A}(x)\,dF(x)+(1-\delta_{1n})\prod_{m=1}^{n-1}\tilde{g}_m(s)$$

$$\times\int_0^\infty e^{-sy}\bar{A}(y)\,dF_{1\cdots n}(y)\Big\}\Big\}^{-1} \tag{43}$$

$$\lim_{s\to 0} s\tilde{P}_1(s;0) = T_r\left[\int_0^\infty \bar{F}_1(x)dA(x) + (1-\delta_{1n})\int_0^\infty (F_1(y) - F_{1\cdots n}(y))dA(y)\right]$$

$$+ \int_0^\infty x\bar{F}_1(x)dA(x) + (1-\delta_{1n})\left[l_1\int_0^\infty F_1(y)dA(y) + \int_0^\infty xF_1(x)dA(x)\right.$$

$$+ l_2\int_0^\infty F_{12}(y)dA(y) + \cdots + l_{n-1}\int_0^\infty F_{1\cdots n-1}(y)dA(y)$$

$$\left. + (l_1 + \cdots + l_{n-1})\int_0^\infty F_{1\cdots n}(y)dA(y) - \int_0^\infty yF_{1\cdots n}(y)dA(y)\right]$$

$$+ T_r^*\left[\delta_{1n}\int_0^\infty \bar{A}(x)dF(x) + (1-\delta_{1n})\int_0^\infty \bar{A}(y)dF_{1\cdots n}(y)dy\right]$$

$$+ \delta_{1n}\int_0^\infty x\bar{A}(x)dF(x) + (1-\delta_{1n})\left[(l_1 + \cdots + l_{n-1})\int_0^\infty \bar{A}(y)dF_{1\cdots n}(y)\right.$$

$$\left. + \int_0^\infty y\bar{A}(y)dF_{1\cdots n}(y)\right]$$

$$= T_r\int_0^\infty \bar{F}_{1\cdots n}(y)dA(y) + T_r^*\int_0^\infty \bar{A}(y)dF_{1\cdots n}(y)$$

$$+ \int_0^\infty \bar{A}(y)\bar{F}_{1\cdots n}(y)dy + (1-\delta_{1n})\left[l_1\int_0^\infty F_1(y)dA(y)\right.$$

$$\left. + \cdots + l_{n-1}\int_0^\infty F_{1\cdots n-1}(y)dA(y)\right] \tag{44}$$

また $\tilde{P}_i(s)$ $(1 \le i \le n)$ は式(31) および式(32)を用いて式(45)で与えられる。

$$\begin{cases} \tilde{P}_1(s) = \int_0^\infty \tilde{P}_1(s;x)dx = \tilde{P}_1(s;0)\int_0^\infty e^{-sx}\bar{A}(x)\bar{F}_1(x)dx \\ \tilde{P}_i(s) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \tilde{P}_i(s;\sum_1^{i-1} y_k, x_i)dx_i dy_{i-1}\cdots dy_1 \end{cases} \tag{45}$$

$$= \tilde{P}_1(s;0)\prod_{m=1}^{i-1}\tilde{g}_m(s)\int_0^\infty e^{-sy}\bar{A}(y)\left[F_{1\cdots i-1}(y)-F_{1\cdots i}(y)\right]dy$$

$$2 \leq i \leq n$$

時点アベイラビリティ $P_A(t)$（時刻 t でシステムが稼動している確率）は $P_1(t)+\cdots+P_n(t)$ で与えられるから $\tilde{P}_A(s)$ および定常アベイラビリティ $P_A(\infty)=\lim_{s\to 0} s\tilde{P}_A(s)$ が式(45)，式(43) および式(44) を用いて得られる。従って次の定理を得る。

［定理1］ システムの時点アベイラビリティ $P_A(t)$ のラプラス変換 $\tilde{P}_A(s)$ および定常アベイラビリティ $P_A(\infty)$ は式(46) および式(47) で与えられる。

$$\tilde{P}_A(s) = \tilde{P}_1(s;0)\Big\{\int_0^\infty e^{-sy}\bar{A}(y)\Big[\bar{F}_1(y)+\tilde{g}_1(s)\big(F_1(y)-F_{12}(y)\big)+\tilde{g}_1(s)$$

$$\times\tilde{g}_2(s)\big(F_{12}(y)-F_{123}(y)\big)+\cdots+\prod_{m=1}^{n-1}\tilde{g}_m(s)\big(F_{1\cdots n-1}(y)$$

$$-F_{1\cdots n}(y)\big)\Big]dy\Big\} \tag{46}$$

$$P_A(\infty) = \lim_{s\to 0} s\tilde{P}_A(s)$$

$$= \int_0^\infty \bar{A}(y)\bar{F}_{1\cdots n}(y)dy\Big\{T_r\int_0^\infty \bar{F}_{1\cdots n}(y)dA(y)+T_r^*\int_0^\infty \bar{A}(y)$$

$$\times dF_{1\cdots n}(y)+\int_0^\infty \bar{A}(y)\bar{F}_{1\cdots n}(y)dy+(1-\delta_{1n})$$

$$\times\Big[l_1\int_0^\infty F_1(y)dA(y)+\cdots+l_{n-1}\int_0^\infty F_{1\cdots n}(y)dA(y)\Big]\Big\}^{-1}$$

$$\tag{47}$$

ここに $\widetilde{P}_1(s;0)$は 式(43) で与えられる。

4. 最適予防保全方策

いままでは確率的事前取替を議論したが この節ではよく使用されている定期事前取替に限定しよう。 つまり、

$$A(t)=0 \qquad (t<T) \quad ; \quad 1 \qquad (t \geqq T_0) \tag{48}$$

を仮定することである。 前節では確率密度 $a(t)$ の存在を仮定したが 式(48) が成立する場合でも式(47) が成立することは容易に確められるから このとき式(47)は

$$P_A(\infty)=\int_0^T \bar{F}_{1\ldots n}(y)dy\Big\{T_r\bar{F}_{1\ldots n}(T)+T_r^*\int_0^T dF_{1\ldots n}(y)$$
$$+\int_0^T \bar{F}_{1\ldots n}(y)dy+(1-\delta_{1n})\left[l_1F_1(T)+\cdots+l_{n-1}F_{1\ldots n-1}(T)\right]\Big\}^{-1} \tag{49}$$

となる。

[定理2]

$$\gamma_{1\ldots n}(T)+(1-\delta_{1n})\left[l_1f_1(T)+\cdots+l_{n-1}f_{n-1}(T)\right]\Big/\left[(T_r^*-T_r)\bar{F}_{1\ldots n-1}(T)\right] \tag{50}$$

は増加関数であって，$T_r^*>T_r$ と仮定する。

(i) $$\lim_{T\to\infty}\Big\{\gamma_{1\ldots n}(T)+(1-\delta_{1n})\left[l_1f_1(T)+\cdots+l_{n-1}f_{n-1}(T)\right]\Big/\Big[(T_r^*-T_r)$$
$$\times\bar{F}_{1\ldots n}(T)\Big]\Big\}$$

$$> \left[1+(l_1+l_2+\cdots+l_{n-1}+T_r)/(T_r^*-T_r)\right]/(m_1+\cdots+m_n) \tag{51}$$

ならば，次式

$$\left\{\gamma_{1\cdots n}(T)+(1-\delta_{in})\left(l_1 f_1(T)+\cdots+l_{n-1}f_{1\cdots n-1}(T)\right)/\left[(T_r^*-T_r)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \bar{F}_{1\cdots n}(T)\right]\right\}\int_0^T \bar{F}_{1\cdots n}(y)\,dy \;-\; \left\{F_{1\cdots n}(T)+(1-\delta_{in})\right.$$

$$\left.\times\left(l_1 F_1(T)+\cdots+l_{n-1}F_{1\cdots n-1}(T)\right)/(T_r^*-T_r)\right\} = T_r/(T_r^*-T_r) \tag{52}$$

を満たす唯一で有限な解T_0が最適予防保全時間（定常アベイラビリティを最大にする予防保全時間）となる。　このとき

$$P_A(\infty) = \left\{1+(T_r^*-T_r)\gamma_{1\cdots n}(T_0)+(1-\delta_{in})\left[l_1 f_1(T_0)+\cdots+l_{n-1}f_{1\cdots n-1}(T_0)\right]\right.$$

$$\left./\bar{F}_{1\cdots n}(T_0)\right\}^{-1} \tag{53}$$

となる。

(ii) $$\lim_{T\to\infty}\left\{\gamma_{1\cdots n}(T)+(1-\delta_{in})\left[l_1 f_1(T)+\cdots+l_{n-1}f_{1\cdots n-1}(T)\right]\right.$$

$$\left./\left[(T_r^*-T_r)\bar{F}_{1\cdots n}(T)\right]\right\}$$

$$\leq \left[1+(1-\delta_{in})(l_1+l_2+\cdots+l_{n-1}+T_r)/(T_r^*-T_r)\right]/(m_1+\cdots+m_n) \tag{54}$$

ならば最適予防保全時間は$T_0 \to \infty$となる。即ち事前取替をしない方がよい。このとき

$$R_A(\infty) = \frac{m_1 + \cdots + m_n}{m_1 + \cdots + m_n + (1-\delta_{in})(l_1 + \cdots + l_{n-1}) + T_r^*} \qquad (55)$$

証明　式(49)の右辺をTに関して微分して，0とおき$\gamma_{1\cdots n}(T) = f_{1\cdots n}(T)/\bar{F}_{1\cdots n}(T)$を用いて書き直せば，式(52)を得る。

式(52)の左辺を$g_n(T)$とおけば

$$\frac{dg_n(T)}{dT} = \int_0^T \bar{F}_{1\cdots n}(y)\,dy \cdot \frac{d}{dT}\Big\{\gamma_{1\cdots n}(T) + (1-\delta_{in})\big[l_1 f_1(T) + \cdots + l_{n-1} f_{1\cdots n-1}(T)\big] \Big/ \big[(T_r^* - T_r)\bar{F}_{1\cdots n}(T)\big]\Big\}$$

となり，$g_n(T)$と関数(50)の単調性は一致する。仮定より$g_n(T)$は単調増加関数となる。関数(50)を$r_n(T)$とおけば

$$\text{(i)} \lim_{T\to\infty} g_n(T) = \Big[\lim_{T\to\infty} r_n(T)\Big](m_1 + \cdots + m_n) - \Big[1 + (1-\delta_{in})(l_1 + \cdots l_{n-1}) \Big/ (T_r^* - T_r)\Big] > T_r/(T_r^* - T_r)$$

すなわち，式(51)が成立すれば$g_n(0) < T_r/(T_r^* - T_r) < g_n(\infty)$となり，式(52)を満たす唯一で有限な解$T_0$が存在し，それが最適予防保全時間となる。そして式(52)を式(49)に代入して式(53)を得る。

(ii) $$g_n(\infty) = r_n(\infty)(m_1+\cdots+m_n) - \Big[1+(1-\delta_{1n})(l_1+\cdots+l_{n-1})$$

$$/(T_r^* - T_r)\Big] \quad \le \quad T_r/(T_r^* - T_r)$$

であるから，式(49)の右辺はTの単調増加関数となり，最適予防保全時間は$T_0 \to \infty$となる。　式(49)で$T \to \infty$として式(55)を得る。

［例］$n=2$，　$f_1(t) = \lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}/2$，　$f_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$　とする，

このとき，　$m_1 = 3/\lambda$，$m_2 = \lambda/2$，　$F_2(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}$，

$$F_{12}(t) = \int_0^t F_2(t-x) f_1(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{4}(\lambda t)^k/k!$$

$$\bar{F}_{12}(t) = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{4}(\lambda t)^k/k! \quad , \quad f_{12}(t) = \lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^4/4!$$　となり

$$r_2(T) = \gamma_{12}(T) + l_1 f_1(T)/\big[(T_r^* - T_r)\bar{F}_{12}(T)\big]$$

$$= \Big\{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^4/4! + \big[l_1/(T_r^*-T_r)\big]\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t}/2\Big\}$$

$$/\Big[e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{4}(\lambda t)^k/k!\Big] \tag{56}$$

$$r_2'(T) = \lambda^3 t\Big\{l_1(1+\lambda t/2)/(T_r^*-T_r) + (\lambda t)^2/6 + (\lambda t)^3\big[3-2l_1$$

$$/(T_r^*-T_r)\big]/24 + (\lambda t)^4\big[1-l/(T_r^*-T_r)\big]/24$$

$$+ (\lambda t)^5/144\Big\}/\Big[\sum_{k=0}^{4}(\lambda t)^4/k!\Big]^2 \tag{57}$$

を得る。

$3-2l_1/(T_r^*-T_r)>0$ かつ $1-l_1/(T_r^*-T)>0$ ならば $r_2'(T)>0$ であることより

$$T_r^* > T_r + l_1 \tag{58}$$

ならば $r_2'(T)>0$, $T>0$ を得る。 また

$\lim_{T\to\infty} r_2(T)\int_0^T \bar{F}_{12}(y)dy = \lambda(m_1+m_2) = 5$ より

$$4 > (l_1+T_r)/(T_r^*-T_r) \tag{59}$$

のとき式(51) が成立し,

$$4 \leq (l_1+T_r)/(T_r^*-T_r) \tag{60}$$

のとき式(54) が成立する 式(58), 式(59) および式(60) より

$T_r^* > max(T_r+l_1, (5T_r+l_1)/4)$ ならば 式(51) が成立し, 唯一有限な $x_0(=T_0\lambda)$ が存在し, x_0は次の方程式の根として求められる。

$$\left\{x^2\left[\sigma/(\rho^*-\rho)+x^2/12\right]\left[5-e^{-x}\sum_{k=0}^{4}(5-k)x^k/k!\right]\right\}$$
$$\Big/\left[2\sum_{k=0}^{4}x^k/k!\right]-\left\{\left[1+\sigma/(\rho^*-\rho)\right]\left[1-e^{-x}(1+x+x^2/2)\right]\right.$$
$$\left.-e^{-x}x^3(1+x/4)/6\right\} = \frac{\rho}{\rho^*-\rho} \tag{61}$$

ここに $x=T\lambda$, $\rho=T_r\lambda$, $\rho^*=T_r^*\lambda$, $\sigma=l_1\lambda$. このとき

$$P_A(\infty) = \sum_{k=0}^{4} x_0^k / k! \left\{ \sum_{k=0}^{4} x_0^k / k! + (\rho^* - \rho) x_0^4 / 24 + \sigma x_0^2 / 2 \right\}^{-1} \quad (62)$$

となる。

$T_r + l_1 < T_r^* \leq (5T_r + l_1)$ ならば式(54)が成立し，$T_0 \to \infty$ となり，事前取替をしない方がよい。 このとき

$$P_A(\infty) = \frac{5}{5 + \sigma + \rho^*}$$

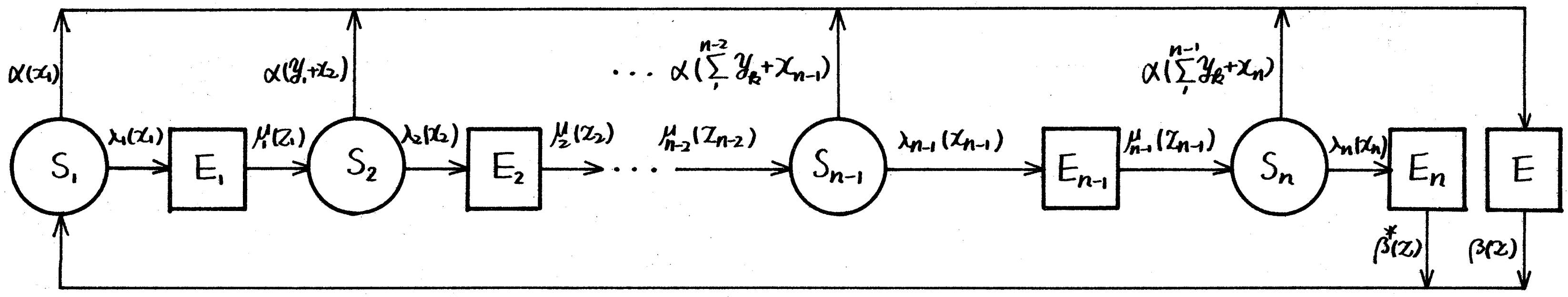
となる。

図2に，$\rho = 10^{-2}$，$\sigma = 10^{-3}$ のときの最適解 x_0 を ρ^* の関数として図示し，またそのときの定常アベイラビリティを $P_A(x_0, \infty)$（式(62)の値）と書き，図示した。

参考文献

[1] Barlow, R. and L. Hunter ; "Optimum Preventive Maintenance Policies", Opns., 8 (1960), pp. 90 - 100

[2] Makabe, H. and H. Morimura ; "A new Policy for Preventive Maintenance", Journ. Op. Res. Soc. Japan, 5 (1963), pp. 110 - 124



S_i ; 再生後，システムが i 回目の動作の状態 $(1 \leqq i \leqq n)$

E_i ; 再生後，システムが i 回目の故障をし修理の状態 $(1 \leqq i \leqq n-1)$

E_n ; 再生後，major breakdown (n 回目の故障) して取替の状態

E ; 再生後，事前取替の状態

図 1.　システムの状態の推移

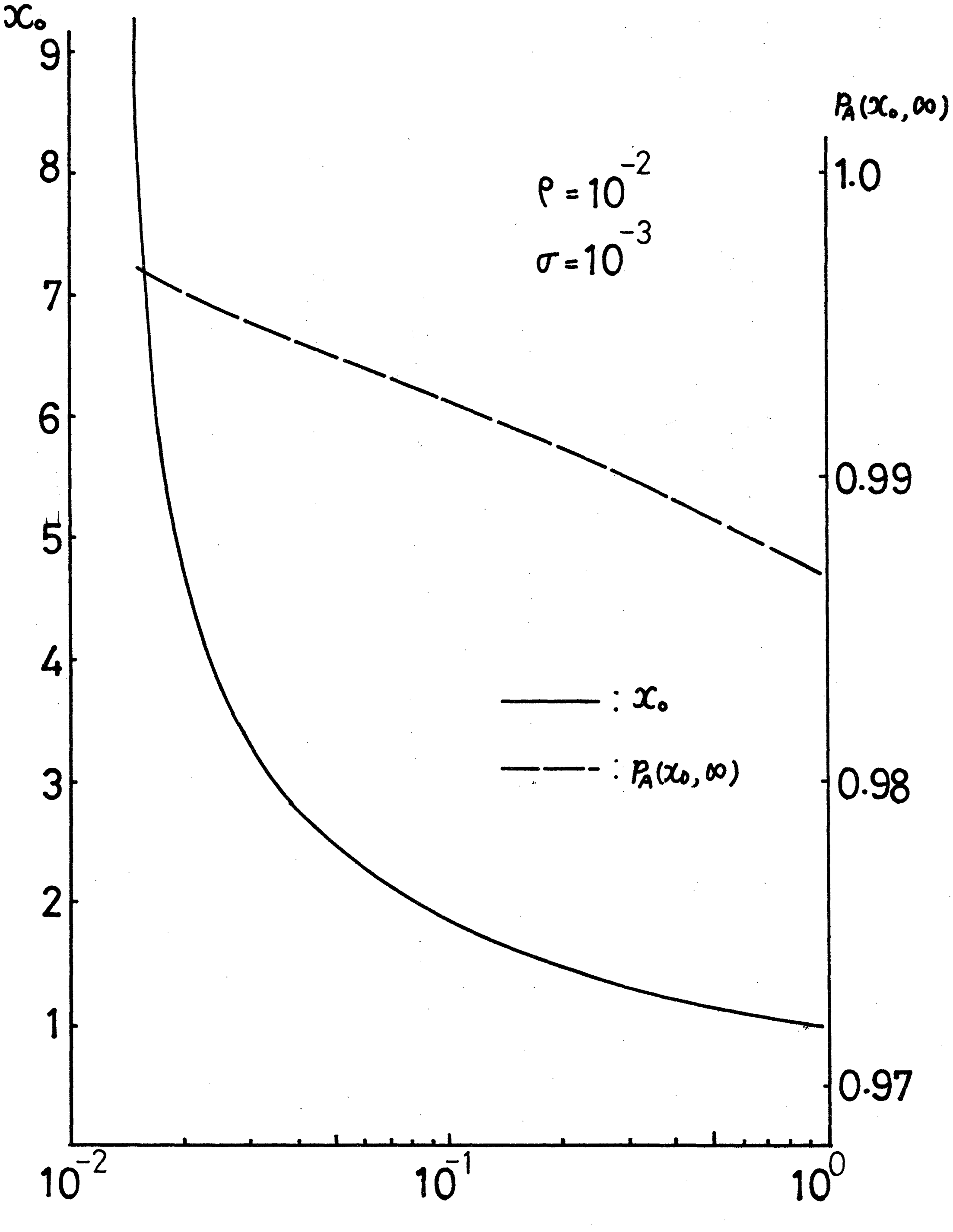


図2. 最適解x_0および定常アベイラビリティ$p_A(x_0,\infty)$の数値例