数理解析研究所講究録
第359巻 1979年 28-39

フーリエ変換サブルーチン・パッケージの作成

名大工学部情報 鳥居達生

1. はじめに

周知のように大量のデータの離散型フーリエ変換において高速フーリエ変換(FFT)は欠かせない手法になっている

入力データが実数で，かつ対称(歪対称)ならば，離散型 cosine (sine) 変換となる．入力データが複素数のFFTにおいて，入力データの実数性，対称性を利用するならば，演算回数および作業領域を1/4に減らすことができる．

高速 cosine (sine) 変換は，関数のチェビシェフ級数展開にも用いられる．関数のフーリエ級数展開の場合，入力は1変数の関数と許される誤差限界 $\varepsilon > 0$ であり，出力は展開項数 $N(\varepsilon)$ と $N(\varepsilon)$ 個の離散型フーリエ係数である．

筆者は，以前 cosine (sine) 変換のFFTのプログラムを作成したが，そこでは入力データと同じ大きさの作業

領域を使用していた[1]. 今回, 入力データをビット逆転によって並べ換え, 補助的な作業領域を用いない高速 cosine (sine) 変換のプログラムをつくった.[2] 入力データの実数性, 対称性を利用しつつ重ね書き (over write) しているので算法は若干複雑となる.

以下にパッケージの要素となっているプログラム名を記す.

(1) 中点公式に基づく高速 cosine 変換 (基底 2)
(2) 中点公式に基づく高速 sine 変換 (基底 2)
(3) 三角関数表 (ビット逆転の順序)
(4) 台形公式に基づく高速 cosine 変換 (基底 2)
(5) 台形公式に基づく高速 sine 変換 (基底 2)
(6) 閉区間 [0, π] で与えられた関数の cosine 級数展開
(7) 開区間 (0, π) で与えられた関数の cosine 級数展開
(8) 開区間 (0, π) で与えられた関数の sine 級数展開
(9) 第1種チェビシェフ多項式系による展開 (閉じた公式)
(10) 第2種チェビシェフ多項式系による展開 (開いた公式)
(11) ずらしチェビシェフ多項式系による展開 (閉じた公式)
(12) 第1種チェビシェフ多項式系による展開 (開いた公式)
(13) Clenshaw-Curtis法による自動積分 (閉じた公式)
(14) Clenshaw-Curtis法による自動積分 (開いた公式)

これらの外に, 各種の級数の値を求めたり, 項別の微分 (

導関数），不定積分など計算するプログラムを作成したが省略する．

これら一連のプログラムの基本となるのは，中点公式に基づく高速cosine（sine）変換であるから，次節で，これに限って説明する．

2．中点公式に基づく高速cosine変換

周期2πの複素数値関数 $X(t)$ に対する $\underbrace{N}_{=2^n}$ 項の中点公式によるフーリエ変換とは

$$B_k = \sum_{0\le j<2^n} X\left(\frac{2\pi}{2^n}\left(j+\frac{1}{2}\right)\right)\exp\left(-\frac{2\pi i}{2^n}k\left(j+\frac{1}{2}\right)\right) \qquad (1)$$

$$k=0,1,\cdots,2^n-1$$

である．これに対する重ね書きのFFTの算法を示す．

準備としてnビットの正の整数

$$j=j_1 2^0+j_2 2^1+\cdots+j_n 2^n$$

に対して1より小さいnビットの小数

$$j^*=j_1 2^{-1}+j_2 2^{-2}+\cdots+j_n 2^{-n}$$

を定義する．数列 $\{j^*\}$ は，$(0,1)$ 上に一様分布するvan der Corput列の名で知られている．この数列は

$$(2j)^* = j^*/2$$

$$(2j+1)^* = \frac{1}{2} + j^*/2$$

の漸化式から生成される．j^* は j の n ビット逆転に 2^{-n} をかけたものである．これを用いてフーリエ変換(1)は

$$B_k = \sum_{0 \le j < 2^n} X(2\pi(j+2^n)^*) \exp(-2\pi i k (j+2^n)^*) \qquad (2)$$

と書き変えられる．これは(1)と和の順序が異なるだけである．

さて原点を $(2^l j)^*$ だけずらしながら，2^l 項のフーリエ変換を

$$X^l(k+2^l j) \equiv \sum_{0 \le p < 2^l} X(2\pi(p+2^l j+2^n)^*) \exp(-2\pi i k (p+2^l j+2^n)^*)$$

$$0 \le k < 2^l, \quad 0 \le j < 2^{n-l}, \quad 0 \le l \le n \qquad (3)$$

とおく．

明らかに

$$X^0(j) = X(2\pi(j+2^n)^*), \quad 0 \le j < 2^n$$

$$X^n(k) = B_k, \quad 0 \le k < 2^n$$

であるから，$X^0(j)$ を初期値として $X^n(k)$ を求める算法を導けばよい．

中点公式に基づくFFT …… 入力は複素数データ

$$X^{\ell}(k+2^{\ell}j) = X^{\ell-1}(k+2^{\ell}j) + X^{\ell-1}(k+2^{\ell-1}+2^{\ell}j)$$

$$X^{\ell}(k+2^{\ell-1}+2^{\ell}j) = \exp(-\pi i(j+2^{n-\ell})^{*}) \tag{4}$$

$$\cdot\{X^{\ell-1}(k+2^{\ell}j) - X^{\ell-1}(k+2^{\ell-1}+2^{\ell}j)\}$$

$$0 \le j < 2^{n-\ell}, \quad 0 \le k < 2^{\ell-1}, \quad \ell = 0, 1, \cdots, n.$$

求めるフーリエ係数 $B_k = X^n(k)$ のために要する複素数乗算回数は $\frac{1}{2}N\log_2 N$, $N=2^n$ である.

そこでテーブル(3)をFFTテーブルとよぶことにする.

(3)から(4)の導出は, 少し面倒な計算である.

次に入力データが実数の場合の算法について述べる. 入力データの実数性はFFTテーブルに, 次の性質をもたらす.

定理1. 入力データが実数ならば

$$X^{\ell}(2^{\ell}-k+2^{\ell}j) = \bar{X}^{\ell}(k+2^{\ell}j)\exp(-2\pi i(j+2^{n-\ell})^{*})$$

$$0 < k < 2^{\ell}, \quad 0 \le j < 2^{n-\ell}$$

$X^{\ell}(2^{\ell}j)$ は実数

が成り立つ. $\bar{X}^{\ell}(\cdot)$ は $X^{\ell}(\cdot)$ の共役複素数.

証明 FFTテーブルの定義によって

$$X^{\ell}(2^{\ell}-k+2^{\ell}j) = \sum_{0 \le p < 2^{\ell}} X(2\pi(p+2^{\ell}j+2^{n})^{*})\exp(-2\pi i$$

$(2^{\ell}-k)(p+2^{\ell}j+2^{n})^{*})$

入力データは実数であるから

$$= \sum_{p} \bar{X}(2\pi(p+2^{\ell}j+2^{n})^{*}) \exp(2\pi i k(p+2^{\ell}j+2^{n})^{*})$$

$$\cdot \exp(-2\pi i 2^{\ell}(2^{\ell}j+2^{n})^{*})$$

$$= \bar{X}^{\ell}(k+2^{\ell}j) \exp(-\pi i(j+2^{n-\ell})^{*}) \quad \text{（証明終）}$$

FFTテーブルにおいて，この性質を利用すれば，添字 k の動く範囲を半分に減らすことができる．

入力データが実数の場合のFFT

$$X^{\ell}(k+2^{\ell}j) = X^{\ell-1}(k+2^{\ell}j) + X^{\ell-1}(k+2^{\ell-1}+2^{\ell}j)$$

$$X^{\ell}(\cancel{k}\,2^{\ell-1}-k+2^{\ell}j) = \bar{W}\{\bar{X}^{\ell-1}(k+2^{\ell}j) - \bar{X}^{\ell-1}(k+2^{\ell-1}+2^{\ell}j)\}$$

$$W = \exp(\pi i(j+2^{n-\ell})^{*}) \quad (5)$$

$$0 < k < 2^{\ell-2}, \quad 0 \leq j < 2^{n-\ell}$$

$k=0$，$2^{\ell-2}$ の場合は特別扱いして以下の式を用いる．

$$X^{\ell}(2^{\ell}j) = X^{\ell-1}(2^{\ell}j) + X^{\ell-1}(2^{\ell-1}+2^{\ell}j)$$

$$\exp(\pi i(j+2^{n-\ell}))X^{\ell}(2^{\ell-1}+2^{\ell}j) = X^{\ell-1}(2^{\ell}j) - X^{\ell-1}(2^{\ell-1}+2^{\ell}j)$$

$$X^{\ell}(2^{\ell-2}+2^{\ell}j) = \exp(-\frac{\pi}{2}(j+2^{n-\ell})^{*})$$

$$\cdot\{X^{\ell-1}(2^{\ell-2}+2^{\ell}j)\exp(\pi i(j+2^{n-\ell})^{*}/2) - i X^{\ell-1}(2^{\ell-2}+2^{\ell-1}+2^{\ell}j)$$

$$\cdot \exp(\pi i(1+2j+2^{n-\ell+1})^{*})\}$$

以上の算法によって重ね書きができることを示すために，複素数 $X^l(k+2^l j)$ ，$k, j \geq 0$ の実数部，虚数部に $k+2^l j$，$2^l-k+2^l j$ の番地を割当て

$$X^l(k+2^l j) \equiv X^l\begin{pmatrix} k+2^l j \\ 2^l-k+2^l j \end{pmatrix} \equiv X^l\begin{pmatrix} k & 0 & j \\ \tilde{k} & 1 & j \end{pmatrix}$$

ただし $\tilde{k} = 2^{l-1}-k$

と書こう．$k = 0, 2^{l-1}$ を実数部，虚数部に対応させる．このとき，FFT (5) は次のように略記できる．

$$X^l\begin{pmatrix} k & 0 & j \\ \tilde{k} & 1 & j \end{pmatrix} = X^{l-1}\begin{pmatrix} k & 0 & j \\ \hat{k} & 0 & j \end{pmatrix} + X^{l-1}\begin{pmatrix} k & 1 & j \\ \hat{k} & 1 & j \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$X^l\begin{pmatrix} \tilde{k} & 0 & j \\ k & 1 & j \end{pmatrix} = \overline{W}\left\{\overline{X}^{l-1}\begin{pmatrix} k & 0 & j \\ \hat{k} & 0 & j \end{pmatrix} - \overline{X}^{l-1}\begin{pmatrix} k & 1 & j \\ \hat{k} & 1 & j \end{pmatrix}\right\}$$

ここで 0または1は l ビット目にあたる．

k と j は，それぞれ $l-1$ ビット，$n-l$ ビットの正の整数をすべて動く．

関数 $X(t)$ が $X(t) = \overline{X}(-t)$ を満たすとき，Hermite対称という．

定理 入力データがHermite対称

$$X(2\pi(\bar{j}+2^n j^*)) = \overline{X}(2\pi(j+2^n)^*) \quad , \quad \bar{j} = 2^n-1-j$$

ならば，FFTテーブルは対称

$$X^\ell(k+2^\ell\bar{j}) = \bar{X}^\ell(k+2^\ell j),\quad \bar{j}=2^{n-\ell}-1-j$$

である．

系　入力データがHermite歪対称

$$X(2\pi(\bar{j}+2^n)^*) = -X(2\pi(j+2^n)^*)$$

ならば，FFTテーブルは歪対称

$$X^\ell(k+2^\ell\bar{j}) = -\bar{X}^\ell(k+2^\ell j)$$

である．

jが偶数のとき$\bar{j}$は奇数であるから，いずれか一方の場合を求めればよい．

入力データが，実数かつHermite対称ならばcosine変換，実数かつHermite歪対称の場合はsine変換となる．

定理の証明．FFTテーブルの定義と仮定から

$$X^\ell(k+2^\ell\bar{j}) = \sum_{0\le\bar{p}<2^\ell} X(2\pi(\bar{p}+2^\ell\bar{j}+2^n)^*)\cdot\exp(-2\pi i\cdot k(\bar{p}+2^\ell\bar{j}+2^n)^*)$$

$$=\sum_{0\le p<2^\ell} X(2\pi(2^n-1-p-2^\ell j+2^n)^*)\exp(-2\pi i k\cdot(2^n-1-p-2^\ell j+2^n)^*)$$

$$=\sum_{0\le p<2^\ell} \bar{X}(2\pi(p+2^\ell j+2^n)^*)\exp(2\pi i k(p+$$

$$2^\ell j + 2^n j)^*) = \bar{X}^\ell (k + 2^\ell j)$$

（証明終）

実数データに対するFFTにおいて，この対称性を利用する．jは偶数だけでよいから $n-\ell-1$ ビットの整数となり

$$X^\ell \begin{pmatrix} k & 0 & 2j \\ \tilde{k} & 1 & 2j \end{pmatrix} \equiv X^\ell \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & j \\ \tilde{k} & 1 & 0 & j \end{pmatrix}$$

すなわち $\ell+1$ ビット目は，いつも0である．

$$X^{\ell-1} \begin{pmatrix} k & 0 & 2j \\ \tilde{k} & 0 & 2j \end{pmatrix} \equiv X^{\ell-1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & j \\ \tilde{k} & 0 & 0 & j \end{pmatrix}$$

$$X^{\ell-1} \begin{pmatrix} k & 1 & 2j \\ \tilde{k} & 1 & 2j \end{pmatrix} \equiv X^{\ell-1} \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & j \\ \tilde{k} & 1 & 0 & j \end{pmatrix}$$

$$= \bar{X}^{\ell-1} \begin{pmatrix} k & 0 & 1 & \bar{j} \\ \tilde{k} & 0 & 1 & \bar{j} \end{pmatrix}$$

最後の等式は，FFTテーブルの対称性に基づく．$X^{\ell-1}(\cdot)$ のℓビット目は，やはり0である．

そこで $X^\ell(\cdot)$ の（ ）内の $\ell+1$ 番目以降を左たつめて0を除く．また n を $n+1$ にあらためる．したがって

$$X^\ell \begin{pmatrix} k & 0 & j \\ \tilde{k} & 1 & j \end{pmatrix}$$

において，再び k, $\tilde{k}$ は $l-1$ ビット，j は $n-l$ ビットとなる．重ね書きの cosine 変換の算法を導くために，j をあらためて $n-l-1$ ビットの j と $\bar{j}=2^{n-l}-1-j$ に分離する．

以上のことに注意して次の算法が導かれる．

中点公式による高速 cosine 変換

$$X^{l}\begin{pmatrix} k & 0 & j \\ \tilde{k} & 1 & j \end{pmatrix} = X^{l-1}\begin{pmatrix} k & 0 & j \\ \tilde{k} & 0 & j \end{pmatrix} + \bar{X}^{l-1}\begin{pmatrix} k & 1 & \bar{j} \\ \tilde{k} & 1 & \bar{j} \end{pmatrix}$$

$$X^{l}\begin{pmatrix} \tilde{k} & 0 & j \\ k & 1 & j \end{pmatrix} = \bar{W}\left\{ \bar{X}^{l-1}\begin{pmatrix} k & 0 & j \\ \tilde{k} & 0 & j \end{pmatrix} - X^{l-1}\begin{pmatrix} k & 1 & \bar{j} \\ \tilde{k} & 1 & \bar{j} \end{pmatrix} \right\}$$

$$X^{l}\begin{pmatrix} k & 0 & \bar{j} \\ \tilde{k} & 1 & \bar{j} \end{pmatrix} = X^{l-1}\begin{pmatrix} k & 0 & \bar{j} \\ \tilde{k} & 0 & \bar{j} \end{pmatrix} + \bar{X}^{l-1}\begin{pmatrix} k & 1 & j \\ \tilde{k} & 1 & j \end{pmatrix}$$

$$X^{l}\begin{pmatrix} k & 0 & \bar{j} \\ k & 1 & \bar{j} \end{pmatrix} = (-iW)\left\{ X^{l-1}\begin{pmatrix} k & 0 & \bar{j} \\ \tilde{k} & 0 & \bar{j} \end{pmatrix} - \bar{X}^{l-1}\begin{pmatrix} k & 1 & j \\ \tilde{k} & 1 & j \end{pmatrix} \right\}$$

ただし $\bar{j} = 2^{n-l}-1-j$, $\tilde{k} = 2^{l-1}-k$ (7)

$$W = \exp\left(\frac{\pi}{2} i \,(j+2^{n-l})^{*}\right)$$

繁雑であるので，$j=0,\ 2^{n-l-2}$, $k=0,\ 2^{l-2}$ の場合の式は省略した．

2^n 項の cosine 変換に必要な三角関数表は

$$\exp\left(\frac{\pi}{4} i\, j^*\right), \quad 0 \le j < 2^{n-1}$$

でよい. なぜなら

$$\exp\left(\frac{\pi}{2} i\, (2j + 2^{n-l})^*\right) = \exp\left(\frac{\pi}{4} i\, (j + 2^{n-l-1})^*\right)$$

$$\exp\left(\frac{\pi}{2} i\, (2j+1+2^{n-l})^*\right) = i \exp\left(\frac{\pi}{4} i\, (\bar{j} + 2^{n-l-1})^*\right)$$

$$0 \le j < 2^{n-l-1}, \quad \bar{j} = 2^{n-l-1} - 1 - j$$

が成立するからである.

また初期値の設定は, 次のようにする.

半周期から 2^n 個の標本

$$x\left(\frac{\pi}{2^n}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right), \quad 0 \le j < 2^n$$

をつくり, 2進逆順に並べ換え FFT の算法 (7) の入力とする.

$x(t)$ が奇関数の場合, FFT テーブルは歪対称となるのでこの性質を用い, sine 変換に対する FFT を同様にして導くことができる.

参考文献

1) 鳥居達生：高速sine変換，cosine変換とその数値積分への応用，情報処理，Vol.15，pp.670-679 (1974)

2) 鳥居達生：フーリエ変換サブルーチン・パッケージの作成（その1，2），名古屋大学大型計算機センターニュース，Vol.10，NO1，NO2（1979）.（その2）は印刷中.