数理解析研究所講究録
第 360 巻 1979 年 1-6

軸対称粘性流における円孔効果

東大理　　橋本　英典

§1　はしがき

流体力学における混合境界値問題の1例として、2次元粘性流における細孔の効果を前講究録335 p.1で述べたが、ここでは、その拡張として、軸対称の場合、特に円孔のあいたスクリーンに垂直に中心軸上を運動する微小球によるストークス流れを議論してみよう。

§2　基本解と境界条件

半径1の円孔の中心に原点、スクリーンに垂直にx軸をとり、それに平行な単位ベクトルを$\mathbf{e}$とすれば、ストークスの方程式

$$\mu \Delta \mathbf{v} = \mathrm{grad}\, p \ , \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \qquad (2.1)$$

の今の問題に適当な一般解は、2つの調和関数Φ, Ψを用いてあらわされるが[2)]、特に、

$$\mu \mathbf{v} = x\,\mathrm{grad}\,\Phi - \Phi\mathbf{e} + \mathrm{grad}\,\Psi + \mu\mathbf{v}_0, \quad (2.2)$$

$$p = 2\mu\,\partial\Phi/\partial x + p_0, \quad \Phi = \phi + \partial\psi/\partial x \quad (2.3)$$

の形をとると便利である。ただし．

$\Delta\phi=\Delta\psi=0,\ \phi(-x,y,z)=\phi(x,y,z),\ \psi(-x,y,z)=\psi(x,y,z)$ (2.4)

で V_0，P_0 は（2.1）を満足する外場である。中心軸上，原点から l の距離にあり軸に沿って負の方向に抵抗 D を受ける特異点（ストークスレット）の場合，対応する ϕ，ψ は．

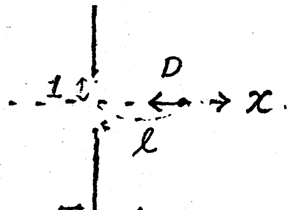

Fig. 1.

$$\phi_0 = C/R\ ,\quad C=-D/8\pi$$

$$\psi_0=-l\phi_0,\quad R=[(x-l)^2+\rho^2]^{1/2} \qquad (2.5)$$

の形に書ける。ただし ρ は軸からの距離を表わす。したがって．ϕ と ψ に対する境界条件は（ [ ] は(2.5)のとき）

i）$x=0$，$\rho>1$ に対して $V=0$ すなわち

$$\phi=\mu V_{0x}\left[=-\phi_0-l\,\partial\phi_0/\partial x=-\left(1-l\frac{\partial}{\partial l}\right)\phi_0\right]$$

および

$$\partial\psi/\partial\rho=-\mu V_{0\rho}\left[=l\,\partial\phi_0/\partial\rho\ \text{i.e.}\ \psi=l(\phi_0+a)\right],\ (a\ は定数) \qquad (2.6)$$

ii）$x=0$，$|\rho|<1$ での連続性：$\partial\psi/\partial x=\partial\phi/\partial x=0$ (2.7)

iii）$|r|\to\infty$ での誘導圧および速度→0，すなわち．

$$\phi=O(1/r),\ \partial^2\psi/\partial x^2=O(1/r^2),\ \partial\psi/\partial\rho=O(1/r) \qquad (2.8)$$

となる。（圧力差の問題は Ref. 1，4）。ここで $r=(\rho^2+x^2)^{1/2}$．

§3　解

従って，円孔のあるスクリーンのグリーン関数 $\phi_g=\phi_0+\tilde{\Phi}$ すなわち

$x=0 \quad \rho>1$ および $|x|\to\infty$ で $\tilde{\Phi}=-\phi_0$

$x=0 \quad \rho<1$ で $\partial\tilde{\Phi}/\partial x=0$ (3.1)

を満足する補足調和関数$\tilde{\Phi}$がわかれば、(2.6)から、ϕ ψが

$$\phi=(1-\ell\,\partial/\partial\ell)\,\tilde{\Phi},\quad \psi=-\ell(\tilde{\Phi}+\phi_c) \qquad (3.2)$$

の形に求まる。ただしϕ_cは壁の上で一定値をとる調和関数で、その必要性は後に述べる。

境界条件(3.1)は対称条件を考慮し、$\tilde{\Phi}$をベッセル積分

$$\tilde{\Phi}=\int_0^\infty e^{-\lambda|x|}A(\lambda)J_0(\lambda\rho)\,d\lambda \qquad (3.3)$$

の形に表わせば混合型積分方程式

$$\int_0^\infty \lambda A(\lambda)J_0(\lambda\rho)\,d\lambda=0, \qquad \rho<1$$

$$\int_0^\infty A(\lambda)J_0(\lambda\rho)\,d\lambda=-c(\rho^2+\ell^2)^{-1/2}, \quad \rho>1 \qquad (3.4)$$

の形に書け[6]、その解として

$$A(\lambda)=-\frac{2c}{\pi}\int_1^\infty \frac{t}{t^2+\ell^2}\sin\lambda t\,dt \qquad (3.5)$$

が得られる。これは$\rho=0$, $x=0$に対して、

$$\tilde{\Phi}(x,0)=-\frac{2c}{\pi}\,\frac{1}{x^2-\ell^2}\left(x\tan^{-1}x-\ell\tan^{-1}\ell\right) \qquad (3.6)$$

$x=0$ に対して

$$\tilde{\Phi}(0,\rho)=-\frac{2c}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\ell^2}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-\rho^2}{\ell^2+1}}\,;\ \rho<1$$

$$=-c/\sqrt{\rho^2+\ell^2} \qquad \rho>1 \qquad (3.7)$$

を与えるが，(3.7)は $\rho \to 1_-$ で

$$\tilde{\phi} \sim -b\sqrt{1-\rho^2}\ , \quad b = 2C/(l^2+1) \qquad (3.8)$$

となり，$l=0$ でない限り．速度に $(1-\rho^2)^{-1/2}$ の特異性を生じる。これを除くには．(3.2)の未定の調和関数 ϕ_c を

$$x=0,\ \rho>1 \ \text{で}\ \phi_c\ \text{が一定}\ (=0)$$

$$\rho<1 \ \text{で}\ \partial\phi_c/\partial x = 0 \ \text{かつ}\ \rho\to 1_- \ \text{で}\ \phi_c \sim b\sqrt{1-\rho^2} \qquad (3.9)$$

の条件から定めてやればよい。

そのようなポテンシャルは．平板 $\rho<1$, $x=0$ を x 方向に動かすときの $x>0$ での速度ポテンシャルに相当するもので．回転双曲面座標 $(0\leqq\mu\leqq 1,\ 0\leqq\varsigma<\infty)$

$$x = \mu\varsigma\ , \quad \rho = \sqrt{(1-\mu^2)(\varsigma^2+1)} \qquad (3.10)$$

を導入すれば．次の形に書ける：

$$\phi_c = B(\mu + x\tan^{-1}\varsigma) = B\mu(1+\varsigma\tan^{-1}\varsigma) \qquad (3.11)$$

これは $\mu=0$ すなわち $x=0,\ \rho>1$ で $\phi_c=0$ (3.12)

$\varsigma=0$ すなわち $x=0,\ \rho=\sqrt{1-\mu^2}<1$ で

$$\phi_c = B\mu = B\sqrt{1-\rho^2} \qquad (3.13)$$

となって．$B=b$ と選べばよいことがわかる。さらに

$\varsigma\to\pm\infty$ すなわち $x\to\pm\infty$ で

$$\phi_c \sim \frac{\pi}{2}B|x| \qquad (3.14)$$

となるが．これによる誘導速度，圧力は $|x|\to\infty$ で 0 となることがわかる。さらに．軸上 $\mu=1$, $\varsigma=x$ で ϕ_c は．

$$\phi_c = b(x\tan^{-1}x + 1) \qquad (3.15)$$

の値をとる。

特に軸上のx方向の誘導速度の$x=l$での値$\langle \delta u \rangle$は(2.2),(2.3).(3.2),(3.6),(3.11)を用いると容易に計算され

$$\mu\langle\delta u\rangle = -\left[(l\frac{\partial}{\partial l}-1)(l\frac{\partial}{\partial l}-1)\tilde{\phi} - l^2\frac{\partial^2}{\partial l^2}(\tilde{\phi}+\phi_c)\right]_{\substack{\rho=0\\x=l}}$$

$$= \kappa C \qquad (3.16)$$

$$\kappa = \frac{1}{\pi}\left[\frac{3}{l}\tan^{-1}l + \frac{3l^2-1}{(l^2+1)^2}\right] \qquad (3.17)$$

となる。半径εの球がUの速度でx方向に進行するときの抵抗$D_0 = 6\pi\mu\varepsilon U$に対する補正$\delta D$は**Faxén** の定理により

$$\frac{\delta D}{D} = -\frac{\langle\delta u\rangle}{U} = \frac{\kappa D_0}{8\pi\mu} = \frac{3}{4}\kappa\varepsilon \qquad (3.18)$$

で与えられる。(Fig.2) $\delta D_0/D_0$は$l\to\infty$でローレンツの値[5] $9\varepsilon/8l$,$l\to 0$で$3\varepsilon/2\pi$となるが.$l\to 0.8702$ (0.6876…)で極大値をとるのはIと同様である。また.$x=0$での速度は.

$$u = u_0 + \delta u \qquad (3.19)$$

$\mu u_0 = -(1-l\partial/\partial l)\phi_c$, $\mu\delta u = -\phi = -(1-l\partial/\partial l)\tilde{\phi}$ (3.20)

すなわち$\mu u = -(1-l\partial/\partial l)\phi_G$となる。全流量$Q = 2\pi\int\rho d\rho u$は.$Q = 4\varepsilon^3 c/(l^2+\varepsilon^2)$でこれは$u_0$に対する値$Q_0 = 2\pi\varepsilon c/\sqrt{l^2+\varepsilon^2}$よりはるかに小さい。

Reference

1) 橋本英典: 数理解析研究所講究録 355 (1978) 1.

2) 今井 功: 流体力学 前編, 裳華房 (1973)

3) ラム: 今井・橋本訳 流体力学 1, 東京図書 (1978) p. 143, 150.

4) Hasimoto, H.: J. Phys. Soc. Japan 13 (1958) 633.

5) Lorentz, H.A. (1907): Happel & Brenner: Low Reynolds number hydrodynamics p. 88.

6) Sneddon, I.N.: Mixed boundary value problems in potential theory (North Holland, Amsterdam 1966) p. 93.

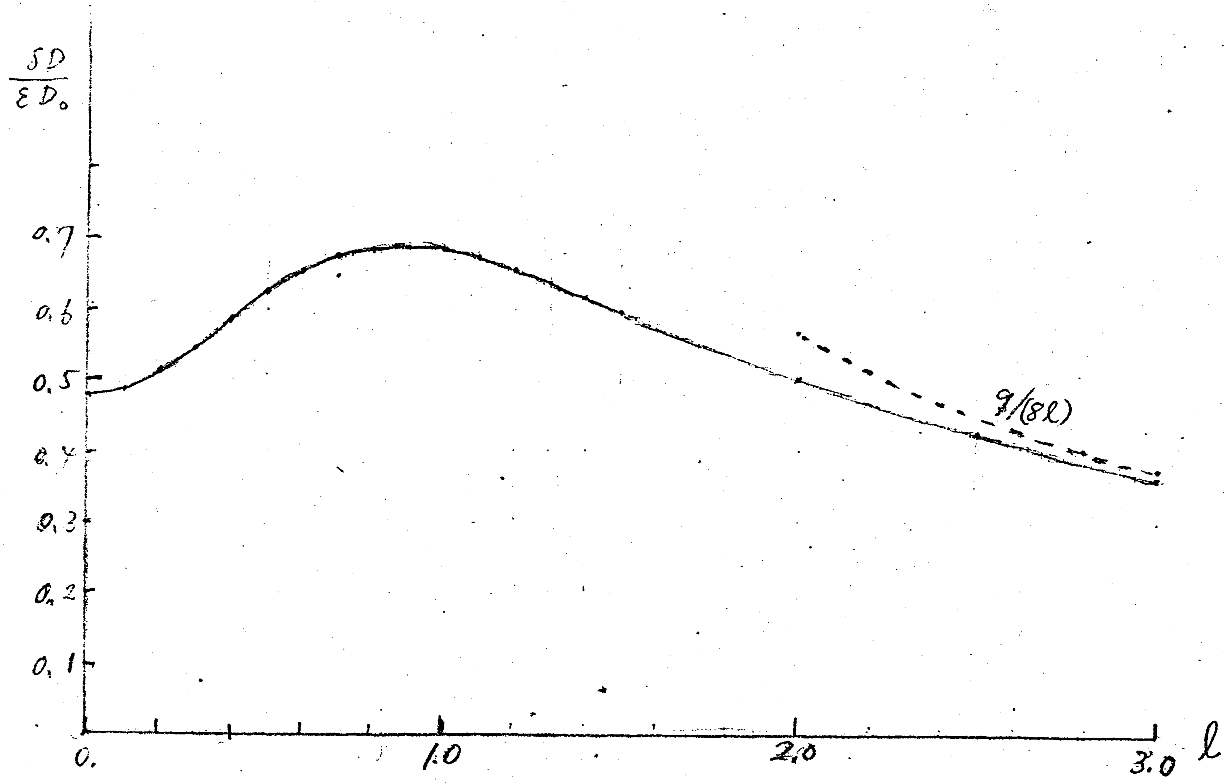

Fig. 2