数理解析研究所講究録
第360巻 1979年 7-21

ステファン問題の級数解

宇都宮大学 教養部 徳田 尚之

§1 いとぐち

ステファンが1889年に氷の氷結問題と題して発表して以来，いわゆる動く境界値問題として知られる"ステファン"問題はその実用上の重要性もあって多くの研究者の注目をひいて来た。ステファン問題での一番の難関は，事前にはその位置が定まっておらず空間中を動く自由境界問題の取扱い方法にある。この境界面は一般には二つの異る相（氷と水又は水と水蒸気等）の界面を形成する。この界面での条件のためステファン問題は非線形境界値問題となり，いわゆる解の重ね合わせが出来ない。そのため使用出来る解法が極端に制限される。厳密解も相似性のある特殊な場合に限られており，これまで知られているのは Neumann の解（Carslaw & Jeager 1956）しかない様である。この特異な非線形問題を扱うのに色々な数値解法および近似解法が考えられて

いるが，１９７４年までに開発されている解法についてはOckendon & Hodgeson（１９７４）に詳わしく解説されているので参照していただきたい。著者はステファン問題の新らしい数値解法（TOKUDA 1979）を発表したがここでは同じ問題を級数展開で求める新らしい方法を紹介する。ただ上記数値解でも時間の短い領域ではその解の特異性のため数値解には馴まないので本論文の級数解を使用していることを附言しておこう．

ステファン問題で最初に級数解を提唱したのはEvans, Isaacsen & MacDonald（1950）で，境界上の熱流束がある与えられた時間の関数として表わされているときの解を与えた．この解は，境界面の位置，温度場を時間と距離座標のべき乗に展開する方法であるが，二重級数展開であるため解は非常に煩雑である．一方 Portnov（1962）はステファン問題の形式的な積分表示を使って級数解を求めるという新らしい方法を提案した。実際の級数解は Jackson（1964），Westphal（1967）等によって求められた．この方法では温度場自体は直接解く必要はなく，界面での境界条件を満すことにより級数の係数を定めることが出来，Evans et al の解に較べると簡潔である．実際 Westphal（１９６７）は，相変化を誘起する加熱（又は冷却）壁面が Newton の放熱条件の場合につ

いて解き，表面壁面温度と界面位置を時間のべき展開で第4項まで求めるのに成功している。しかしこれらの級数解は古典的な時間座標についてのべき展開で時間のごく小さい範囲でしか使えない（第5章をみよ）.

著者は，昨年の本研究会で発表した新らしい級数展開法（徳田 1977）をこのステファン問題に応用したのでその概要を示す．この方法の骨子は，展開を行う関数群に新らしい従属変数と独立変数を導入することにあった。事実これらの新変数はリーの1パラメータ連続変換群に対して不変という条件を満足する変数で組み立てられていることが示される．そしてこの変数の変換群への不変性が求める関数の級数解の収束性の改善とその展開の成立する領域の拡張に大きく寄与していることが分っている．このステファン問題では展開を要する従属変数が従来の様に1個でなく2個ある多変数問題となる点が異る点である．1従属−1独立変数の場合に証明したBürmann-Lagrange定理を多従属−1独立変数の場合に拡張する必要があるがその点については別の機会に述べる．

§2 基礎方程式

こゝでは，一次元，一相のステファン問題を考える．基礎方程式については著者の数値解の問題（TOKUDA 1979）と全

く同じ問題で加熱（または冷却）面がNewtonの放熱条件を満す場合を取扱う．こゝでは距離x，温度u，時間tが総べて無次元化されており，$0 \leqq x \leqq X$ の領域が固体領域（又は液体領域），$x \geqq X$ が液体（又は固体）領域とする。$x=0$の面で熱の注入又は放出を行い$x=X$の界面での固体→液体への相変化を誘起している場合を考えよう。$x \geqq X$の液体（又は固体）はちょうど融解点（又は凝固点）温度に保たれているとすれば，$0 \leqq x \leqq X$ の一相での温度場のみを考えればよい。

$$\epsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqq x \leqq X. \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(0,t) = u_w(t), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(X,t) = \frac{dX}{dt}, \qquad (3)$$

$$u(X,t) = 1, \qquad (4)$$

$$u(x,0) = 0, \qquad (5)$$

$$X(0) = 0. \qquad (6)$$

こゝでu_wは冷却壁面の温度で，この冷却面がx軸の原点にとってある．Xは界面の位置であり，次元のある変数x^*, t^*, X^*, u^*との間には次の様な関係がある

$$x = h/k\, x^*, \quad X = h/k\, X^*, \quad \epsilon = k(u_s - u_0)/\rho L,$$

$$t = \epsilon h^2 t^*/\rho k, \qquad u = (u^* - u_0)/(u_s - u_0). \qquad (7)$$

こゝでkは熱伝導率，hはNewtonの放熱法則による熱伝達係数，ρは密度，Lは潜熱，u_0は$x=0$の壁面を冷やしている

冷却水の温度，u_sは凝固点温度である。もし $x \geqq X$ の領域が半無限であれば，方程式(1)～(6)が示す様にこの問題を支配するパラメータはϵのみであることが分る。

§3 級数解

新らしい従属変数として次の変数を導入してみよう。

$$\eta = x/X \quad , \quad \tau = X\dot{X} . \qquad (8)$$

こゝで $\dot{X} = dX/dt$ である。(8)の変数を使うと方程式(1)～(6)は次の様に変形される。

$$\epsilon \frac{\dot{u}_w}{1-u_w} X^2 (1-u) - \epsilon \tau \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \epsilon \frac{d\tau}{dt} X^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \eta} , \qquad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(0,\tau) = X \frac{u_w}{1-u_w} , \qquad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(1,\tau) = \frac{X\dot{X}}{1-\theta_w} , \qquad (11)$$

$$u(0,\tau) = 0 , \qquad (12)$$

$$u(1,\tau) = 1 , \qquad (13)$$

$$X(0) = 0 . \qquad (14)$$

(8)で定義したτは時間のみの函数で，$\tau(0)=0$ でしかも原点近傍で正則な関数であることは後に容易に確認出来る。すなわちτはtについてのべき級数展開をもつ。

$$\tau = d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3 + \cdots . \qquad (15)$$

こゝで $d_1 \neq 0$．(15)の様に $d_1 \neq 0$ の級数を擬単位元(almost unit)の級数と呼ぶ，

$$\tilde{\tau} \circ \tau = t \tag{16}$$

を満足する逆元 $\tilde{\tau}$ が存在することが証明される(Henrici 1974)．(9)式の $\frac{\dot{u}_w}{1-u_w}\alpha^2$，$\frac{d\tau}{dt}\alpha^2$ は t については正則関数と考えてよいから，(15)，(16)から次の展開をもつ．

$$\frac{\dot{u}_w}{1-u_w}\alpha^2 = a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + \cdots , \tag{17}$$

$$\frac{d\tau}{dt}\alpha^2 = b_2\tau^2 + b_3\tau^3 + \cdots . \tag{18}$$

ただし，$a_1, a_2, \cdots, b_2, b_3 \cdots$ 等の係数は境界条件(10)，(11)によって定まる係数である．(17)，(18)の関係を(9)に代入すれば u は τ と η の解析関数と考えてよい。u をこゝで τ のべき級数に展開すると

$$u(\eta, \tau) = u_0(\eta) + \tau u_1(\eta) + \tau^2 u_2(\eta) + \cdots . \tag{19}$$

(17)，(18)，(19)を(9)〜(14)に代入すると

$$\epsilon\{a_1\tau + a_2\tau^2 + \cdots\}\{1 - u_0 - \tau u_1 - \tau^2 u_2 + \cdots\} - \epsilon\tau\eta\left\{\frac{\partial u_0}{\partial\eta} + \tau\frac{\partial u_1}{\partial\eta} + \cdots\right\}$$

$$+ \epsilon\{b_2\tau^2 + b_3\tau^3 + \cdots\}\{u_1 + 2\tau u_2 + \cdots\} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial\eta^2} + \tau\frac{\partial^2 u_1}{\partial\eta^2} + \tau^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\eta^2} + \cdots , \tag{20}$$

$$\alpha\frac{u_w}{1-u_w} = -\left[\frac{\partial u_0}{\partial\eta}(0) + \tau\frac{\partial u_1}{\partial\eta}(0) + \cdots\right] , \tag{21}$$

$$\frac{\alpha\dot{\alpha}}{1-u_w} = \frac{\partial u_0}{\partial\eta}(1) + \tau\frac{\partial u_1}{\partial\eta}(1) + \cdots , \tag{22}$$

$$u_0(0) + \tau u_1(0) + \cdots = 0 , \tag{23}$$

$$u_0(1) + \tau u_1(1) + \cdots = 1 . \tag{24}$$

§4 温度場関数の決定

(20) で τ の同じべきの項を集めることにより, $u_0, u_1, \cdots$ は次の方程式を満たさねばならない.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} &= 0 , \\
\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} &= \epsilon a_1 (1-u_0) - \epsilon \eta \frac{\partial u_0}{\partial \eta} , \\
\frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} &= \epsilon a_2 (1-u_0) - \epsilon a_1 u_1 - \epsilon \eta \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \epsilon b_2 u_1 , \\
\frac{\partial^2 u_3}{\partial \eta^2} &= \epsilon a_3 (1-u_0) - \epsilon a_2 u_1 - \epsilon a_1 u_1 - \epsilon \eta \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \\
&\quad + \epsilon b_3 u_1 + 2\epsilon b_2 u_2 , \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{25}$$

$u_0, u_1 \cdots$ が満すべき境界条件は (23), (24) から

$$\begin{aligned}
&u_0(0) = u_1(0) = u_2(0) = \cdots = 0 . \\
&u_0(1) = 1, \quad u_1(1) = u_2(1) = \cdots = 0 .
\end{aligned} \tag{26}$$

(25)は線形方程式で, (26)の境界条件を使うと温度場関数群 $\{u_n\}$ は容易に決定出来る. 事実, この級数解の一番の特徴は, ステファン問題の非線形性の難点である界面の条件 (2), (3) (又は (11), (12), (21), (23)) とは全く独立に温度場を決定出来ることである。もちろん係数群 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はこの界

<u>$O(\tau^2)$ の解</u>：　(42) の値を使うと

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} = \epsilon(1-\eta) + \frac{\epsilon^2}{2} .$$

$$\therefore\ u_1^{(2)} = \epsilon\left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{6}\right) + \frac{\epsilon^2}{4}\eta^2 - \left(\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon^2}{4}\right)\eta , \tag{43}$$

$$u_2'(0) = -\left(\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon^2}{4}\right),\quad u_2'(1) = \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon^2}{4} . \tag{44}$$

(21), (22) から $u_w^{(2)}$, $\chi^{(2)}$, $\tau^{(2)}$ を求めると

$$\left(\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon^2}{4}\right)\tau^{(2)3} - \left\{\frac{\epsilon}{2} + \left(\frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon^2}{4}\right)\chi^{(2)}\right\}\tau^{(2)2} - \left\{1 - \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)\chi^{(2)}\right\}\tau^{(2)} - \chi^{(2)} = 0 . \tag{45}$$

$$u_w^{(2)} = 1 - \frac{\tau^{(2)}}{1 - \frac{\epsilon}{2}\tau^{(2)} + \left(\frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon^2}{4}\right)\tau^{(2)2}} , \tag{46}$$

$$\tau^{(2)} = \chi^{(2)}\,\dot{\chi}^{(2)} . \tag{47}$$

(45) は $\tau^{(2)}$ についての3次の代数方程式であり，$\tau^{(2)}(0)=0$ となる根を $\tau^{(2)} = F(\chi^{(2)})$ とすると（$\chi^{(2)}(0)=0$ であるので必らずその様な根は存在する），(47) とから $\chi^{(2)}$ は次の非線形微分方程式を解くことにより求めることが出来る．

$$\frac{d\chi^{(2)}}{dt} = \frac{F(\chi^{(2)})}{\chi^{(2)}} . \tag{48}$$

(48) は一般的には，closed-form には解けないが Range-kutta 法で数値的に解くことが出来る。(48)から $\tau^{(2)}$ を求めれば $u_w^{(2)}$ は (46) から求めることが出来る。以下この手順を繰返えして任意の $O(\tau^n)$ までの χ, u_w の近似を求めることが出来る。

§5 計算結果

本論文では $O(\tau^2)$ まで正しい $x^{(2)}$, $u_w^{(2)}$ まで求めた。表1にはこの級数解と数値解（TOKUDA 1979）が比較してある。表で t_X とあるのは界面位置が X に達したときの時間である。また x_c とあるのは界面位置を Green 関数により求めたもので次の様にして求める。(1) を $x=0$ から X まで積分し，ついで $t=0$ から $t=t$ まで積分し境界条件 (2), (3) を用いると

$$x_c(t)=\frac{\int_0^t u_w\,dt+\epsilon\int_0^X u\,dx}{1+\epsilon} \qquad (49)$$

ここで (49) の u_w に $u_w^{(2)}$, $u=u_0+\tau^{(2)}u_1+\tau^{2(2)}u_2$ を代入して求めた $x_c=x_c^{(2)}$ と表わす。$x_c^{(2)}/x^{(2)}$ の1からのずれは温度分布がどれ位の精度で求まっているかの尺度を与えていると考えてよいだろう。級数解は $t\ll 1$ の範囲では精度はよいが $t\gg 1$ では，数値解に較べると精度は落ちる。しかし $t=10$ ($X\doteqdot 3$) は物理的には $t\sim\infty$ の領域に属するがその場合でも我々の級数解は5%程度の誤差しかないのは注目に値する。

この問題の古典的な級数解及び数値解は Westphal (1967) Mastenaiah (1976) によって求まっている。無次元時間 θ として $\theta^2=4t/\epsilon$ の如き変数を使っているため我々の数値解，級数解とは直接には比較出来ないが，我々の級数解 $x^{(0)}$ と比較した値が表2に示してある。彼等の解は $\epsilon=0.057$ のときに

当る．$\theta\in[0, 5.0]$ の時間帯の解を求めているが，驚くべきことに我々の方向にすぎない$x^{(0)}$がその全領域で最も精度のよいことである。これは我の無次元化では $t\in[0, 0.356]$ 位に1が当らない小さな時間領域であり，したがって$x^{(0)}$のみでも充分に精度のよい範囲であることから（表1をみよ）不思議ではない。Mastenaiah (1976) の数値解は $t\ll1$ の領域では格子点の数が少なすぎて精度が悪く，一方 Westphal (1967) の級数解は $t\ll1$ では正確ではあっても，級数の4項を使っていても急速に精度が悪化しているのが分かろう．

§6 考察

前節の計算結果から明らかな様に古典的な時間座標のべき展開に較べると本級数解の収束性は非常によいことが分かろう．これは第1近似$x^{(0)}$をみても分る。

$$x^{(0)}=\sqrt{1+2t}\quad-1 \qquad (32)$$

この問題は $t\to\infty$ では $u_w=0$ となり $x=0$ の面を一定温度とする Neumann の解に漸近することが予測される。Neumann の解は

$$x=\alpha\sqrt{t}\qquad \alpha=\epsilon\text{に依存する定数} \qquad (50)$$

であり，$x^{(0)}$ は $t\to\infty$ で正しい漸近関数形をもっていることが分る。実は $x^{(1)}, x^{(2)}\cdots$ も $t\to\infty$ では正しい漸近振舞いをもっており，近似が上るにつれて $\sqrt{t}$ の比例定数が (50) の α

に近づくことが示される。厳密には，二変数問題のときに示した Bürmann-Lagrange 級数の収束及びその逆変換の収束を三変数問題に拡張する必要があるがこの点は別の機会に検討を加えたい。

ついで注意しておきたいことは，本論文で使った独立変数

$\tau = x\dot{x}$　　は前回の論文で導入した変数

$$h = \frac{t\dot{x}}{x} - 1 \qquad (51)$$

とは異っていることである。τと同様 h も $t \in [0, \infty)$ の領域は $h \in [0, -\frac{1}{2}]$ の有限領域に写像されることが分る。以上の点をよく吟味してみるとτを用いた新らしい変数 j を次の様に選ぶと，この問題を二変数問題として考え直すことが出来る。

$$j = \frac{(\tau - \alpha^2/2)}{\tau}\, t \qquad (52)$$

j を h についての Bürmann-Lagrange 級数に展開出来て

$$j = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots\cdots \quad . \qquad (53)$$

(53)の Bürmann-Lagrange 級数は $t \to \infty$ での τ, s, z, x, の振舞いが常数まで正確に求まっており，しかも $h=0$ 近傍では収束し $h \in [0, -1/2]$ 内には特異点が存在しないと思われるので時間 t の全域にわたって精度のよい級数解が求められることが期待出来る。この結果も別の機会に発表したい。

REFERENCES.

Carslaw,H.S. & Jeager,J.C. (1956) " Conduction of Heat in Solids" Oxford University Press.

Evans,G.W.,Isaackson,E & MacDonald,J.K.L. (1950) "Stefan-like Poblems" Quart.Appl.Math.,8,p.312.

Henrici,P (1974) "Applied and Computational Complex Analysis" Vol.1,John Wiley.

Jackson,F. (1964) "The Solution of Problems Involving the Melting and Freezing of Finite Slab by a Method due to Portnov" Proc.Edin.Math.Soc.,14,p.109

Mastanaia,K. (1976) "On the Numerical Solution of Phase Change Problems in Transient Non-linear Heat Conduction" Int.J. Numerical Method in Eng.10, p.833

Ochendon,J.R. & Hodgeson,W.R. (1974) "Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion" Oxford University Press.

徳田尚之 (1977). "収束性のよい級数解" 京都大学解析研究所講究録

Tokuda,N (1979) "Numerical and Series Solution of a Stefan Problem" Proceedings of Int.Conf. on Numerical Methods in Thermal Problems. University College,Swansea,United Kingdon

Westphal,K.O. (1967) " Series Solution of Freezing Problems with Fixed Boundary Surface Radiating into a Medium of Arbitrary Varying Temperature" Int.J. Heat and Mass Transfer, 10,p.195.

TABLE 1. Series Solution and Numerical Solution (Tokuda1979)

Series Solution				Numerical Solution		
$x^{(2)}$	$t_x^{(2)}$	$u_w^{(2)}$	$x_c^{(2)}/x^{(2)}$	t_x	u_w	x_c/x
.1	0.1095	0.1095	1.003	0.1095	0.9119	1.0008
.2	0.2363	0.8414	0.9997	0.2366	0.8413	1.0004
.5	0.7086	0.6864	0.996	0.7130	0.6879	1.0003
1.0	1.7659	0.5254	0.987	1.7976	0.5305	1.0003
1.5	3.1377	0.4241	0.977	3.2269	0.4319	1.0003
2.0	4.8102	0.3546	0.968	4.9919	0.3640	1.0003
2.5	6.7770	0.3039	0.960	7.0952	0.3143	1.0004
3.0	9.0345	0.2656	0.953	9.5327	0.2765	1.0004

TABLE 2. Phase Position by Various Methods.

(Time)	Westphal (1967)	Mastanaih (1976)	$x^{(0)}$
0.5	0.003565	0.002940	0.003565
1.0	0.01418	0.01357	0.01419
1.5	0.03161	0.03106	0.3164
2.0	0.05562	0.05505	0.05560
2.5	0.08543	0.08512	0.08543
3.0	0.1208	0.1208	0.1209
3.5	0.1611	0.1615	0.1615
4.0	0.2056	0.2068	0.2068
5.0	0.3028	0.3093	0.3093