

## U字管内の流体の減衰振動

京大工学部航空

桜井健郎

松田卓也

武田英徳

はじめに

U字管内の流体の減衰振動は、殆んど全ての水力学の教科書に取り上げられている。そこで与えられている準定常理論によると、振動の減衰時間は管の半径について計算した粘性拡散時間である。一見妥当に見えるこの結果が、長さ約1 m, 管径約1 cmであるようなU字管での室内実験と全く合わないのである。この事には、既にStokesが気付いている。また、重力波の理論の中にこの不一致を取り除くヒントを見出す事も出来る。しかし、何故か水力学の教科書には準定常の扱いしか書かれていない。本年1月、東海大学4年生の沢英樹君からこの不一致についての質問を受けた。ここには、その質問に基づいて行なった考察を述べる。

## と / 定性的考察

U字管内の水柱の微小振巾の減衰振動を考えよう。図1左側の水面の平衡位置からの高さを $\tilde{\xi}$ とする。水柱全体が一体となって動くとする、 $\tilde{\xi}$ は次の式に従う(例えば 藤本武助 1950, Whitaker 1968) :

$$\tilde{\rho} \pi \tilde{r}_0^2 \tilde{l}_0 \frac{d^2 \tilde{\xi}}{d\tilde{t}^2} = -\tilde{\rho} \pi \tilde{r}_0^2 \cdot 2 \tilde{g} \tilde{\xi} - 2 \pi \tilde{r}_0 \tilde{l}_0 \tilde{\rho} \tilde{\nu} \frac{d\tilde{\xi}}{d\tilde{t}} \cdot \frac{1}{\tilde{\delta}} \quad (1)$$

但し $\tilde{t}$ は時間、 $\tilde{g}$ は重力加速度、 $\tilde{\nu}$ は動粘性係数、 $\tilde{\rho}$ は密度、 $\tilde{\delta}$ は水柱に働らく粘性応力に特徴的な長さ、 $\tilde{r}_0$ 及び $\tilde{l}_0$ は夫々水柱の半径及び長さである。また、簡単の為、表面張力及び管の曲がりの効果は無視した。

準定常理論に於ては、水柱内の流れをポアズイユの流れと仮定する。そうすると、 $\tilde{\delta}$ は $\tilde{r}_0$ の程度になり、振動の減衰時間 $\tilde{\tau}$ は $\tilde{r}_0$ についての粘性拡散時間になる :

$$\tilde{\tau} \sim \tilde{r}_0^2 / \tilde{\nu} \quad (2)$$

第2図は、我々の実験結果(長さ約1m, 管径0.7, 1.3, 1.7 cmについて行なった。)が(2)と合わない事を示している。この図は、また、 $\tilde{\tau}$ の実験値が $\tilde{r}_0^2$ にではなく $\tilde{r}_0$ に比例する事も示している。

沢君が気付き我々も追認したこの不一致の原因は何だろうか?

水柱の長さを  $l$  m とすると、振動周期  $\tilde{\tau}$  は約 1 秒になる。

之は

$$\tilde{\tau} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_0}, \quad \tilde{\omega}_0 = \left( \frac{2\tilde{\gamma}}{l_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

によって見積れるが、この見積りは (1) の粘性項を無視した式から導ける。水柱の振動を水柱に乗って見ると、管が同じ振巾及び周期で水柱の運動とは逆方向に振動する。その際管壁に出来る Stokes 層 (Stokes 1850) の厚み  $\tilde{\alpha}$  は

$$\tilde{\alpha} \sim (\tilde{\nu}/\tilde{\omega}_0)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

である。(4) に水の  $\tilde{\nu}$  ( $\sim 0.01$ ) 及び  $\tilde{\omega}_0 = 2\pi$  ( $\tilde{\tau}=1$  に対応) を代入すると、 $\tilde{\alpha}$  は約 0.05 cm になる。つまり、我々の実験では、粘性の効果は管壁上の Stokes 層内に限られ水柱本体は非粘性流体として振る舞う。所が、水柱の運動をポアズイユ流れと仮定する準定常理論は水柱本体を粘性流体と考えている。之が上の不一致の原因だったのである。不一致を除くには、実状に合わせて、 $\tilde{\tau}$  として  $\tilde{\alpha}$  を用いれば形式的に正しい解が得られる。このように手直しすると、減衰時間は次のようになる：

$$\tau \sim \left\{ 2\tilde{\gamma}_0^2 / (\tilde{\nu}\tilde{\omega}_0) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

但し、係数  $2$  は  $\tau$  に述べる線形理論の結果に合わせてつけ加えた。第 2 図は (5) と実験とがよく合う事を示している。

上のモデルによると、粘性の効果はストークス層内部に限られる。水柱本体の振動は、非粘性流体としての振動であるが、ストークス層に働らく粘性まさつによつて減衰する。

ここまで来ると、“要するに (1) の  $\tilde{r}$  の取り方の問題だ。実験条件によつてある時は  $\tilde{r} \sim \tilde{r}_0$  に、又ある時は  $\tilde{r} \sim \tilde{\alpha}$  に。之は当たり前だ。”と言われる方があるかも知れぬ。しかし、それでは何故その当り前の事が数多い水力学の教科書のどれ一つにも見当らなかつたのか？ また、(1) は水柱全体の運動方程式であるが、この式が物理的に意味を持つには、水柱全体が一体となって動く為のメカニズムがなければならぬ。例えば準定常理論の成り立つ場合には、水柱全体に行きわたっている粘性拡散の効果がある。 $\tilde{r} \sim \tilde{\alpha}$  だという以上は、非粘性の水柱全体が一体となって運動し、境界層での粘性まさつの効果を振動周期の時間内に充分に感じ取るメカニズムについても説明出来なければならぬ。以下にくり返し述べるように、そのメカニズムをはっきりさせる事こそが最も重要な事なのである。“要するに  $\tilde{r}$  の取り方だ。”といった考え方では、ここでの問題を含む更に大きな問題：亜拡散問題の本質を理解する事は出来ぬであろう。

考えを定める為には、下降中の水面近くの運動に着目しよう。ストークス層内の流体は、粘性によつて遅れるから、管

壁に沿って水面周縁に流れ込む。流れ込んだ流体は、水面によって管壁からはぎ取られ、周縁からジェット状に吹き出す。非粘性本体には、この吹き出しによって子午面流れが誘起される。この状況は、圧縮行程にある内燃機関のピストン近くの流れと似ている (Tabaczynski et. al. 1970)。粘性の効果がない減衰しない仮想的な水面に乗って見ると、この子午面流れは第3図のようになる。この流れは、もともと遅かったのだから、一旦は周縁から吹き出すが再び水面に向かってUターンしてしまう。このUターンによって水面はもり上がる。そして、水面の下降運動の振巾はもり上がり分だけ小さくなる。上昇中の水面近くには、ストークス層によって、水面周縁に吸い込まれる形の子午面流れが出来る。流れ模様は第3図の流れを逆にしたものになり、水面は吸い込まれた分だけ落ちくぼむ。そして上昇運動の振巾は落ちくぼみ分だけ小さくなる。

上に述べた過程を図式的に括めると次のようになる：

- (1) 水柱本体の振動により管壁にストークス層が出来る。
- (2) 粘性まさつによるエネルギー損失はストークス層内で起こる。
- (3) このエネルギー損失は、ストークス層流れによる流量欠損を介し、水面周縁での吹き出し、吸い込みの出現につながる。
- (4) この吹き出し、吸い込みは、非粘性本体に上

次の子午面流れを誘起する。(5) この子午面流れは、流量欠損分だけ水面をもり上げらせ（落ちくぼませ）、水柱本体の振巾の減衰を起こす。これと同様の考察は、微小振巾の重力波の減衰に関連して、Mei and Liu (1973) によって行なわれている。半周期毎の振巾の減少を見積るには、上の考察に基づき、ストークス層による流量欠損をその時間にわたって積分し水面の表面積で割ればよい：

$$\Delta \tilde{\zeta}_0 \sim \frac{\int_0^{\frac{\pi}{\tilde{\omega}_0}} \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{\omega}_0}\right)^{\frac{1}{2}} \pi \tilde{r}_0 \tilde{\zeta}_0 \tilde{\omega}_0 \sin \tilde{\omega}_0 \tilde{t} \cdot d\tilde{t}}{\pi \tilde{r}_0^2} = -\frac{1}{2} \tilde{\zeta}_0 \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{\omega}_0 \tilde{r}_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

但し、水面の速度を  $\tilde{\omega}_0 \tilde{\zeta}_0 \sin \tilde{\omega}_0 \tilde{t}$  とし、ストークス層内の平均速度を水面の速度の半分とした。半周期  $\pi/\tilde{\omega}_0$  に  $\tilde{\zeta}_0/\Delta \tilde{\zeta}_0$  を乗ずれば減衰時間が得られるが、それは (5) と同程度になる。

所で、(5) の  $\tilde{\omega}_0$  を回転流体の角速度とすると回転減衰時間 (Greenspan 1968) になり、成層流体のブラント・バイザラ振動数にとると成層形成時間 (Veronis 1967) になる。之等の現象に共通して居るのは、非粘性流体として振る舞う内部が子午面流れによって制御される事及びその子午面流れが境界層によって誘起される事である。この制御には境界層での粘性或は熱伝導の作用が重要な役割りを果たしているが、制御時間は粘性或は熱伝導の拡散時間と特徴的な周期との幾

何平均である。通常、粘性或は熱伝導性が小さいので、この制御時間は拡散時間に比べてはるかに短い。角速度の変化或は成層度の変化はこの制御時間内に済んでしまう。ここで見たように、U字管内の流体の減衰振動も上と同様の過程なのである。之等の過程を括めて亜拡散過程と呼ぶ事にする。

## 2.2 定量的考察

簡単の爲、表面張力及び管の曲がりの効果を無視しよう。之等の簡単化により、表面での圧力を大気圧に等しく取り、管を真直ぐな円柱として扱う事が出来る。重力の項を静圧にくり込むと、線形化された運動方程式は次のようになる：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + ELu, \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + E\Delta w, \quad (8)$$

$$0 = \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z}. \quad (9)$$

但し

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad L = \Delta - \frac{1}{r^2}, \quad (10)$$

$$E = \tilde{\nu} / (\tilde{\nu}_0 \tilde{\omega}_0), \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} r &= \tilde{r}/\tilde{r}_0, \quad z = \tilde{z}/\tilde{r}_0, \quad t = \tilde{t}\tilde{\omega}_0, \\ (u, w) &= (\varepsilon\tilde{r}_0\tilde{\omega}_0)^{-1}(\tilde{u}, \tilde{w}), \\ p &= (\varepsilon\tilde{\rho}\tilde{r}_0^2\tilde{\omega}_0^2)^{-1}\tilde{p}, \quad \rho = (\varepsilon\tilde{r}_0)^{-1}\tilde{\rho} \end{aligned} \right\} (12)$$

で、 $\varepsilon$ は無次元の微小なパラメター、 $\tilde{r}$ は半径、 $\tilde{z}$ は管軸に沿っての長さ、 $\tilde{p}$ は動圧、 $(\tilde{u}, \tilde{w})$ は夫々速度の $\tilde{r}$ -及び $\tilde{z}$ -成分、文字の上の $\sim$ は次元を持つ物理量を表わす。また、 $\varepsilon$ で既に用いた記号は説明なしに用いた。(12)のようなスケーリングをすると、 $\varepsilon$ が1に比べて十分に小さければ、非線形の項は無視出来る。

線形化された境界条件は次のようになる：

$$z = jl \quad (j=0, 1) \text{ で } \quad \omega_j = \frac{\partial h_j}{\partial t}, \quad p_j = \frac{(-1)^{j+1}l}{2} \rho_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

$$r = 1 \text{ で } \quad u = w = 0. \quad (14)$$

但し  $l = \tilde{l}_0/\tilde{r}_0$  である。

水面での条件(13)で  $r \rightarrow 1$  の極限をとっても管壁での条件(14)は得られない。それ故、境界条件は水面と管壁の交点で不連続になり、その点は流れの特異点になる。Huh and Scriven (1971) が論じたように、特異点の存在は水面の運動と管壁上での迂りなしの条件とが共存する事に関係している。この特異点の性質を調べる事は、流体力学の基礎的条件に関わる重要な問題である。また、固体面上への液膜のコーティ

ング等に関連して、実際上にも重要な問題である。Huh and Mason (1977) は水面近くの管壁に歪りを導入したが、この論文を基に孫引きすれば Dussan and Davis (1974) の論文を始め この問題についての数多くの論文に出合う。我々もこの問題について習作を行なった。しかし、ここでの扱いに於ては、水面周縁は吹き出し、吸い込みという形の特異点であった。(6) から明らかなように、特異点の性質の詳細が解らなくても、ストークス層による流量欠損が解れば振動の減衰を論ずる事が出来る。報文が冗長になるのをさける為、上の特異点の議論は省略する。

粘性が小さい場合には、 $E$  は微小なパラメータになり、流れの場は非粘性の本体、ストークス層及び水面に出来る境界層に分けられる。物理量  $q$  は

$$q = \bar{q}(r, \alpha, \tau) e^{it}, \quad \tau = E^{-\frac{1}{2}} t \quad (15)$$

のような形になるが、之は非粘性本体の振動が  $E^{\frac{1}{2}}$  の時間スケールで減衰する事に対応している。通常の室内実験では、 $E$  が小さいので、この時間スケールは粘性による拡散時間  $E^{-1}$  に比べて十分に小さい。そして、 $\tau$  で述べたように、境界層による亜拡散過程が主役になる。勿論、 $E$  が 1 の程度になれば、 $E^{\frac{1}{2}}$  と  $E^{-1}$  とは同程度になり準定常の扱いが成立つ。しかし、図 2 から解るように、そのような事が成り立つのは管径

2 ~ 3 mm 以下の細い管に限られる。

物理量に (15) の形を代入し簡単な為文字の上の  $\tau$  を省略すると、(7) ~ (9), (13) 及び (14) は次のようになる：

$$E^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial \tau} + iu = -\frac{\partial p}{\partial r} + ELu, \quad (16)$$

$$E^{\frac{1}{2}} \frac{\partial w}{\partial \tau} + iw = -\frac{\partial p}{\partial z} + E \Delta w, \quad (17)$$

$$0 = \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial(rw)}{\partial z}, \quad (18)$$

$z = jl (j=0, 1) \tau$  :

$$w_j = i h_j + E^{\frac{1}{2}} \frac{\partial h_j}{\partial \tau}, \quad p_j = \frac{(-1)^{j+1} l}{2} h_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial z} = 0, \quad (19)$$

$$r = 1 \tau : \quad u = w = 0. \quad (20)$$

(16) 及び (17) に於ては、 $\tau$  微分の項に  $E^{\frac{1}{2}}$  がかかり、粘性項に  $E$  がかかり、 $\tau$  いる。左辺第 2 項を仮想的なコリオリの力と考えると、この 2 つの式は線形化された回転減衰の式と似た構造である。

## 2.1 非粘性の本体

非粘性本体の量は、次のように展開出来る：

$$u_i = E^{\frac{1}{2}} u_i(r, z, \tau) + \dots, \quad (21)$$

$$w_i = w_0 + E^{\frac{1}{2}} w_i + \dots, \quad (22)$$

$$p_i = p_0 + E^{\frac{1}{2}} p_1 + \dots \quad (22)$$

但し、 $u_i$ 等は $r, z, \tau$ の函数で、1の程度である。(21) ~ (23)を(16) ~ (18)に代入すると次式を得る：

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = 0, \quad i\omega_0 = -\frac{\partial p_0}{\partial z}, \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial z} = 0, \quad (24)$$

$$iu_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial r}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial \tau} + i\omega_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial(ru_1)}{\partial r} + \frac{\partial(r\omega_1)}{\partial z} = 0. \quad (27)$$

(27)は、次のような流れ函数 $\psi$ を導入すれば、自動的に満足出来る：

$$u_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial z}, \quad \omega_1 = i \frac{\partial \omega_0}{\partial \tau} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r}. \quad (28)$$

(28)を(25)及び(26)に代入し、 $p_1$ を消去すると、次式を得る：

$$\Delta \psi = 0. \quad (29)$$

## 2.2 管壁上のストークス層

ストークス層の量は、次のように展開出来る：

$$\hat{u} = E \hat{u}_2(\xi, z, \tau) + \dots, \quad (30)$$

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_0 + E^{\frac{1}{2}} \hat{\omega}_1 + \dots, \quad (31)$$

$$\hat{p} = E^{\frac{3}{2}} \hat{p}_3 + \dots, \quad (32)$$

$$\xi = E^{-\frac{1}{2}} (1-r). \quad (33)$$

但し、 $\hat{u}_2$ 等は $\xi, \varepsilon, \tau$ の函数で、1の程度である。(33)は、ストークス層の厚さが(4)で与えられる事に対応する。(30)~(33)を(16)~(18)に代入すると、ストークス層の基礎式を得る。例えば：

$$\frac{\partial^2 \hat{\omega}_0}{\partial \xi^2} = i \hat{\omega}_0. \quad (34)$$

ストークス層では、物理量は非粘性本体の量と層の量の和になる。例えば、軸方向の速度成分は $\omega + \hat{\omega}$ になる。この事情は水面に出来る境界層に於ても同様である。この事を考慮すると、境界条件(20)を満足する(34)の解は次のようになる：

$$\hat{\omega}_0 = -\omega_0 \Big|_{r=1} \cdot e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \xi}. \quad (35)$$

ストークス層での他の量も容易に求められる。しかし、非粘性本体での第1近似に関する限り、(35)及び次の条件を知れば充分である：

$$r=1 \text{ で } : \quad u_1 = 0. \quad (36)$$

[この条件は、(20)、(21)及び(20)から導ける。]

### 2.3 水面に出来る境界層

水面に出来る境界層の量は、次のように展開出来る：

$$\bar{u} = E \bar{u}_2 (\gamma, \eta, \tau) + \dots, \quad (37)$$

$$\bar{w} = E^{\frac{3}{2}} \bar{w}_3 + \dots, \quad (38)$$

$$\bar{p} = E^2 \bar{p}_4 + \dots, \quad (39)$$

$$\eta = (-1)^j E^{-\frac{1}{2}} (z - j\ell). \quad (j=0, 1) \quad (40)$$

但し、 $\bar{u}_2$ 等は $\gamma, \eta, \tau$ の函数で1の程度である。(40)から解るように、水面に出来る境界層もストークス層と同じ厚さを持っている。それから、この境界層の量は皆 $E$ について高い中から始まっている。之は、この層の厚さが $E^{\frac{1}{2}}$ である事と水面での張り応力なしの条件[(19)の第3式]とに由来する。

(19)の最初の二つのものの第0及び第1近似に話を限れば、表面に出来る境界層の影響はない。そして、非粘性本体に対する表面の条件は次のようになる：

$$\Sigma = \ell_j \quad (j=0, 1) \text{で} ;$$

$$w_{0,j} = i h_{0,j}, \quad p_{0,j} = \frac{(-1)^{j+1} \ell}{2} h_{0,j}, \quad (41)$$

$$w_{1,j} = i h_{1,j} + \frac{\partial h_{0,j}}{\partial \tau}, \quad p_{1,j} = \frac{(-1)^{j+1} \ell}{2} h_{1,j}. \quad (42)$$

但し、 $h_j$ は次のように展開出来るとした：

$$h_j = h_{0,j} + E^{\frac{1}{2}} h_{1,j} + \dots. \quad (43)$$

#### 2.4 非粘性本体の減衰振動

(24)により、 $w_0$ は $\gamma$ にも $\Sigma$ にも依らぬ。この事と(35)に

より、 $\hat{\omega}_0$ は $\alpha$ に依らぬ。第0近似の範囲では、非粘性本体は剛体的に振動し、管壁には軸方向に変化しないストークス層が出来る。振動周期は、(24)の第2式及び(41)により、 $2\pi$ である。ストークス層でのエネルギー損失により非粘性本体の振動は減衰するが、その模様を明らかにするには(36)及び(42)を満足する(29)の解 $\psi_1$ 、即ち二次的の子午面流れを調べなければならぬ。所で、 $\hat{\omega}_0$ は $\alpha$ に依らぬから、ストークス層による質量欠損の影響は水面周縁に出来る吹き出し、吸い込みの形で現われる。さしでも述べたように、 $\psi_1$ はこの吹き出し、吸い込みによって駆動される。後に出る(49)から明らかのように、この事を無視した扱いでは非粘性本体の振動は減衰しない[そのような扱いでは、(49)の右辺は0になる]。この事は、ストークス層の存在しない場合、即ち粘性のない場合の振動が減衰しない事に対応する。振動の減衰にはストークス層でのエネルギー損失が本質的役割りを果たす。しかし、ここで強調したいのは、“ストークス層の影響を非粘性本体に伝えて振動を減衰させるのは、水面とストークス層の相互作用によって出来る吹き出し、吸い込みの駆動する二次的の子午面流れである。”という事である。このメカニズムの働らくパラメター範囲は、さしでも述べたように、実在する。また、このメカニズムは回転減衰或は成層形成のメカニズムと

全く同様である。この事情をはっきりさせる為に亜拡散過程という言葉を導入した。

次に、我々の問題と無限に長い管内の強制振動流れを対比するには注意が要る。我々の問題で水柱の長さをあまり長くすると、(3) 及び (4) によって  $\alpha$  と  $\tilde{r}_0$  が同程度になり、準定常の扱いが成り立つようになるからである。また、無限に長い管内の流れにも軸方向変化のある場合が多い。我々の問題とは圧縮流れという点が異なるけれど、半径  $\tilde{r}_0$  の無限に長い管内の気体を伝える音速  $\tilde{\alpha}$  の音波を考えて見よう。振動数を  $\tilde{\omega}_0$  とすれば、軸方向には  $\tilde{\alpha}\tilde{\omega}_0$  のスケールがある。動粘性係数  $\tilde{\nu}$  が小さくストークス層の厚みが  $\tilde{r}_0$  より小さい場合、この音波の減衰距離は  $\tilde{\alpha} \left\{ \tilde{r}_0^2 / (\tilde{\nu}\tilde{\omega}_0) \right\}^{\frac{1}{2}}$  である。(Rayleigh 1945)。之は、減衰時間が (5) と同程度である事に対応する。また、非粘性本体には我々の場合と同様な子午面流れが出来ている。

(26) を満足する (29) の解は次のようになる：

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n J_1(\lambda_n r) \frac{\cos k \lambda_n z + \cos k \lambda_n (l-z)}{1 + \cos k \lambda_n l} \quad (44)$$

但し、 $J_1$  は 1 次のベッセル函数、 $\lambda_n$  は  $J_1$  の  $n$  番目の零点である。

(44) を (28), (25), (26) 及び (42) の第 2 式に代入すると次式を得る：

$$P_1 = i \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n J_0(\lambda_n r) \frac{\sin k \lambda_n z - \sin k \lambda_n (l-z)}{1 + \cos k \lambda_n l}, \quad (45)$$

$$h_{1,1} = h_{1,0} = \frac{2i}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n J_0(\lambda_n r) \frac{\sin k \lambda_n l}{1 + \cos k \lambda_n l}. \quad (46)$$

(45) 及び (46) を (42) の第1式に代入し、 $r$  について積分すると、次式を得る：

$$r \frac{dh_0}{d\tau} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{2}{\lambda_n l} \right\} \psi_n J_1(\lambda_n r) = - \psi_1 \Big|_{z=l}. \quad (47)$$

ここで、第3式に移る際、 $\lambda_n l \gg 1$  を考えて中カッコ内の第2項を無視した。

(47) で  $r = l$  とすると次式を得る：

$$\frac{dh_0}{d\tau} = - \psi_1 (r=l, z=l). \quad (48)$$

くり返し述べたように、水面周縁には、ストークス層による質量欠損に対応する吹き出し（或は吸い込み）がある。 $\psi_1$  はこの吹き出し分だけ跳ぶ。跳びの分量は、(35) により、次のように見積れる：

$$\begin{aligned} \frac{dh_0}{d\tau} &= E^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} (-\omega_0) e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \xi} E^{\frac{1}{2}} d\xi \\ &= - \frac{1-i}{\sqrt{2}} \omega_0 = - \frac{1+i}{\sqrt{2}} h_0. \end{aligned} \quad (49)$$

(49) は  $\bar{r}_0$  についての減衰振動の式である。この式の解から(5)が導かれる。また、 $r = 1$  に於ける  $\psi$  の跳びを無視すれば、(49) の右辺が 0 になり、我々の時間スケールに於ける減衰は起こらない。

$\psi_{1n}$  は、(47) から、次のようになる：

$$\psi_{1n} = \frac{1}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \cdot \frac{d\bar{h}_0}{d\tau} \quad (50)$$

第3図に二次的の子午面流れ  $\psi$  の流線を、第4図に水面の相対高さの分布を示す。 $\bar{r}_0$  は  $r = 1$  で無限大になるので、その附近の形を点線で示した。水面の境界条件を  $x = j\ell$  ( $j = 0, 1$ ) で与え、表面張力の効果を無視する近似は、この特異性の為、水面周縁では適用出来ない。

### 3.3 実験について

減衰時間 (5) は、(2) と対照的に  $\bar{r}_0^2$  にではなく  $\bar{r}_0$  に比例し、(2) に比べて小さな絶対値を持つ。実験との比較の上で(5) と (2) の優劣を決めるには、 $\bar{r}$  及び  $\bar{r}_0$  を定めて  $\bar{r}_0$  を変える実験を行ない、減衰時間の絶対値及び  $\bar{r}$  依存性について比較すればよい。その為、水を用い、水柱の長さを約 1 m と定め、3種類の管径：0.7, 1.3 及び 1.7 cm について実験した。各管について数回実験を行ない、実験毎に振巾の極大を時間

の函数として半対数方眼紙にプロットした。このプロットを平行移動させて始点を揃えると、実験点はほぼ一直線に並ぶ。減衰時間の実験値は、この直線から容易に求められる。その結果を第2図の十じろしで示した。

おわりに

ここには、表面張力及び管の曲がりを無視した線形の扱いを示した。

しかし、既に述べたように、表面張力を無視する近似は水面周縁では成り立たない。そこでは、又、水面での条件を水平面で課する近似も成り立たない。

管の曲がりを無視する事は、ここでの扱いのように振中が管径に比べて小さければ許される。実験では、特に振中が管径と同程度の場合、管の曲がり部に強い子午面流れが現われる。之は曲がり部での遠心力によって駆動されるものと考えられる。

之等を考えた扱いをする事が今後の課題である。

それから、我々の実験は水面の上下を裸眼で見るとごく初等的なものである。之/及び之/に述べた事を確かめるには充分と思うが、更に詳しい実験を行う必要がある。

最後に、(2)が実験に合わぬ事に気付いて質問してくれた沢英樹君、Stokesが減衰法則(5)を知っていた事を指摘して下さいましたMcIntyre博士、ピストンまわりの流れの文献を教えてくださいました西脇一字博士、研究会で話すよう励めて下さった橋本英典教授、研究会の席で我々の考え方を検討して下さいました今井功教授に心から感謝する。

## 参考文献

- Dussan V., E. B. and Davis, S. H. 1974  
 On the motion of a fluid-fluid interface along a  
 solid surface  
 J. Fluid Mech. 65 71 ~ 95
- H. P. Greenspan 1968 The Theory of Rotating Fluid  
 Cambridge U. Press 34 ~ 60
- 藤本武助 1950年 水力学概論  
 養賢堂 182 ~ 186
- Huh, C. and Mason, S. G. 1977  
 The steady movement of a liquid meniscus in a  
 capillary tube  
 J. Fluid Mech. 81 401 ~ 419
- Huh, C. and Scriven, L. E. 1971  
 Hydrodynamic Model of Steady Movement of a  
 Solid/Liquid/Fluid Contact Line  
 J. Colloid Interface Sci. 35 85 ~ 101
- Mei, C. C. and Liu, L. F. 1973  
 The damping of surface gravity waves in a bounded  
 liquid  
 J. Fluid Mech. 59 239 ~ 256

- J. W. S. Rayleigh      1945      *The Theory of Sound*  
                                  Dover Publ.      Vol. II      323~326
- Stokes B., G. G.      1850  
                                  *On the Effect of the Internal Friction of Fluids  
                                  on the Motion of Pendulum in Mathematical and  
                                  Physical Papers*  
                                  Vol. III      Johnson Reprint Corp.      19~22
- Tabaczynski, R. J., Hoult, D. P. and Keck, J. C.      1970  
                                  *High Reynolds number flow in a moving corner*  
                                  *J. Fluid Mech.*      42      249~255
- Veronis, G.      1967  
                                  *Analogous behavior of homogeneous,  
                                  rotating fluids and stratified non-rotating fluids*  
                                  *Tellus*      19      326~335
- S. Whitaker      1968      *Introduction to Fluid Mechanics*  
                                  Prentice-Hall, Inc.      323~331

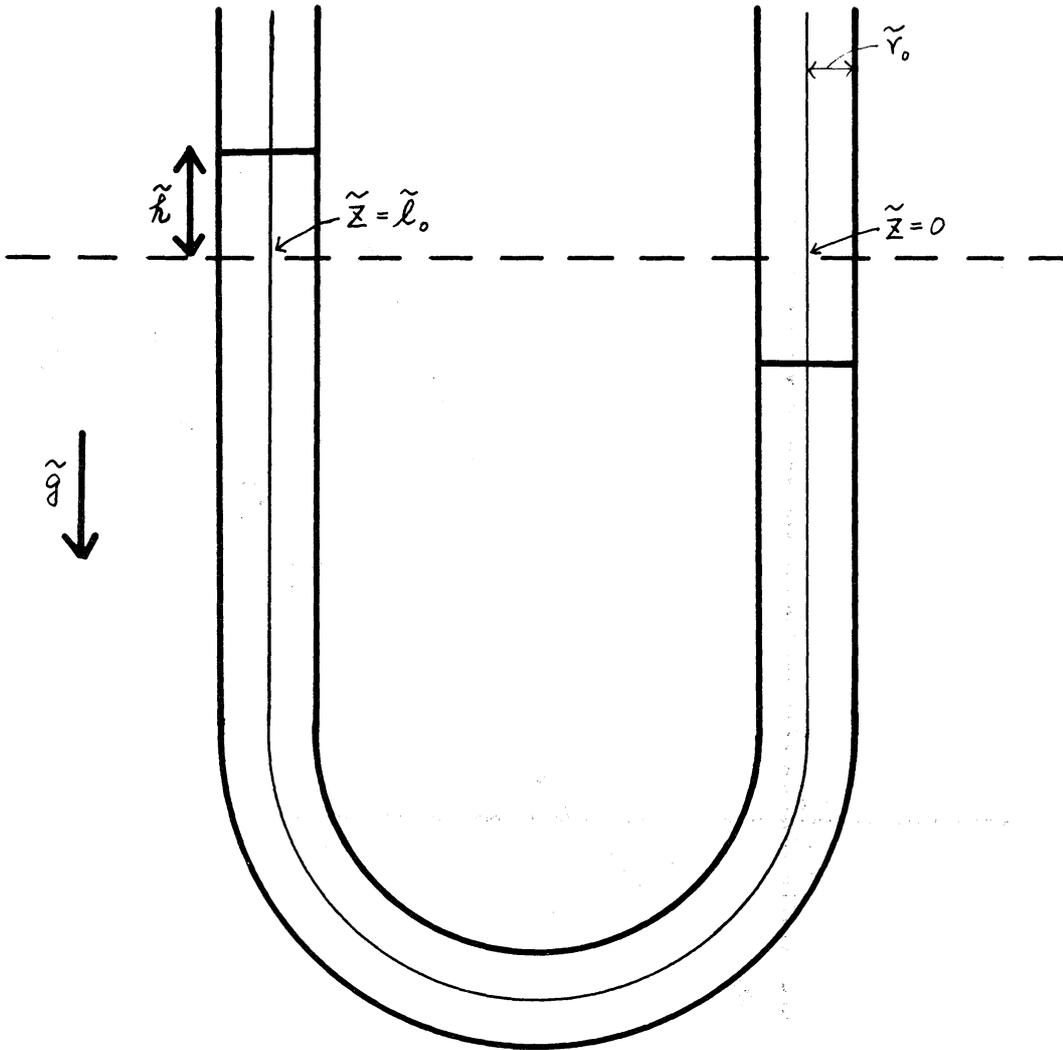


図1 U字管内の水柱

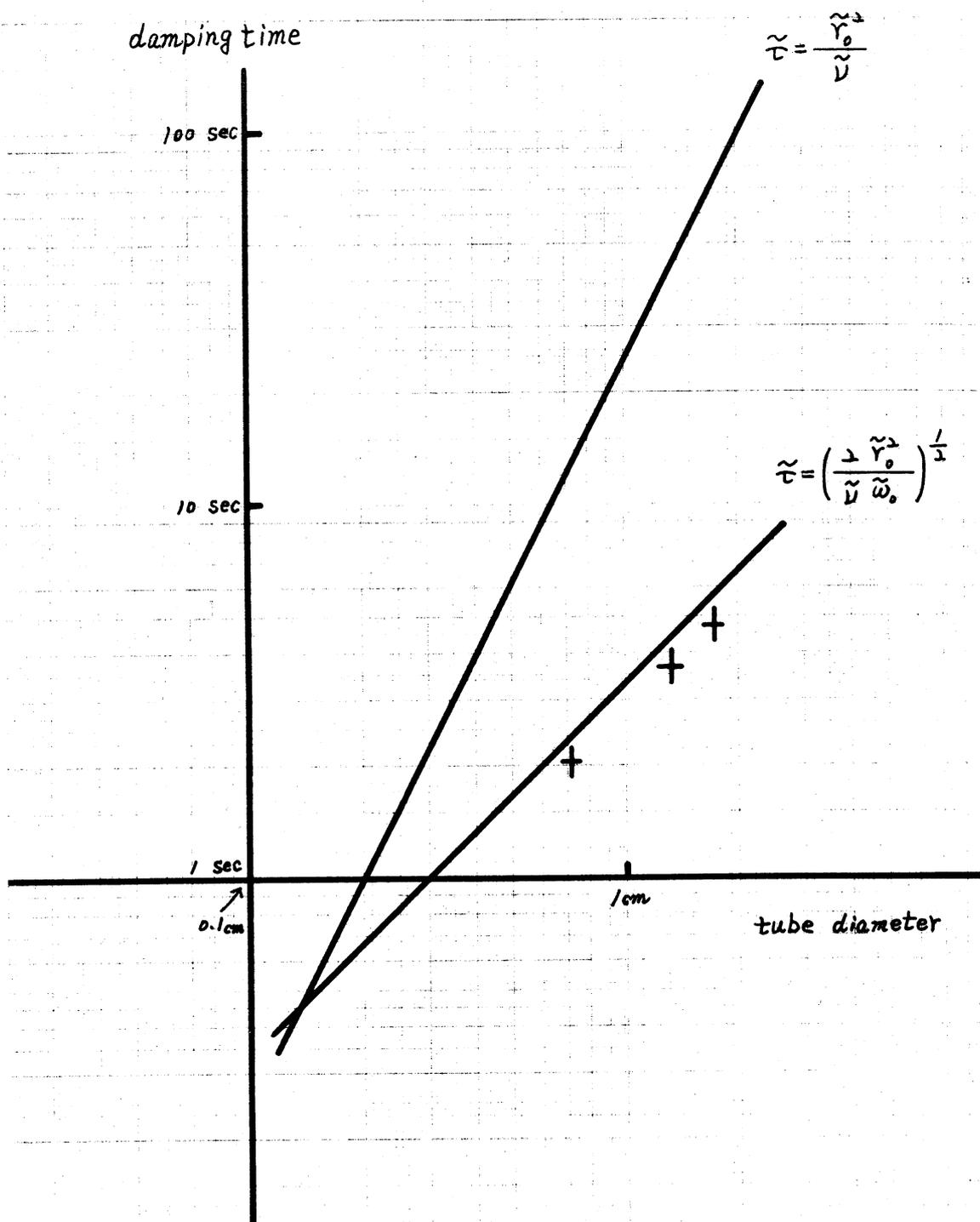


図2 実験結果(+)と(2)及び(5)の比較

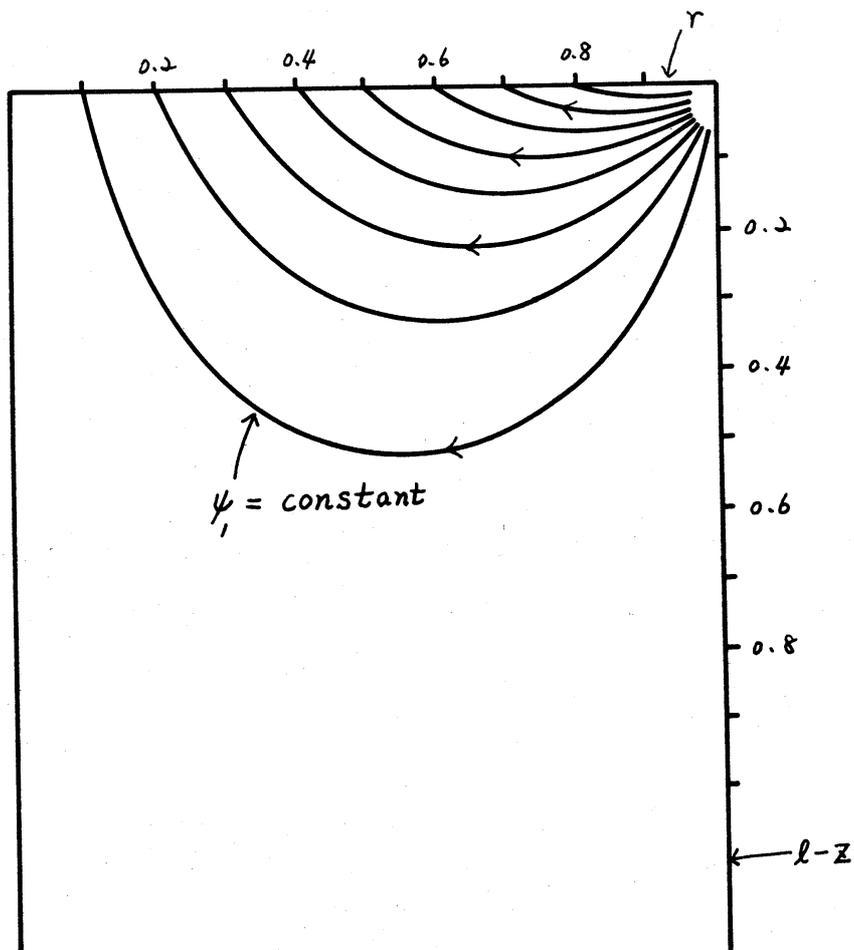


図3 水面周縁からの吹き出しによる子午面流れ(減衰しない仮想水面に乗って見たもの)

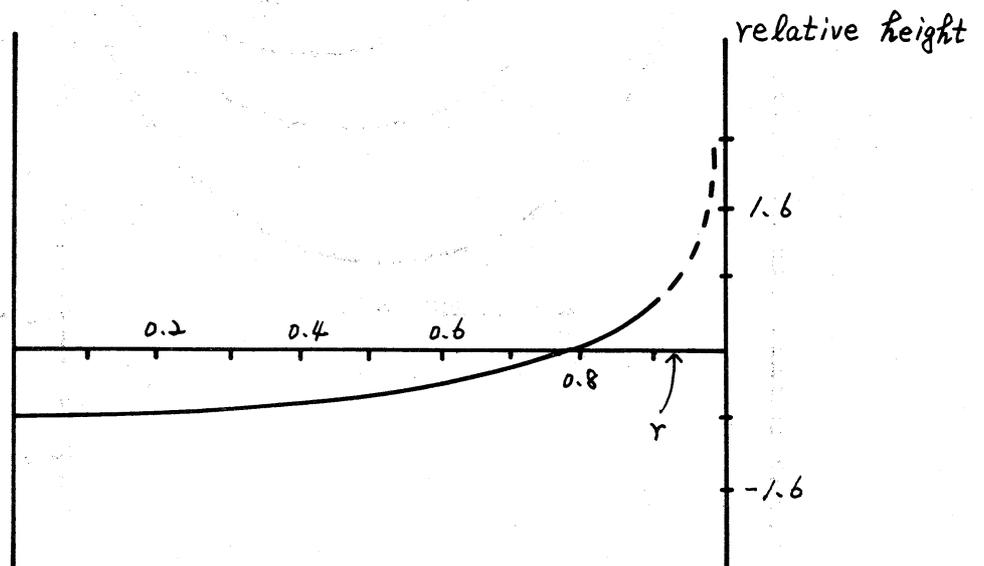


図4 水面の相対的高さの分布

周縁では発散するので、点線で表わした。