数理解析研究所講究録
第 360 巻 1979 年 205-211

Navier-Stokes 方程式の新しい導出について

広島大 理　井上淳
舟木直久

1. 流体力学の基礎となる方程式として，非圧縮性完全流体に対応する Euler 方程式 (E) と，非圧縮性粘性流体に対応する Navier-Stokes 方程式 (NS) とが，知られている。

$$
(E)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f & \\ \operatorname{div} u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}
$$

$$
(NS)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f & \\ \operatorname{div} u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}
$$

ここで，$u = \{u^i(x,t)\}_{i=1}^n$ は速度ベクトル場，$p = p(x,t)$ は圧力，$f = f(x,t)$ は外力，$u_0(x)$ は初期速度場，μ は運動粘性係数とよばれる正の定数であり，

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2}, \quad \nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial p}{\partial x^n}\right)$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial x^i}, \quad (u\cdot\nabla)u \text{ の } i \text{ 成分} = \sum_{j=1}^n u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$$

である。これらの方程式は，物理的な仮定の下で導かれたも

のであるが，Euler 方程式には，幾何学的な意味付けを与える事が可能である。即ち，体積を変えない $\mathbb{R}^n$ 上の flow $\Phi_t(\cdot)$ に対し，エネルギー積分

$$J(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \Phi_t^i}{\partial t} \right)^2 dt\, dx$$

を考えると，Φ^0, Φ^1 を与えて，条件"$\Phi_0(\cdot) = \Phi^0$, $\Phi_1(\cdot) = \Phi^1$"の下で，$J(\Phi)$ を最小にする flow の速度ベクトル場が，外力 $f=0$ の Euler 方程式に従がう事がわかる。ここでの目標は，Navier-Stokes 方程式，特に，"粘性"の数学的理解を行なう事である。

流体のもつ粘性は，微視的な流体粒子の衝突の巨視的な表われであると見るのが自然であろうが，数学的な表示には，技術上の困難を伴なう。そこで，我々は，非可逆現象に対する確率論の有効性から，flow $\Phi_t(x)$ に random な衝突の結果変化すると思われる効果を加えて，$\Phi_t(x) + \sqrt{2\mu}\, B_t(\omega)$ と変換し，エネルギー積分 $J(\Phi + \sqrt{2\mu}\, B)$ を最小にするという問題を考える。ここで，$B_t = \{B_t^i(\omega)\}_{i=1}^n$ は，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の n 次元 Brown 運動である。よく知られているように，B_t は t について微分不可能であり，$J(\Phi + \sqrt{2\mu}\, B)$ は一般には発散する。しかし，形式的にいえば，方程式 (E) $(f=0)$ で u を $u + \sqrt{2\mu}\, \dot{B}_t$ $\left(\dot{B}_t = \frac{dB_t}{dt} \right)$ と変換したことになり，次の方程式(

Euler 方程式の random 化）を得る。

$$
(E)_B \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u + \sqrt{2\mu}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x^i}\circ\dot{B}_t^i + \nabla p = 0 \\ \mathrm{div}\, u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}
$$

但し，$u = u(x,t;\omega)$，$p = p(x,t;\omega)$。この方程式は，B_t を滑らかな関数で近似した極限として導くことが可能である。

2. 方程式 $(E)_B$ に数学的な意味を与える為に確率論からの準備を行なう。

H：可分な実 Hilbert 空間　　内積 $(\ ,\ )$

$\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s(\omega)\ ;\ 0\le s\le t\}$

次のような H-値確率過程の族を考える。

$\mathcal{B}(H) = \{X_t\ ;\ X_t$ は H-値確率過程で，$\forall h\in H$ に対し (X_t, h) は，$\{\mathcal{F}_t\}$-adapted な可測過程$\}$

$\mathcal{L}^2(H) = \{\Phi_t\in\mathcal{B}(H)\ ;\ \|\Phi_t\|^2_{\mathcal{L}^2(H)} = E[\int_0^T\|\Phi_t\|_H^2\,dt] < \infty\}$

但し，$E[\cdot] = \int\cdot\, dP(\omega)$：平均値，$T<\infty$

$\mathcal{M}(H) = \{M_t\in\mathcal{B}(H)\ ;\ \forall h\in H$ に対し，(M_t, h) は，二乗可積分な $\{\mathcal{F}_t\}$-martingale $\}$

$\mathcal{A}(H) = \{A_t\in\mathcal{B}(H)\ ;\ A_t$ は強微分 $\dfrac{dA}{dt}\in\mathcal{L}^2(H)$ をもち，$A_0 = 0\}$

$\mathcal{Q}(H) = \{Q_t = M_t + A_t\ ;\ M_t\in\mathcal{M}(H),\ A_t\in\mathcal{A}(H)\}$

：H-値 $\{\mathcal{F}_t\}$-quasi martingale という。

(i) $\Phi_t \in \mathcal{L}^2(H)$ に対し 確率積分 $\int_0^t \Phi_s dB_s^j$ を次の式で定義することができる。

$$\left(\int_0^t \Phi_s dB_s^j, h\right) = \int_0^t (\Phi_s, h) dB_s^j \qquad \forall h \in H$$

ここで，右辺は普通の伊藤確率積分である。$\int_0^t \Phi_s dB_s^j \in \mathcal{M}(H)$ で，各 $t \in [0,T]$ に対し，$L^2(\Omega, H)$ に属し，a.s. ω に対し，$C([0,T], H)$ に属することがわかる。

(ii) $M_t \in \mathcal{M}(H)$ に対し，一意的に $\Phi_t^j \in \mathcal{L}^2(H)$ $(j=1,\cdots,n)$ が存在し，

$$M_t = M_0 + \sum_{j=1}^n \int_0^t \Phi_s^j dB_s^j \qquad , \quad M_0 \in H$$

と表現できる。更に，$Q_t \in \mathcal{Q}(H)$ は，

$$Q_t = Q_0 + \sum_{j=1}^n \int_0^t \Phi_s^j dB_s^j + \int_0^t \Phi_s ds$$

Φ_t^j $(j=1,\cdots,n)$, $\Phi_t \in \mathcal{L}^2(H)$, $Q_0 \in H$ と表現できる。$\{\Phi_t^j\}_{j=1}^n$ を Q_t の B-微分といい，$\Phi_t^j = \dfrac{\partial Q_t}{\partial B_t^j}$ と書く。

(iii) $Q_t \in \mathcal{Q}(H)$ に対し，確率積分 $\int_0^t Q_s \circ dB_s^j$ を次の式で定義することができる。

$$\left(\int_0^t Q_s \circ dB_s^j, h\right) = \int_0^t (Q_s, h) \circ dB_s^j \qquad \forall h \in H$$

ここで，右辺は Stratonovich の確率積分である。このとき，

$$\int_0^t Q_s \circ dB_s^j = \int_0^t Q_s dB_s^j + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial Q_s}{\partial B_s^j} ds$$

を得る。

<u>Lemma</u> $a_j(t)$ $(j=1,\cdots,n)$, $b(t)$ を $L^2([0,T] \times \Omega)$ に属する $\{\mathcal{F}_t\}$-adapted な実数値確率過程であって次の式を満たすとす

3.

$$\sum_{j=1}^{n}\int_0^T \phi(t)\, a_j(t)\, dB_t^j + \int_0^T \phi(t)\, b(t)\, dt = 0 \qquad {}^\forall \phi \in C_0^\infty([0,T])$$

このとき, $a_j(t) = b(t) = 0 \quad (j = 1, \cdots, n)$

(証明は, 容易であるので略す)

3. 方程式 $(E)_B$ を次の意味で解釈する。

Def. ベクトル場 $u = u(x,t;\omega)$ が, $u_0 \in \mathbb{H}_\sigma^1(\mathbb{R}^n)$ に対する $(E)_B$ の解であるとは,

(i) $u \in Q(\mathbb{H}_\sigma^1(\mathbb{R}^n))$

(ii) ${}^\forall \theta(t) \in C_0^\infty([0,T))$, ${}^\forall v(x) \in \mathbb{C}_{0,\sigma}^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\left(u^i \frac{\partial \theta}{\partial t} v^i + u^i u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\theta \right) dx\, dt + \sqrt{2\mu}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} u^i \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\theta \circ dB_t^j\, dx = -\theta(0)\int_{\mathbb{R}^n} u_0^i v^i dx \quad (a.s.)$$

(ここで, Σ は省略している)

但し,

$\mathbb{L}_\sigma^2(\mathbb{R}^n) = \{ v \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n \; ; \; \operatorname{div} v = 0 \}$

$\mathbb{C}_{0,\sigma}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{ v \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^n \; ; \; \operatorname{div} v = 0 \}$

$\mathbb{H}_\sigma^1(\mathbb{R}^n) = \{ v \in (H^1(\mathbb{R}^n))^n \; ; \; \operatorname{div} v = 0 \}$

$\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{R}^n) = (H^{-1}(\mathbb{R}^n))^n$

$H^\ell(\mathbb{R}^n)$ は ℓ 次の Sobolev 空間.

Def. ベクトル場 $u = u(x,t)$ が, $u_0 \in \mathbb{H}_\sigma^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^2(0,T;\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{R}^n))$ に対する (N.S) の解であるとは,

(i) $u \in L^\infty(0,T; \mathbb{L}^2_\sigma(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0,T; \mathbb{H}^1_\sigma(\mathbb{R}^n))$

(ii) $\forall\theta(t) \in C_0^\infty[0,T)$, $\forall v \in \mathbb{C}^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} \dot\theta u^i v^i dxdt + \mu\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} \theta \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\frac{\partial v^i}{\partial x^j} dxdt - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} \theta u^i u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dxdt$$
$$= \theta(0)\int_{\mathbb{R}^n} u_0^i v^i dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} \theta f^i v^i dxdt$$

このとき, 次の定理を得る。

<u>Theorem</u> u を $(E)_B$ の解とすると, その平均値 $\bar u(x,t) = E[u(x,t;\omega)]$ は, 次の方程式の解である。

$$(R)\begin{cases} \dfrac{\partial\bar u}{\partial t} - \mu\Delta\bar u + (\bar u\cdot\nabla)\bar u + \nabla\pi = -\overline{(v\cdot\nabla)v} \\ \operatorname{div}\bar u = 0 \\ \bar u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

し, $v = u - \bar u$.

(証明)

$u \in Q(\mathbb{H}^1_\sigma(\mathbb{R}^n))$ は,

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial B^j} dB_s^j + \int_0^t \frac{\partial A}{\partial s} ds$$

(A は. uの絶対連続部分 , $A \in \mathcal{A}(\mathbb{H}^1_\sigma(\mathbb{R}^n))$)

表現されるから, 伊藤の公式を用いて,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} \dot\theta u^i v^i dxdt = -\theta(0)\int_{\mathbb{R}^n} u^i(0) v^i dx - \int_0^T \theta\left(\int_{\mathbb{R}^n} v^i \frac{\partial u^i}{\partial B^j} dx\right) dB^j$$
$$- \int_0^T \theta(t)\left(\int_{\mathbb{R}^n} v^i \frac{\partial A^i}{\partial t} dx\right) dt$$

ここで,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} \theta u^i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \circ dB_t^j dx = \int_0^T \theta\left(\int_{\mathbb{R}^n} u^i \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx\right) dB_t^j + \frac{1}{2}\int_0^T \theta\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u^i}{\partial B^j}\frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx\right) dt$$

に注意すれば，$(E)_B$ の解の定義と，Lemma より，次の二式を得る。

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial A^i}{\partial t}v^i\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}u^iu^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\,dx+\sqrt{\frac{\mu}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial u^i}{\partial B_t^j}\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial u^i}{\partial B_t^j}v^i\,dx=\sqrt{2\mu}\int_{\mathbb{R}^n}u^i\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\,dx \qquad (j=1,\cdots,n)$

(b) を (a) に代入すれば，

(a)′ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial A^i}{\partial t}v^i\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}u^iu^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\,dx+\mu\int_{\mathbb{R}^n}u^i\Delta v^i\,dx$

この平均値をとれば，求める方程式を得る。

注意 (i) 乱流は，Navier-Stokes 方程式に従がうと考えられていて，その統計的な様子を表わす方程式として，Reynolds 方程式が知られている。我々の導いた方程式 (R) は，むしろ，Reynolds 方程式と見た方が自然である。

(ii) $(E)_B$ の解の範囲を，$Q(\mathbb{H}^1_\sigma(\mathbb{R}^n))$ に限定する事は本質的な意味をもつ。例えば，$\bar{u}(x,t)$ を (E) ($f=0$) の解とし，$u(x,t;\omega)=\bar{u}(x,t)-\sqrt{2\mu}\,\dot{B}_t$ とおけば，$(E)_B$ の解（適当な意味で）になる。しかし，この解の平均値は，(E) に従がい，(R) の解ではない。