数理解析研究所講究録
第 361 巻 1979 年 68-79

p－進L函数について

京大 理 太田雅己

久保田－Leopoldt [9] が p－進L函数を構成して以後、それについての研究、および一般化が多くの人によってなされてきた。以下はその紹介である。

§1 久保田－Leopoldt の p－進L函数（$\mathbb{Q}$の場合）。

$\zeta(s)$ を Riemann の zeta 函数とし、Bernoulli 数 B_n $(n=0,1,\cdots)$ を $\dfrac{te^t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n}{n!}t^n$ で定義する。すると $\forall n\in\mathbb{N}$ について

$$(1)\qquad \zeta(1-n)=-\frac{B_n}{n}\in\mathbb{Q}$$

となることは古くから知られていた。同様のことは Dirichlet の L 函数についても成り立つ；χ を導手 f の原始的 Dirichlet 指標、$L(s,\chi)$ を対応する Dirichlet の L 函数とする。「一般 Bernoulli 数」$B_{n,\chi}$ $(n=0,1,\cdots)$ を $\sum_{a=1}^{f}\dfrac{\chi(a)te^{at}}{e^{ft}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_{n,\chi}}{n!}t^n$ で定義すると $\forall n\in\mathbb{N}$ について

$$(2)\qquad L(1-n,\chi)=-\frac{B_{n,\chi}}{n}\in\mathbb{Q}(\chi)\overset{dfn}{=}\mathbb{Q}(\chi(1),\cdots,\chi(f-1)).$$

このことを用いて久保田－Leopoldt は $\zeta(s)$、$L(s,\chi)$ の p－

adic な類似物．即ち p-進 L 函数を構成した。結果を述べるために言葉を準備する； p を（固定された）素数．$\mathbb{Q}_p$ を p-進数体、$\mathbb{C}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包の完備化．$|\cdot|$ を $\mathbb{C}_p$ の付値とする。以下 $\mathbb{Q}$ の代数的閉包の $\mathbb{C}_p$ への埋め込みを一つきめて．それで代数的数を $\mathbb{C}_p$ の元と見做す。$q = p$ (resp. 4) if $p \geqq 3$ (resp. $p = 2$) とおき、（$\mathbb{C}_p$ に値をとる）mod q の Dirichlet 指標 ω を $p \geqq 3$ のとき $\omega(a) = \lim_{n \to \infty} a^{p^n}$、$p = 2$ のとき
$$\omega(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \equiv 1 \mod 4 \\ -1 & \phantom{\text{if }} a \equiv -1 \mod 4 \\ 0 & \phantom{\text{if }} a \equiv 0 \mod 2 \end{cases}$$
で定める。

<u>定理 1</u> （[9]） $\mathbb{Q}_p(\chi) = \mathbb{Q}_p(\chi(1), \cdots, \chi(f-1))$ - 係数の巾級数

$$(3) \quad L_p(s, \chi) = \frac{a_{-1}}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-1)^n$$

で次をみたすものが唯一つ存在する。

(i) (3) の右辺の和は $\forall s \in \mathbb{C}_p$ s.t. $|s-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}} |q|^{-1}$ で収束する。

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ について

$$(4) \quad L_p(1-n, \chi) = (1 - (\chi\omega^{-n})(p) \cdot p^{n-1}) \times \frac{-B_{n, \chi\omega^{-n}}}{n}$$

（但し、$\chi\omega^{-n}$ は $a \longmapsto \chi(a)\omega(a)^{-n}$、$(a, pf) = 1$ に付随する原始指標とした）。

(iii) $$a_{-1} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{p} & \text{if } \chi = \chi^0 \overset{\text{def}}{=} \text{単位指標} \\ 0 & \text{if } \chi \neq \chi^0 \end{cases}$$

<u>注意</u> 1) $L(s, \chi)$ の函数等式から．$\chi(-1) = -1$ ならば $L_p(s, \chi) \equiv 0$（恒等的に 0）となる。一方，$\chi(-1) = 1$ なら

$L_p(s,\chi) \neq 0$。

2）(4) で $n \equiv 0 \mod (p-1)$ (resp. mod 2) 且 $p \geq 3$ (resp. $p=2$) なら $L_p(1-n,\chi) = (1-\chi(p)\cdot p^{n-1})\,L(1-n,\chi)$ 即ち古典的なL函数の値から p 番目の Euler 因子を除いたものとなっている。この性質と (i) で $L_p(s,\chi)$ は characterize される。

3）(iii) は $\zeta(s)$ (resp. $L(s,\chi)$, $\chi \neq \chi^0$) が $s=1$ で1位の極をもちそこでの留数が1 (resp. $s=1$ で正則)、にあたる性質が p−進L函数についても成り立っていることを示している。

4）定理1の証明は $B_{n,\chi}$ の次の p-adic な性質に基づいている（[9] 又は岩沢 [8]）：

$$B_{n,\chi} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k f} \sum_{a=1}^{p^k f} \chi(a)\, a^n .$$

§2　Leopoldt の p−adic 類数公式

F を $\mathbb{Q}$ の Abel 拡大とする。このとき F の Dedekind zeta 函数 $\zeta_F(s)$ は $F/\mathbb{Q}$ に対応する Dirichlet 指標のL函数の積となる：$\zeta_F(s) = \prod_\chi L(s,\chi)$. そこで F の p−進 zeta 函数を

$$\zeta_{F,p}(s) = \prod_\chi L_p(s,\chi)$$

で定義する。ここで勿論積は上と同じ χ を走る。注意1）から F が総実の時に限り $\zeta_{F,p}(s) \neq 0$ である。

一方、Fが（一般の）総実代数体の時古典的な類数公式は

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_F(s) = 2^{[F:Q]-1}\, h\, R_\infty / \sqrt{\Delta}$$

となる。ここで Δ、h、R_∞ は各々 F の判別式、類数、単数規準とした。Leopoldt [10]、[11] は $\zeta_{F,p}(s)$ についても類似の公式の成り立つことを示した（或は、これをいうのがひとつのモチーフだったようである。cf [9] および後の注意 2))。

<u>定理 2</u> ([10]、[11]) F が総実で Q と Abel の時

$$(5) \quad \lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_{F,p}(s) = \prod_{\chi}\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)\cdot 2^{[F:Q]-1}\, h\, R_p / \sqrt{\Delta}$$

ここで R_p は F の「p－進単数規準」（cf [10] 又は [8]）。

この定理は $L(1,\chi)$ $(\chi \neq \chi^0)$ の表示式の類似である次の結果を用いて証明される。

<u>定理 3</u> ([11]) $\chi(-1)=1$、$\chi\neq\chi^0$ のとき

$$L_p(1,\chi) = -\left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)\frac{\tau(\chi)}{f}\sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)\log_p(1-\zeta^{-a}).$$

ここで ζ は（固定された）1 の原始 f 乗根、τ(χ) は Gauss の和：$\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{f}\chi(a)\zeta^a$、$\log_p$ は p-adic log とした。

<u>注意</u> 1) p－進単数規準が一般に 0 でないかどうかは解っていない（Leopoldt 予想）。しかし F/Q が Abel の時には Brumer により $R_p \neq 0$ が証明されている。従って (5) は trivial な等式：0 = 0 ではない。

2) 非正整数たちが Z_p で稠密なことから、$L_p(1,\chi)$ は非正整数での値、即ち一般 Bernoulli 数を用いて p-adic に

近似することができる。具体的な形については[9]、[11](および§4の命題)参照。

§3 一般の総実代数体のp-進L函数

[9]以後色々な研究（岩沢[7]、Serre[12]、Coates-Sinnot[4]等々）があるが、ここでは最近Deligne-Ribet[5]、Cassou-Noguès[1]によって得られた一般の結果を記す。

以下Fを一般の総実代数体、$\mathfrak{f}$をFの整ideal、χを導手$\mathfrak{f}$のFの原始的類指標とする。このときHeckeのL函数：$L(s,\chi)=\sum\chi(\mathfrak{a})N\mathfrak{a}^{-s}$（$\mathfrak{a}$は$\mathfrak{f}$と素なFの整idealを走る、Nはidealの絶対norm。）は全平面に有理型に解析接続され、$s=1$以外で正則である。(1)、(2)の一般化として次の結果がある。

定理4（Siegel-Klingen [15]）$\forall n\in\mathbb{N}$について
$L(1-n,\chi)\in\mathbb{Q}(\chi)\overset{\mathrm{dfn}}{=\!=}\mathbb{Q}(\chi(\mathfrak{a})\mid\mathfrak{a}:\mathfrak{f}と素)$。

さて、θを$\mathfrak{a}\longmapsto\omega(N\mathfrak{a})$、$(\mathfrak{a},p)=1$で定まる原始的類指標とする。

定理5（[1]、[5]）$\mathbb{Z}_p-\{1\}$上の$\mathbb{C}_p$に値をとる連続函数$L_p(s,\chi)$で次をみたすものが唯一つ存在する；

(i) $\forall n\in\mathbb{N}$について

$$(6)\quad L_p(1-n,\chi)=\prod_{\mathfrak{g}\mid p}(1-(\chi\theta^{-n})(\mathfrak{g})N\mathfrak{g}^{n-1})\,L(1-n,\chi\theta^{-n})$$

但し $\chi\theta^{-n}$ の意味は定理1 (ii) と同様とする。

(ii) 或る条件 ($(\mathfrak{c}, p\mathfrak{f})=1$ etc. ; 詳しくは [1] を参照) をみたす無限に多くの F の整 ideal $\mathfrak{c}$ に対して

$$s \longmapsto \left(\chi(\mathfrak{c}) \left(\frac{N\mathfrak{c}}{\theta(\mathfrak{c})} \right)^{1-s} - 1 \right) L_p(s, \chi)$$

は $\mathbb{Q}_p(\chi)$ 上の「岩沢函数」となる。(岩沢函数については次節で説明する。)

<u>注意</u> 1) (ii) から定理1の (i) および (iii) の後半にあたる次の系が得られる。

<u>系</u> $L_p(s, \chi) = \dfrac{a_{-1}}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-1)^n$, $\forall a_n \in \mathbb{Q}_p(\chi)$

と展開され、右辺の和は $\forall s \in \mathbb{C}_p$ s.t. $|s-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}} |q|^{-1}$ で収束する。又、χ が単位指標 χ^0 でなければ $a_{-1} = 0$。

2) $\chi = \chi^0$ のとき $L_p(s, \chi^0) \overset{dfn}{=} \zeta_{F,p}(s)$ は F の p 一進 zeta 函数である。これについて (5) と同じく

(7) $\displaystyle \lim_{s \to 1} (s-1) \zeta_{F,p}(s) = \prod_{\mathfrak{p} | p} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) 2^{[F:\mathbb{Q}]-1} h R_p / \sqrt{\Delta}$

となることが予想されている。(cf Coates [2], Serre [13].)

3) [5] は未発表で、筆者は見ていないが、Serre [12] の方法 (elliptic modular form を使う) を Hilbert modular form を使って一般化したものらしい。[1] の証明は新谷 [14] による部分 zeta 函数、および その特殊値の「初等的」表示に基いている。

§4 岩沢－Coates予想

まず前節で言い残した岩沢函数について述べる。Kを$\mathbb{Q}_p$の有限次拡大、$\mathcal{O}$をその整数環とする。不定元Xに関する$\mathcal{O}$係数の一変数形式的巾級数環$\mathcal{O}[[X]]$を$\Lambda_{\mathcal{O}}$又は単にΛと書く。

定義 $\mathbb{Z}_p$上のKに値をとる連続函数Fが(K上の)岩沢函数であるとは、次の同値な条件がFについて成り立つことをいう。

(i) $\exists f(X)\in\Lambda_{\mathcal{O}}$, $\exists u=1+\pi\in 1+q\mathbb{Z}_p$ s.t. $|\pi|=|q|$ があって、$F(s)=f(u^s-1)$となる。

(ii) $s\longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^s$ ($a_i\in\mathcal{O}$、$u_i\in 1+q\mathbb{Z}_p$、$n<\infty$) の形の函数がFに一様収束する。

岩沢函数のひとつの特徴づけとして次の結果がある。

命題 (Serre [12]) $F:\mathbb{Z}_p\longrightarrow K$を連続函数とする。$s_0, s_1\in\mathbb{Z}_p$、$s_1\neq 0$を任意にとり

$$\delta_n=\delta_n(s_0,s_1)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(s_0+(n-i)s_1)$$

とおく($n\geqq 0$)。又、$c_{i,n}\in\mathbb{Z}$ ($1\leq i\leq n$, $n\geqq 1$)を

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,n}x^i = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

で定める。すると、Fが岩沢函数なら次の(i)(ii)が成り立つ。

(i) $|\delta_n/q^n p^{n\,\mathrm{ord}_p(s_1)}|\leq 1$ $(\forall n\geqq 0)$

(ii) $\left| \sum_{i=1}^{n} c_{i,n}\, \delta_i\, q^{-i}\, p^{-i\, \mathrm{ord}_p(s_1)} / n! \right| \leq 1 \quad (\forall n \geq 1)$

ここで $\mathrm{ord}_p(\ )$ は $\mathrm{ord}_p(p)=1$ となる $\mathbb{Q}_p$ の加法的付値とした。

逆に $s_0 = 0$, $s_1 = 1$ で (i), (ii) が成り立てば F は右記函数。

<u>注意</u> $F = \mathbb{Q}$ のとき、定理5と今の命題から Kummer の合同式と呼ばれる Bernoulli 数の合同式が導かれる。

さて、定理5から $L_p(s, \chi)$ は X に関するベキ級数の商に $X = u^s - 1$ を代入して得られるが、そこに現われるベキ級数は円分体の整数論と深い関わりをもつ。それに関して、最も著しい予想を最後に述べておく。簡単のため $\chi = \theta^i$ の場合を考える。

以下 p は奇素数とし、$F_0 = F(\mu_p)$ ($\mu_n = 1$ の n 乗根のなす群)、$F_\infty = F(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_{p^n})$ とおく。$G = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ とおくと自然な表現：

$$\kappa : G \hookrightarrow \mathrm{Aut}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_{p^n}\right) \cong \mathbb{Z}_p^\times$$

が得られ、$\mathbb{Z}_p^\times = \mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$ に対応して $G = \Delta \times \Gamma$ と分解される。ここで $\Delta \cong \mathrm{Gal}(F_0/F)$, $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/F_0)$.
Γ は $1 + p\mathbb{Z}_p$ の指数有限の部分群と同型だから $\mathbb{Z}_p$ の加法群と同型である。特に $\exists \gamma \in \Gamma$ があって Γ は γ で topological に生成される。以下このような γ を一つきめておく。

F_n を Γ^{p^n} に対する F_∞/F_0 の中間体とし、A_n を F_n の ideal 類群の p-primary component とする $(n=0,1,\cdots)$。A_n は自然に $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(F_n/F)]$-module となり、従って

$$\mathfrak{X} \overset{\mathrm{dfn}}{=} \varprojlim A_n \quad (\text{norm に関する proj. lim.})$$

は $\varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(F_n/F)]$ (制限に関する proj. lim.) $-$module となる。これらについて次の事実①〜③が知られている。

① 対応 $\gamma \longleftrightarrow 1+X$ により $\varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(F_n/F)]$ $\cong \mathbb{Z}_p[\Delta][[X]]$

② $\mathfrak{X}$ は有限生成の torsion $\mathbb{Z}_p[\Delta][[X]]$-module。

次に $i \in \mathbb{Z}$ s.t. $1 \leq i \leq |\Delta|$ に対して

$$\mathfrak{X}^{(i)} \overset{\mathrm{dfn}}{=} \{x \in \mathfrak{X} \mid \delta x = \kappa(\delta)^i x \quad \text{for } {}^\forall \delta \in \Delta\}$$

とおく。①から $\mathfrak{X}^{(i)}$ は $\mathbb{Z}_p[[X]] = \Lambda_{\mathbb{Z}_p} = \Lambda$-module となる。

③ Λ-module の完全系列：

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow \mathfrak{X}^{(i)} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{n(i)} \Lambda/(f_{ij}) \longrightarrow F_2 \longrightarrow 0$$

があって F_1、F_2 は有限。$f_i(X) = \prod_{j=1}^{n(i)} f_{ij}(X)$ とおくと、これは $\Lambda^\times$-multiple を除いて $\mathfrak{X}^{(i)}$ のみで定まる。

予想 ([2] の "Main Conjecture")。$u = \kappa(\gamma)$ とし、$f_i(X)$ を適当にとると

(i) $f_i(u^s-1) = L_p(s, \theta^{1-i}) \quad$ for i : odd, $\neq 1$

(ii) $f_1(u^s-1) = (u^s-u)\,L_p(s, \theta^0)$

但し θ^0 は単位指標。

これは有限体上の一変数代数函数体の zeta 函数（の主要部）が、Tate module の上での Frobenius の特性多項式として得られることの類似とも見做せる。この予想については次のことが証明されている。

定理6　(Coates－Lichtenbaum [3])　$F/\mathbb{Q}$ が Abel で、更に次の三条件が成り立てば予想も成り立つ。

(i)　$\displaystyle\bigoplus_{\substack{i=1\\ i:odd}}^{|\Delta|} A_0^{(i)}$ が $\mathbb{Z}_p[Gal(F_0/\mathbb{Q})]$ － module として cyclic (i.e. ひとつの元で生成される)。

(ii)　F_0 の最大実部分体の素点で p をわるものは F_0 で分解しない。

(iii)　p は $[F:\mathbb{Q}]$ をわらない。

注意　$F=\mathbb{Q}$ のときこれは岩沢 [6], [7] による結果で、[3] の証明はそれを少し一般化したもの。$F=\mathbb{Q}$ のときは上の条件 (i) は常に成り立つものと予想されている（岩沢－Leopoldt 予想）。

尚、以上では専ら総実体の場合を考えた。そうでない場合は類指標に関する L 函数の負の整数での値が全て 0 になるからである。Serre [12] は虚二次体、或は一般の CM 体の場合には (A_0) 型量指標の L 函数の p－adic な類似物を考えることを提案している。実際その後この方面の研究も色々なされ

ているのだが、ここでは省略する。

文献

[1] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques, Inv. Math. 51 (1979) 29-60

[2] J. Coates, P-adic L-functions and Iwasawa's theory, Durham conference on alg. num. theory and class field theory, (1976) 269-353

[3] J. Coates, S. Lichtenbaum, On l-adic zeta functions, Ann. of Math. 98 (1973) 498-550

[4] J. Coates, W. Sinnot, On p-adic L-functions over real quadratic fields, Inv. Math. 25 (1974) 253-279

[5] P. Deligne, K. Ribet, Values of abelian L-functions at negative integers (in preparation).

[6] K. Iwasawa, On some modules in the theory of cyclotomic fields, J. Math. Soc. Japan 16, No. 1 (1964) 42-82

[7] K. Iwasawa, On p-adic L-functions, Ann. of Math. 89 (1969) 198-205

[8] K. Iwasawa, Lectures on p-adic L-functions,

〃

Ann. Math. Studies, 74, Princeton (1972)

[9] T. Kubota, H. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte, J. reine angew. Math. 214/215 (1964) 328-339

[10] H. Leopoldt, Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern, J. reine angew. Math. 209 (1962) 54-71

[11] H. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte II, J. reine angew Math. 274/275 (1975) 224-239

[12] J.-P. Serre, Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques. in Springer Lecture Notes 350 (1973) 191-268

[13] J.-P. Serre, Sur le résidu de la fonction zêta p-adique d'un corps de nombres, Comptes Rendus Acad. Sci. 287 Sér. A 183-188

[14] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA 23, No. 2 (1976) 393-417

[15] C.L. Siegel, Über die Fourieschen koeffizienten von Modulformen, Gött. Nach. 3, 1970, 15-56