数理解析研究所講究録
第 361 巻 1979 年 155-163

Yang-Mills 方程式と Line Geometry

京大 数理研 村瀬元彦

0°. $\mathbb{P}^1$ を含む多様体.

次のような3次元複素多様体を考える.

V : 3次元複素多様体

$\exists L \subset V$: 1次元複素部分多様体

s.th. $\begin{cases} ① & L \cong \mathbb{P}^1 \\ ② & L \text{ の } V \text{ での法束は } N_V(L) \cong \mathcal{O}_L(1) \oplus \mathcal{O}_L(1). \end{cases}$

但し $\mathcal{O}_L(1)$ は $L \cong \mathbb{P}^1$ 上の Hopf 束.

V の Douady space で, L に対応する点を含む連結成分を $\bar{X}$ とする. $\bar{X}$ の次元は小平の定理を用いて求められる;

$$H^1(L, N_V(L)) \cong H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \cong 0,$$

$$H^0(L, N_V(L)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \cong \mathbb{C}^4$$

であるから, $\dim_{\mathbb{C}} \bar{X} = 4$. (つまり, L は V の中で $H^0(L, N_V(L))$ でパラメトライズされる分だけ動きまわれる.)

$\bar{X} \times V$ の subset Γ を

$\Gamma = \{ (l, \zeta) \in \bar{X} \times V \mid l$ を V の subspace と見たとき $\zeta \in l \}$
と定め．Γ から $\bar{X}$，V への natural proj. を α，β と書く．
V から $\bar{X}$ への対応 $\alpha \circ \beta^{-1}$ を τ で表わす．

$$\begin{tikzcd} & \Gamma^5 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ \bar{X}^4 & & V^3 \arrow[ll, rightsquigarrow, "\tau"] \end{tikzcd}$$

$\bar{X} \ni x$ に対し $\tau^{-1}(x)$ は，x に対応する V の subspace である．
$X = \{ x \in \bar{X} \mid \tau^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^1 \}$ とおく．X は V の lines をパラメトライズする空間である．

1°. General Line 上では自明な vector 束

E を V 上の自明でない vector 束で，次の条件

(1) $c_1(E) = 0$ （E の第一 Chern 類が消える．）

(2) $E|_L$ は $L = \mathbb{P}^1$ 上の自明束

を満たすものとする．

$$J(E) \underset{def}{=} \{ x \in X \mid E|_{\tau^{-1}(x)} \not\cong \text{自明束} \}.$$

$J(E)$ の元を E の jumping line と呼ぶ．rank$(E) = 2$ or 3 のとき $J(E)$ は X の divisor になる．（$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ の変形理論を用いて示される．）以下 rank は 2 or 3 としよう．

問題　(i)　E は $J(E)$ によってどのくらい特徴づけられるか？

例えば $J(E)$ の degree と E の Chern 類との関係は?

(ii) $J(E)$ に singularity を持つ X 上の "函数" を作りそれによって E を表示出来ないか?

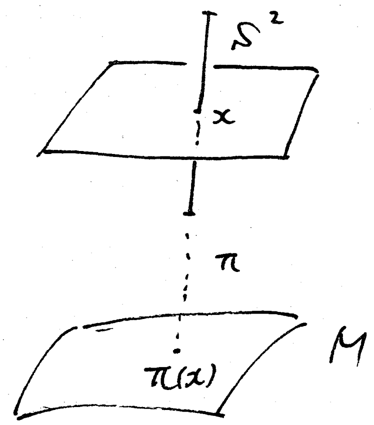
2°. Yang-Mills 方程式とのつながり.

M を oriented Riemannian manif, g をその metric とする. g はあとで述べる self-duality condition を満たすものとする.

$\Lambda^2 = \Lambda^2(T^*M)$: M 上の 2-forms の bundle. g と M の orientation とによって Hodge $*$-operator が定義される. M は 4次元ゆえ $*^2 = 1$. $*$ の固有値 ± 1 に属する固有空間への分解を $\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ とする. Λ^+, Λ^- は rank 3 である. また, $\Lambda^2, \Lambda^+, \Lambda^-$ は TM の Riemannian Connection から定まる canonical な connection を有する.

Λ^- の sphere bundle $S(\Lambda^-)$ を V と書く. $\pi : V \to M$ を projection とする. V は M 上の S^2-bundle で, g によって定まる almost complex str. φ を持つ. ここで, φ は各 $x \in V$ に対して T_xV の complex str. φ_x をあたえることによって得られる;

V の connection によって $T_xV = \mathrm{Vertical}_x \oplus \mathrm{Horizontal}_x$ なる直和分解がある。このとき $\mathrm{Vertical}_x \cong T_x S^2$, $\mathrm{Horizontal}_x \cong T_{\pi(x)} M$. $\pi^{-1}(\pi(x)) \cong S^2$ は oriented であり、また g によって metric が与えられているから canonical complex str. を入れて $\mathbb{P}^1$ と見なせる。次に



$x \in \pi^{-1}(\pi(x))$ が $T_{\pi(x)}M$ に complex str. を定めることをみよう。$T_{\pi(x)}M$ の orthonormal base e_1, e_2, e_3, e_4 をうまくとって、x が、

$$x = \lambda(e_1^* \wedge e_2^* - e_3^* \wedge e_4^*)$$

と表わされるように出来る。(但し λ は適当な constant, e_j^* は e_j の $T^*_{\pi(x)}M$ での dual base.) このとき x は

$$x : \begin{cases} e_1 \longmapsto e_2 \\ e_2 \longmapsto -e_1 \\ e_3 \longmapsto -e_4 \\ e_4 \longmapsto e_3 \end{cases}$$

なる complex str. を定めている。

したがって $\varphi_x : T_xV \xrightarrow{\sim} T_x\mathbb{P}^1 \oplus T_{\pi(x)}M$ とおくと、φ_x は T_xV に complex str. を定めている。この φ_x が integrable になる為の条件を g に課す。それを

self-duality condition と呼ぶ.

このようにして得られた V は p° で考えた条件を満たしている. 例えば L としては, π の fibre をとればよい. また, M 上の Yang-Mills 方程式の「解」として, V 上の vector bundle E が得られるが, それは p° で考えた条件を満足している.

$$\begin{array}{ccl} SU(n) \longrightarrow P & : & M \text{ 上の principal } SU(n)\text{-bundle.} \\ \downarrow & & (n = 2 \text{ or } 3) \\ M & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccl} su(n) \longrightarrow \mathfrak{g}_P & : & SU(n) \text{ の adjoint 表現に associate し} \\ \downarrow & & \text{た } su(n)\text{-bundle.} \\ M & & \end{array}$$

P 上で定義される connection form ω, curvature form Ω は, それぞれ

$$\omega \in \Lambda^1(M, \mathfrak{g}_P)$$

$$\Omega \in \Lambda^2(M, \mathfrak{g}_P)$$

と思うことが出来る. $\Lambda^2(M, \mathfrak{g}_P)$ には $*$-operator が自己同型として作用するから, $*\Omega \in \Lambda^2(M, \mathfrak{g}_P)$. 方程式

$$(*) \quad *\Omega = -\Omega \ , \quad \Omega = d\omega + \tfrac{1}{2}[\omega, \omega]$$

を anti-self-dual Yang-Mills 方程式という. これは, ω の norm

$$\|\omega\|^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_M \mathrm{trace}(\Omega \wedge *\Omega)$$

の最小値を与える ω を与える方程式である.

π^*P の fibre を $SL(n, \mathbb{C})$ に拡大したものを $\pi^*P^{\mathbb{C}}$ とかく. (※) の解 ω は, $\pi^*\omega$ を通して $\pi^*P^{\mathbb{C}}$ に complex str. を与えることが知られている. ($\pi^*P^{\mathbb{C}}$ の connection $\pi^*\omega$ によって $\pi^*P^{\mathbb{C}}$ の各 tangent space に complex str. を定義し, それが integrable であることを言う.) この complex analytic principal bundle に associate する rank n の vector bundle を $E(\omega)$ と書く. $E(\omega)$ は $c_1(E(\omega)) = 0$ であり, π の各 fibre にそって自明である.

$$\begin{tikzcd}
& \Gamma \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
X \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & V \arrow[dl, "\pi"] \\
& M \arrow[ul, "\iota"] &
\end{tikzcd}$$

$M \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$ なるうめこみを, $\forall x \in M$ に対して
$$\beta\alpha^{-1}\iota(x) = \pi^{-1}(x)$$
となるように定義出来る. その意味で, 上の map たちを「可換」と呼ぶ.

3°. 諸例.

M と g とを与えて例を作る.

	M	g	V	$\bar{X}$	Γ
1.	$\mathbb{R}^4$	flat	$V_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$	$\mathbb{C}^4$	$\mathbb{C}^4\times\mathbb{P}^1$
2.	S^4	canonical	$\mathbb{P}^3$	$Gr(1,3)$	$Fl(0,1,3)$
3.	T^4	flat	$V_3 = V_1/\mathbb{Z}^4$	$(\mathbb{C}^*)^4$	$(\mathbb{C}^*)^4\times\mathbb{P}^1$
4.	$\mathbb{CP}^2$	canonical Kähler	$Fl(0,1,2)$	$\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^{2*}$	Γ_4

V_1 は，$\mathbb{P}^1$上の bundle $\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}(1)$ の total space のことである．例1〜4のいずれの場合も π の表示，定義はやっかいである．X は，1〜3 では $\bar{X}$ に等しく，4では

$$X = \mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^{2*} - Fl(0,1,2) \quad (3次元の\ \text{flag variety})$$

である．$Gr(1,3)$ は $\mathbb{P}^3$ の line をパラメトライズする Grassmann manifold.

V_3 は次のようにして作る．$s_1, s_2 \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))$ を，共通0点なしの一次独立 sections とする．$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$，

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad e_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},\quad i=\sqrt{-1}$$

として，$G = \mathbb{Z}\cdot s + \mathbb{Z}\cdot e_1 s + \mathbb{Z}\cdot e_2 s + \mathbb{Z}\cdot e_3 s$ と定む．$G \cong \mathbb{Z}^4$ であり，G は V_1 に加法によって作用しているから $V_1/G = V_3$ をつくることが出来る．V_1 は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{C}^2$-bundle であるが，V_3 は $\mathbb{P}^1$上の $T^2_{\mathbb{C}}$（2次元 Torus）の family になっている．$\mathbb{P}^1 \ni t$ に対し，その上の fibre は周期 $s(t), e_1 s(t), e_2 s(t), e_3 s(t)$ を持つ．

V_3 の Douady space $\bar{X}$ が $(\mathbb{C}^*)^4$ になるから，藤木の定理によって V_3 は Kähler でないことが判る．

V 上の vector bundle $E(\omega)$ の jumping lines を $J(\omega)$ で表わす．$J(\omega)$ は X の divisor．このとき，

「例 2, 4 に対しては $\text{degree}\, J(\omega) = c_2(E(\omega))$」

が成立する．

$$\widehat{E_\omega} = \alpha_* \beta^* E(\omega)\Big|_{X-J(\omega)} \quad \text{は} \quad X-J(\omega) \text{ 上の}$$

vector bundle of rank n であり，ω, Ω はそれぞれ type $(1,0)$, $(2,0)$ の *meromorphic* form として $X-J(\omega)$ に（つまり $\widehat{E_\omega}$ に）拡張出来る．このとき，

例 1, 2, 3 に対しては，

$$\text{(i)}\ *\Omega = -\Omega \iff \text{(ii)}\ \widehat{\Omega}\Big|_{\tau(\zeta)} \equiv 0 \quad \text{for } \forall \zeta \in V$$

が成立する．但し $\widehat{\Omega}$ は Ω の解析接続，$\tau(\zeta)$ は，ζ を通る line 全体を X の中で集めたもので，2 次元である．$\widehat{\Omega}\big|_{\tau(\zeta)}$ は，form としての制限．

例 4. では (ii) $\widehat{\Omega}\big|_{\tau(\zeta)} \equiv 0$ for $\forall \zeta \in V$ の方が $*\Omega = -\Omega$ より強い．以下では Yang-Mills 方程式のかわりに (ii) の条件を満たす ω, Ω を考える．

<u>命題</u>．ω は $X-J(\omega)$ 上 holomorphic であり，その singularity が $J(\omega)$ に一致する．例 1, 2, 4 では bundle automorphism で動かすことによって ω を rational にと

れる。

例2に関しては、ωの具体的形が判っているので色々なことがしらべられる。しかし例3,4に対しては解は一つも知られていないため、あまりよく判らない。

例3は、Yang-Mills方程式のperiodic instanton solutionに対応しているが、それはnon-Kählerなmanifold上のvector bundleであるから、かなり複雑な函数になるのかも知れない。最も興味深いのは $M =$ K3-surfaceのときである。これは重力場が外場としてある場合のYang-Mills方程式の研究にあたるが、V, Xがどんなものになるか、すらよく判らない。

CompactなMから出てくるVは、compact 3-foldで $\kappa(V) = -\infty$ なるものである。例2の場合にinstanton解が作られたのは $V = \mathbb{P}^3$ だったからで、これは例外的に易しかった訳である。他のVになると、その上のvector bundleの研究はほとんど進んでいないように思われる。

1979年8月17日.

文献

Atiyah - Hitchin - Singer : Self-duality in four-dim. Riemannian geometry. Proc. Roy. Soc. Lond. A. 362, 425-461 (1978).