数理解析研究所講究録
第 362 巻 1979 年 1-24

Heyting valued set theory

イリノイ大　竹内外史
ワシントン大　千谷慧子

1. Complete Heyting algebra

定義　complete lattice Ω において、distributive law

$$(\bigvee_{i\in I} a_i) \wedge b = \bigvee_{i\in I}(a_i \wedge b)$$

が成立っている時 Ω を complete Heyting algebra（略して cHa）という。

例1. X が Topological space の時 X の open set 全体の集合 $\mathcal{O}(X)$ は $\subseteq$, $\cap$, $\cup$ に関して cHa になっている。

例2. complete Boolean algebra は cHa である。

cHa Ω の上の演算 $\rightarrow$, $\neg$ 及び Ω の元 $\mathbb{0}$, $\mathbb{1}$ を

$$(a \rightarrow b) = \bigvee\{c \in \Omega \mid a \wedge c \leq b\},$$

$$(\neg a) = (a \rightarrow \mathbb{0}),\quad \mathbb{0} = \bigwedge\Omega,\quad \mathbb{1} = \bigvee\Omega$$

と定義する。例1では $(a \rightarrow b) = ((X-a)\cup b)^{\circ}$, $(\neg a) = (X-a)^{\circ}$ であり、例2では Boolean algebra としての $\rightarrow$, $\neg$ が Ω における $\rightarrow$, $\neg$ と同じになっている。

2. Heyting valued universe $V^{(\Omega)}$

complete Boolean algebra B から超限帰納法によって B-valued universe $V^{(B)}$ を作ったと同じ様に CHa Ω から Ω-valued universe $V^{(\Omega)}$ を構成する。

$V_0^{(\Omega)} = \phi$,

$V_{\alpha+1}^{(\Omega)} = \{u \mid u : \mathcal{D}(u) \to \Omega, \mathcal{D}(u) \subseteq V_\alpha^{(\Omega)}\}$,

α が極限数の時は $V_\alpha^{(\Omega)} = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{(\Omega)}$,

$V^{(\Omega)} = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha^{(\Omega)}$,

ここで $u : \mathcal{D}(u) \to \Omega$ は u が $\mathcal{D}(u)$ から Ω への function であることを意味する。

$u, v \in V^{(\Omega)}$ に対して

$[\![u = v]\!] = \bigwedge_{x \in \mathcal{D}(u)} (u(x) \to [\![x \in v]\!]) \wedge \bigwedge_{y \in \mathcal{D}(v)} (v(y) \to [\![y \in u]\!])$,

$[\![u \in v]\!] = \bigvee_{y \in \mathcal{D}(v)} [\![u = y]\!] \wedge v(y)$.

set theoretical formula $A, B, A(x)$ に対して

$[\![A \wedge B]\!] = [\![A]\!] \wedge [\![B]\!]$,

$[\![A \vee B]\!] = [\![A]\!] \vee [\![B]\!]$,

$[\![A \to B]\!] = [\![A]\!] \to [\![B]\!]$,

$[\![\neg A]\!] = \neg [\![A]\!]$,

$[\![\forall x A(x)]\!] = \bigwedge_{x \in V^{(\Omega)}} [\![A(x)]\!]$,

$[\![\exists x A(x)]\!] = \bigvee_{x \in V^{(\Omega)}} [\![A(x)]\!]$

とすると 任意の set theoretical formula φ に対して φ

の truth value $[\![\varphi]\!] \in \Omega$ が与えられ，$[\![\varphi]\!] = \mathbb{1}$ は，φ が真であること，$[\![\varphi]\!] = \mathbb{0}$ は，φ が偽であることを表わす。

次に，predicate E を含む set theory の Ω-valued universe $\overline{V}^{(\Omega)}$ を定義する。これは本質的には $V^{(\Omega)}$ と同じものであるが言語が豊富であり，層の理論との関係を見るのに都合のよい universe である。$\overline{V}^{(\Omega)}$ の定義及びその上での解釈は次の様に成される。

$\overline{V}^{(\Omega)}$ の元は $<|u|, Eu>$ という形で $|u|$ は $\overline{V}^{(\Omega)}_{\beta}$ $(\beta < \alpha)$ の部分集合 $\mathcal{D}(u)$ から Ω への関数であり，Eu は Ω の元である。

$\overline{V}^{(\Omega)}_0 = \phi$,

$\overline{V}^{(\Omega)}_{\alpha+1} = \{ <|u|, Eu> \mid |u| : \mathcal{D}(u) \to \Omega,\ \mathcal{D}(u) \subseteq \overline{V}^{(\Omega)}_{\alpha},$

$Eu \in \Omega,\ (\forall t \in \mathcal{D}(u))[\,|u|(t) \leq Eu \wedge Et\,] \}$,

α が limit ordinal の時 $\overline{V}^{(\Omega)}_{\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} \overline{V}^{(\Omega)}_{\beta}$,

$\overline{V}^{(\Omega)} = \bigcup_{\alpha \in On} \overline{V}^{(\Omega)}_{\alpha}$,

$[\![u = v]\!] = \bigwedge_{x \in \mathcal{D}(u)} (u(x) \to [\![x \in v]\!]) \wedge \bigwedge_{y \in \mathcal{D}(v)} (v(y) \to [\![y \in u]\!])$

$\wedge (Eu \leftrightarrow Ev)$,

$[\![u \in v]\!] = \bigvee_{y \in \mathcal{D}(v)} [\![u = y]\!] \wedge v(y)$,

$[\![\forall x A(x)]\!] = \bigwedge_{x \in \overline{V}^{(\Omega)}} (Ex \to [\![A(x)]\!])$,

$[\![\exists x A(x)]\!] = \bigvee_{x \in \overline{V}^{(\Omega)}} (Ex \wedge [\![A(x)]\!])$,

$[\![Ex]\!] = Ex$,

論理記号 $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\to$ の解釈は, $U^{(\Omega)}$ の時と同様にする。ここで, $u(x)$ は, $|u|(x)$ の略, $Eu \leftrightarrow Ev$ は, $(Eu \to Ev) \wedge (Ev \to Eu)$ の略とする。

以上で $U^{(\Omega)}$ 及び $V^{(\Omega)}$ 上での解釈が定義されたが, そのどちらの解釈でも次のことが成立つ。

1) A が直観主義的論理で証明可能な *formula* ならば $[\![A]\!] = 1$.

2) A が *equality axiom* ならば $[\![A]\!] = 1$.

3) A が直観主義的集合論の *axiom* ならば $[\![A]\!] = 1$.

この意味で $V^{(\Omega)}$ も $U^{(\Omega)}$ も直観主義的集合論の *model* になっている。

$V^{(\Omega)}$ に於ける実数

普通の集合論(真偽値が真又は偽である様な集合論)の *universe* は Ω を 0 と 1 から成る *Boolean algebra* とした時の $U^{(\Omega)}$ であるが, これを V と書くことにして, V から $V^{(\Omega)}$ への自然な埋め込み $\vee$ を次の様に定義する。$u \in V$ に対して, $\mathcal{D}(\check{u}) = \{\check{t} \mid t \in u\}$, $t \in u \Rightarrow \check{u}(\check{t}) = 1$, $E\check{u} = 1$。

この時, $u, v \in V$ に対して,

$u \in v$ iff $[\![\check{u} \in \check{v}]\!] = 1$,

$u \notin v$ iff $[\![\check{u} \in \check{v}]\!] = 0$

$u = v$ iff $[\![\check{u} = \check{v}]\!] = 1$

$u \neq v$ iff $[\![\check{u} \in \check{v}]\!] = 0$

が成立つ。このことから、自然数全体の集合ωに対して$\check{\omega}$を作ると$\check{\omega}$は$V^{(\Omega)}$の中で自然数全体の集合であり、又有理数全体の集合$\mathbb{Q}$に対する$\check{\mathbb{Q}}$は$V^{(\Omega)}$の中で有理数全体の集合であることが示される。更に$\mathbb{Q}$からDedekindの切断によって定義される実数の集合$\mathbb{R}$に対して$\check{\mathbb{R}}$を作ると、これは$V^{(\Omega)}$に於ける実数全体の集合にはならない。ここで、'aは実数である'という命題は、

$$
\begin{aligned}
&(\exists L \subseteq \check{\mathbb{Q}})(\exists U \subseteq \check{\mathbb{Q}})[a = \langle L, U \rangle \wedge \\
&\quad (\exists r, s \in \check{\mathbb{Q}})(s \in L \wedge r \in U) \wedge \\
&\quad (\forall r \in \check{\mathbb{Q}}) \neg (r \in U \wedge r \in L) \wedge \\
&\quad (\forall r \in \check{\mathbb{Q}})(r \in U \leftrightarrow (\exists s \in \check{\mathbb{Q}})(s < r \wedge s \in U)) \wedge \\
&\quad (\forall r \in \check{\mathbb{Q}})(r \in L \leftrightarrow (\exists s \in \check{\mathbb{Q}})(r < s \wedge s \in L)) \wedge \\
&\quad (\forall r, s \in \check{\mathbb{Q}})(s < r \leftrightarrow s \in L \wedge r \in U)\ ]
\end{aligned}
$$

と書かれる。

今Ωは topological space X の open set 全体から成る cHa $\mathcal{O}(X)$ で、$a \in V^{(\Omega)}$ に対して $[\![a$は実数である$]\!] = E a$ とする。この時 $x \in Ea$ に対して

$$x \in [\![a = \langle L, U \rangle \wedge \langle L, U \rangle \text{は実数}]\!]$$

となるL, Uが$V^{(\Omega)}$の中に存在し、

$$L_x = \{ r \in \mathbb{Q} \mid x \in [\![\check{r} \in L]\!] \}$$

$$U_x = \{ r \in \mathbb{Q} \mid x \in [\![\check{r} \in U]\!] \}$$

とすると $\langle L_x, U_x \rangle$ は $\mathbb{Q}$ の Dedekind の切断で，一つの実数を定める。この実数を $f(x)$ とおくと f は Ea から $\mathbb{R}$ への連続関数になっている。逆に $p \in \mathcal{O}(X)$ のとき，任意の連続関数 $f: p \to \mathbb{R}$ に対してこれが対応する様な $V^{(\Omega)}$ の実数 a（$[\![a$ は実数である $]\!] = Ea = p$ となる $a \in V^{\Omega}$）を決めることが出来る。従って，$V^{(\Omega)}$ の実数 a は連続関数 $f: Ea \to \mathbb{R}$ と同一視出来る。

<u>層表現，遺伝的層表現</u>

$V^{(\Omega)}$ の元 u に対して，$[\![u = v]\!] = \mathbb{1}$ となる様な $V^{(\Omega)}$ の元 v は無数にある。この中から都合の良いものを代表としてとることを考える。

<u>定義</u> $V^{(\Omega)}$ の元 u が <u>definite</u> であるということを

$$x \in \mathcal{D}(u) \Rightarrow u(t) = Et \neq 0$$

で定義し，$V^{(\Omega)}$ の部分集合 A の元が<u>互に両立している</u>ということを

$$a, b \in A \Rightarrow Ea \wedge Eb \leq [\![a = b]\!]$$

が成立つことと定義する。

例えば Ω が topological space X の open set 全体の作る cHa $\mathcal{O}(X)$ で，A が $V^{(\Omega)}$ の実数の集合ならば，A の元が互に両立しているというのは，各 $a, b \in A$ に対して，

関数 $a: Ea \to \mathbb{R}$ と $b: Eb \to \mathbb{R}$ が $Ea \wedge Eb$ の上で一致していることになる。

$A \subset V^{(\Omega)}$ の元が互に両立しているとき、$\bigvee A$ を

$$\mathcal{D}(\bigvee A) = \bigcup_{a\in A} \mathcal{D}(a)$$

$$E(\bigvee A) = \bigvee \{Ea \mid a \in A\}$$

$$x \in \mathcal{D}(\bigvee A) \Rightarrow (\bigvee A)(x) = \bigvee_{a\in A} [\![x \in a]\!]$$

で定義すると次のことが成立つ。

1) $a \in A \Rightarrow Ea \leqslant [\![a = \bigvee A]\!]$

2) $Eb = \bigvee \{Ea \mid a \in A\}$, $(a \in A \Rightarrow Ea \leqslant [\![a = b]\!])$

$$\Rightarrow [\![b = \bigvee A]\!] = \mathbb{1}.$$

<u>定義</u> $V^{(\Omega)}$ の元 u が次の条件を充すとき、u は<u>層表現</u>(SR)であるという。

(SR1) u は definite である。

(SR2) $x \in \mathcal{D}(u)$, $p \in \Omega$, $Ex \wedge p \neq 0$ ならば $[\![b = x{\restriction}p]\!] = \mathbb{1}$ となる $\mathcal{D}(u)$ の元 b が存在する。

(SR3) $A \subseteq \mathcal{D}(u)$, $A \neq \phi$ で A の元が互に両立しているとき、$[\![b = \bigvee A]\!] = \mathbb{1}$ となる $\mathcal{D}(u)$ の元 b が存在する。

ここで $x{\restriction}p$ は

$$\mathcal{D}(x{\restriction}p) = \{t{\restriction}p \mid t \in \mathcal{D}(x)\}$$

$$(x{\restriction}p)(t{\restriction}p) = \bigvee_{t' \in \mathcal{D}(x),\, t'{\restriction}p = t{\restriction}p} x(t') \wedge p$$

$$E(x{\restriction}p) = Ex \wedge p.$$

によって定義される$V^{(\Omega)}$の元とする。

層表現について次の定理が成立つ。

<u>定理</u> (I) $v \in V^{(\Omega)}$の時$V^{(\Omega)}$の元uで、

$$u \text{はSR} \wedge [\![u = v]\!] = 1$$

となるものが存在する。このuをvの層表現という。

(II) $u \in V^{(\Omega)}$がSRで、$[\![v \in u]\!] = Ev \neq 0$のとき

$$x \in \mathcal{D}(u) \wedge [\![x = v]\!] = 1$$

となるxが存在する。

<u>証明</u> (I) 先ずv'を

$$\mathcal{D}(v') = \{ x \restriction [\![x \in v]\!] \mid x \in \mathcal{D}(v),\ [\![x \in v]\!] \neq 0 \}$$

$$x \in \mathcal{D}(v') \Rightarrow v'(x) = [\![x \in v]\!]$$

$$Ev' = Ev$$

で定義すると、v'はdefiniteで$[\![v = v']\!] = 1$になっている。このv'のdomain $\mathcal{D}(v')$にSR2, SR3を充す様に元を付け加えて層表現uを作れば、uが求める層表現になっている。

(II) $A = \{ x \restriction [\![v = x]\!] \mid x \in \mathcal{D}(u) \}$

とおくと、Aの元は互に両立していて、而も$[\![\bigvee A = v]\!] = 1$となっている。$u$は層表現で

$$b \in \mathcal{D}(u) \wedge [\![\bigvee A = b]\!] = 1$$

となるbが存在するから

$b \in \mathcal{D}(u) \wedge [\![b = v]\!] = \mathbb{1}$

となる b が存在する。

次に遺伝的層表現を rank に関する induction で定義する。

<u>定義</u> $V^{(\Omega)}$ の元 u が次の条件を充す時 u は<u>遺伝的層表現（HSR）</u>であるという。

1) u は層表現である。

2) $\mathcal{D}(u)$ の各元が HSR である。

遺伝的層表現について次の定理が成立つ。（証明は略す。）

<u>定理</u> $V^{(\Omega)}$ の各元 u に対して $V^{(\Omega)}$ の元 v が存在して

v は HSR $\wedge [\![u = v]\!] = \mathbb{1}$。

更に u が HSR $\wedge\ p \in \Omega \Rightarrow u \restriction p \in$ HSR.

<u>3. $V^{(H)}$ の中の Ω</u>

H は cHa で $V^{(H)}$ の中で $[\![\langle \Omega, \wedge, \vee, \mathbb{1} \rangle$ は cHa $]\!] = \mathbb{1}$ が成立つているとする。ここで '$\langle \Omega, \wedge, \vee, \mathbb{1} \rangle$ は cHa' という命題は次の 1)－8) の conjunction である。

1) $(\wedge : \Omega \to \Omega) \wedge (\vee : \mathcal{P}(\Omega) \to \Omega) \wedge (\mathbb{1} \in \Omega)$

2) $(\forall a \in \Omega)[a \wedge a = a]$

3) $(\forall a, b \in \Omega)[a \wedge b = b \wedge a]$

4) $(\forall a, b, c \in \Omega)[a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c]$

5) $(\forall A \subseteq \Omega)(\forall a \in A)[\vee A \geqq a]$

6) $(\forall A \subseteq \Omega)(\forall b \in \Omega)[(\forall a \in A)(a \leq b) \to \bigvee A \leq b]$

7) $(\forall A \subseteq \Omega)(\forall b \in \Omega)[(\bigvee A) \wedge b = \bigvee_{a \in A}(a \wedge b)]$

8) $(\forall a \in \Omega)[a \leq \mathbb{1}]$

<u>Lemma 1</u>　$V^{(H)}$の元u, vに対して　$[\![f : u \to v]\!] = \mathbb{1}$

で　而もuが definite ならば

$\tilde{f} : \mathcal{D}(u) \longrightarrow \tilde{v}$　（$\tilde{v}$は　vの HSR の domain）

なる関数$\tilde{f}$で　$y, z \in \mathcal{D}(u)$に対して

1)　$[\![y \in u]\!] \leq [\![\langle y, \tilde{f}(y) \rangle \in f]\!]$,

2)　$[\![y = z]\!] \leq [\![\tilde{f}(y) = \tilde{f}(z)]\!]$,

3)　$Ey = E\tilde{f}(y)$,

4)　$[\![y \in u]\!] \leq [\![\tilde{f}(y) \in v]\!]$

となるものが存在する。

逆に　$u, v \in V^{(H)}$，uは definite で　$\tilde{f} : \mathcal{D}(u) \to \tilde{v}$

が 2) − 4) を 充している時　$f \in V^{(H)}$ が存在して

$$[\![f : u \to v]\!] = 1 ,$$

$$y \in \mathcal{D}(u) \Rightarrow [\![y \in u]\!] \leq [\![\langle y, \tilde{f}(y) \rangle \in f]\!] .$$

<u>証明</u>　前半：$x \in \mathcal{D}(u)$　に対して

$$u(x) \leq [\![\exists y \in v (\langle x, y \rangle \in f)]\!]$$

$$[\![\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f]\!] \leq [\![y = z]\!]$$

が成り立つから

$$A = \{ y \upharpoonright [\![\langle x, y \rangle \in f]\!] \mid y \in \tilde{v} \}$$

の元は互に両立している。従って

$$y \in \tilde{\mho} \wedge [\![y = \vee A]\!] = 1$$

となる様な y が存在し、これを $\tilde{f}(x)$ とおけば $\tilde{f}$ は求める関数である。

後半の証明は $\mathscr{D}(f) = \{ <x, \tilde{f}(x)> \mid x \in \mathscr{D}(u) \}$,

$x \in \mathscr{D}(u) \Rightarrow f(<x, \tilde{f}(x)>) = Ex$, $Ef = Eu$ によって f を定義すればよい。

Lemma 1 の $\tilde{f}$ を f を外から見た関数と呼ぶ。

今 $[\![<\Omega, \wedge, \vee, 1> \text{は cHa}]\!] = 1$ を仮定しているが更に Ω は HSR, $\tilde{\Omega} = \mathscr{D}(\Omega)$, $\tilde{\wedge} : \widetilde{\Omega \times \Omega} \to \tilde{\Omega}$ は $\wedge$ を外から見た関数, $\tilde{\vee} : \widetilde{P(\Omega)} \to \tilde{\Omega}$ は $\vee$ を外から見た関数とすると $t_1, t_2 \in \tilde{\Omega}$ に対して

$$[\![<t_1, t_2> \in \Omega \times \Omega]\!] \geqq [\![t_1 \in \Omega \wedge t_2 \in \Omega]\!] = Et_1 \wedge Et_2$$

従って

$$z \in \widetilde{\Omega \times \Omega} \wedge [\![z = <t_1, t_2>]\!] = 1$$

となる z が存在し、$\tilde{\wedge} z$ をあらためて $t_1 \tilde{\wedge} t_2$ とおく。

又 $A \subset \Omega$ の時 A^* を

$\mathscr{D}(A^*) = A$, $A^*(a) = Ea$, $EA^* = \bigvee_{a \in A} Ea$

で定義すると

$[\![A^* \subseteq \Omega]\!] = 1$

$\therefore [\![A^* \in P(\Omega)]\!] = EA^*$

従って $z \in \widetilde{P\Omega}$ が存在して $[\![z = A^*]\!] = \mathbb{1}$ を充す。$\tilde{V} z$ をあらためて $\tilde{V}A$ とおくと

$$\tilde{\wedge} : \tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}, \quad \tilde{V} : P(\tilde{\Omega}) \to \tilde{\Omega}$$

が定義されて次のことが成立つ。(Lemma 1 により)

1) i) $[\![a \wedge b = a \tilde{\wedge} b]\!] = Ea \wedge Eb$

ii) $[\![a = a' \wedge b = b']\!] \leq [\![a \tilde{\wedge} b = a' \tilde{\wedge} b']\!]$

iii) $E(a \tilde{\wedge} b) = Ea \wedge Eb$

2) i) $[\![VA^* = \tilde{V}A]\!] = EA^* = V_{a \in A} Ea$

ii) $E(\tilde{V}A) = V_{a \in A} Ea$

ここで $a \wedge b = a \tilde{\wedge} b$ は $\langle\langle a, b \rangle, a \tilde{\wedge} b \rangle \in \Lambda$ の略であり. $VA^* = \tilde{V}A$ は $\langle A^*, \tilde{V}A \rangle \in V$ の略である。

このことから次の定理が容易に証明される。

__定理__ $V^{(H)}$ で $[\![\langle \Omega, \wedge, V, \mathbb{1} \rangle$ が $cHa]\!] = \mathbb{1}$ ならば $\langle \Omega, \wedge, V, \mathbb{1} \rangle$ を外から見た $\langle \tilde{\Omega}, \tilde{\wedge}, \tilde{V}, \mathbb{1} \rangle$ も cHa である。

この定理の逆も成立つ。

__定理__ H, C は cHa で $i : H \to C$ は 1対1 の cHa-morphism で更に $\tilde{0} \in C$ で次の条件を充す $\tilde{0}$ が存在するとする。

a) $(\forall p, q \in H)[\tilde{0} \wedge i(p) \leq i(q) \Rightarrow p \leq q]$

b) $(\forall u \in C)[(\tilde{0} \to u) \in i(H)]$

このとき $\Omega, \wedge, \vee, \mathbb{1} \in V^{(H)}$ で次の条件を充すものが存在する。

$[\![\langle \Omega, \wedge, \vee, \mathbb{1} \rangle$ は cHa $]\!] = \mathbb{1}$ で $C \cong \tilde{\Omega}$。

(証明略)

$\tilde{\Omega}$の例1. H が topological space X の open set 全体の作る cHa $\mathcal{O}(X)$ で

$[\![\Omega$ は $\mathbb{R}^{(H)}$ の open set 全体の作る cHa である $]\!] = \mathbb{1}$

とする。ここで $\mathbb{R}^{(H)}$ は $V^{(H)}$ に於ける実数全体の集合とする。この時 $u \in \tilde{\Omega}$ に対して $\{\langle x, f(x) \rangle \in X \times \mathbb{R} \mid x \in [\![f \in u]\!]\}$ を対応させる対応により

$$\tilde{\Omega} \cong \mathcal{O}(X \times \mathbb{R})$$

$\tilde{\Omega}$の例2 H, D は cHa, $\Omega \in V^{(H)}$ で

$[\![\Omega$ は $\check{D}$ によって generate される cHa $]\!] = \mathbb{1}$

とすると $\tilde{\Omega}$ は D と H から次の様に定義される cHa $H \otimes D$ に isomorphic な cHa である。

$H \times D = \{\langle p, a \rangle \mid p \in H, a \in D\}$ の上で $\leq, \wedge$ 及び被覆という概念を次の様に定義する。

$\langle p, a \rangle, \langle q, b \rangle \in H \times D$ の時

$$\langle p, a \rangle \leq \langle q, b \rangle \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} p = 0 \vee (p \leq q \wedge a \leq b)$$

$$\langle 0, a \rangle \wedge \langle q, b \rangle = \langle p, a \rangle \wedge \langle 0, b \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle 0, 0 \rangle$$

$$p, q \neq 0 \Rightarrow \langle p, a \rangle \wedge \langle q, b \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle p \wedge q, a \wedge b \rangle$$

$\{\langle p_j, a_j\rangle\}_{j\in J} \subset H\times D$ が $\langle p, a\rangle \in H\times D$ <u>の被覆である</u>（略して $\{\langle p_j, a_j\rangle\}_{j\in J}$ cov. $\langle p, a\rangle$ とかく）$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

(c1) $\bigvee_j p_j = p$

(c2) $\forall q\in H\,(\,0 < q \leq p \Rightarrow \bigvee_{\{j\in J \mid q\wedge p_j \neq 0\}} a_j = a\,)$

この定義により $\langle H\times D, \leq, \wedge, \mathrm{cov.}\rangle$ は Grothendieck topology になっている。

次に I が $H\times D$ の ideal であるということを

(I 1) $U_1, U_2 \in H\times D$, $U_1 \leq U_2 \in I \Rightarrow U_1 \in I$

(I 2) $\{U_j\}_{j\in J}$ cov. U の時

$$U \in I \ \text{ iff } \ \forall j\in J\,(U_j \in I)$$

が成立つこととする。$H\times D$ の ideal 全体の集合 $H\otimes D$ の上で演算 $\bigwedge_k, \bigvee_k$ を

$$\bigwedge_k I_k = \bigcap_k I_k$$

$$\bigvee_k I_k = \{U \subset H\times D \mid \exists \{U_j\}_{j\in J} \text{ cov. } U\,[\forall j\in J\, \exists k\in K\,(U_j \in I_k)]\}$$

で定義すると $\langle H\otimes D, \wedge, \vee, H\times D\rangle$ は cHa になり.

$u \in \widetilde{\Omega}$ に

$$\varphi(u) = \bigvee \{ I_{\langle p,a\rangle} \mid p \leq [\![\check{a} \leq u]\!] \},$$

$$(\text{ここに } I_{\langle p,a\rangle} = \{\langle q, b\rangle \mid \langle q,b\rangle \leq \langle p,a\rangle\}.)$$

を対応させる対応により. $H\otimes D$ は $\widetilde{\Omega}$ に isomorphic である。

4. $V^{(H)}$の中のcHa-morphism

$V^{(H)}$の中の二つのcHa Ω, Ω' の間のcHa-morphism (cHa-isomorphism) は外から見ると $\tilde{\Omega}$ と $\tilde{\Omega}'$ の間のcHa-morphism (cHa-isomorphism) になっていることを証明する。

定理　$\Omega, \wedge, \vee, 1, \Omega', \wedge, \vee, 1' \in V^{(H)}$, Ω, Ω' は遺伝的層表現, $\tilde{\Omega} = \mathcal{D}(\Omega)$, $\tilde{\Omega}' = \mathcal{D}(\Omega')$,

$[\![\langle \Omega, \wedge, \vee, 1 \rangle$ は cHa $\wedge$ $\langle \Omega', \wedge', \vee', 1' \rangle$ cHa $]\!] = 1$

とする時

$[\![h : \Omega \to \Omega'$ cHa-morphism (cHa-isom.) $]\!] = 1$

ならば $\tilde{h} : \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}'$ cHa-morphism (cHa-isom) で次の条件を充すものが存在する。

(1) $\tilde{h} \circ i = i'$,　ここで $i(p) = 1 \restriction p$, $i'(p) = 1' \restriction p$

(2) $Ea = E\tilde{h}(a)$

逆に $\tilde{h} : \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}'$ が cHa-morphism (cHa-isom) で (1), (2) を充すならば $V^{(H)}$ の元 h で

$[\![h : \Omega \to \Omega'$ cHa-morphism (cHa-isom.) $]\!] = 1$

$a \in \tilde{\Omega} \Rightarrow Ea = [\![\langle a, \tilde{h}(a) \rangle \in h]\!]$

となる h が存在する。

証明　$[\![h : \Omega \to \Omega']\!] = 1$ より Lemma 1 を使って関数 $\tilde{h} : \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}'$ で次の条件を充すものが存在する。

$y, z \in \mathcal{D}(u)$ に対して

1) $[\![y \in u]\!] \leqslant [\![\langle y, \tilde{h}(y) \rangle \in h]\!]$

2) $[\![y = z]\!] \leqslant [\![\tilde{h}(y) = \tilde{h}(z)]\!]$

3) $Ey = E\tilde{h}(y)$

4) $[\![y \in \Omega]\!] \leqslant [\![\tilde{h}(y) \in \Omega']\!]$

この $\tilde{h}$ が cHa-morphism (cHa-isom.) になることは. 仮定から容易に証明出来る。更に $\tilde{h} \circ i = i'$ となることは

$(\tilde{h} \circ i)(a) = \tilde{h}(1 \restriction a)$

$E(1 \restriction a) = a \leqslant [\![\langle 1 \restriction a, \tilde{h}(1 \restriction a) \rangle \in h]\!]$

$[\![\langle 1, 1' \rangle \in h]\!] = 1$

$\therefore\ a \leqslant [\![\langle 1 \restriction a, 1' \restriction a \rangle \in h]\!] = 1$

$\therefore\ a \leqslant [\![1' \restriction a = \tilde{h}(1 \restriction a)]\!]$

$\therefore\ [\![\tilde{h}(1 \restriction a) = 1' \restriction a]\!] = 1$

$\therefore\ \tilde{h} \circ i = i'$ で証明された。

逆に $\tilde{h} : \tilde{\Omega} \to \tilde{\Omega}'$ が cHa-morphism で (1), (2) を充すならば

$a, b \in \tilde{\Omega} \Rightarrow [\![a = b]\!] \leqslant [\![\tilde{h}(a) = \tilde{h}(b)]\!]$。

証明. $[\![a = b]\!] = p$ とおけば

$[\![i(p) \tilde{\wedge} a = i(p) \tilde{\wedge} b]\!] = [\![a \restriction p = b \restriction p]\!] = 1$

$\therefore\ i(p) \tilde{\wedge} a = i(p) \tilde{\wedge} b$

$\therefore\ \tilde{h}(i(p)) \tilde{\wedge}' \tilde{h}(a) = \tilde{h}(i(p) \tilde{\wedge} a) = \tilde{h}(i(p) \tilde{\wedge} b)$

$$= \tilde{h}(i(p)) \tilde{\wedge} \tilde{h}(a)$$

$\therefore \quad i'(p) \tilde{\wedge} \tilde{h}(a) = i'(p) \tilde{\wedge} \tilde{h}(b)$

$\therefore \quad p \leq [\![\tilde{h}(a) = \tilde{h}(b)]\!]$.

これと Lemma 1 を使って $V^{(h)}$ の元 h で

$$[\![h : \Omega \to \Omega']\!] = 1$$

$$x \in \tilde{\Omega} \Rightarrow Ex \leq [\![\langle x, \tilde{h}(x) \rangle \in h]\!]$$

を充すhが存在し．このhに対して

$$[\![h : \Omega \to \Omega' \text{ cHa-morphism (cHa-isom)}]\!] = 1$$

となることは容易に証明出来る。

5. $V^{(H)}$の中の$V^{(\Omega)}$

普通の集合論のuniverse V の中で cHa $H \in V$ に対して H-valued universe $V^{(H)}$ を構成したと同じ様に 今度は $V^{(H)}$ の中で

$$[\![\langle \Omega, \wedge, \vee, 1 \rangle \text{ cHa}]\!] = 1$$

なる $\Omega \in V^{(H)}$ に対して $V^{(\Omega)}$ を構成することを考える。$V^{(H)}$ の中では直観主義的論理しか成立しないが 順序数は V における順序数と同様に定義され 超限帰納法が使える。従って V に於ける $V^{(H)}$ と同様 順序数に関する超限帰納法で $V^{(H)}$ の中の $V^{(\Omega)}$ を構成する。

$V^{(\Omega)}$ の定義から次のことが成立つ。

$[\![\bar{u} \in V^{(\Omega)}]\!] = [\![\exists |\bar{u}|, E_\Omega \bar{u}, Z, \beta\, [\, \bar{u} = \langle |\bar{u}|, E_\Omega \bar{u} \rangle \wedge$
$|\bar{u}| : Z \to \Omega \wedge Z \subseteq V_\beta^{(\Omega)} \wedge \beta \in On \wedge E\bar{u} \in \Omega$
$\wedge (\forall t \in Z)(|\bar{u}|(t) \leq E_\Omega \bar{u} \wedge E_\Omega t\,)]\!]$,

$[\![V^{(\Omega)} = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha^{(\Omega)}]\!] = 1$。

$\{ \bar{u} \in V^{(H)} \mid [\![\bar{u} \in V^{(\Omega)}]\!] \geqslant E\bar{u} \}$ を $(V^{(H)})^{(\Omega)}$ とかくと 上の事実から $(V^{(H)})^{(\Omega)}$ の各元 $\bar{u}$ に対して $|\bar{u}|$, $E_\Omega \bar{u}$, Z が存在して 次の式が成立つ.

$[\![\bar{u} = \langle |\bar{u}|, E_\Omega \bar{u} \rangle \wedge E_\Omega \bar{u} \in \Omega \wedge |\bar{u}| : Z \to \Omega \wedge Z \subseteq V_\beta^{(\Omega)} \wedge$
$(\forall t \in Z)[\, |\bar{u}|(t) \leq E_\Omega \bar{u} \wedge E_\Omega t\,]]\!] = E\bar{u}$

一方 $[\![\langle \Omega, \wedge, \vee, 1 \rangle$ は cHa $]\!] = 1$ だから $\langle \tilde{\Omega}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, 1 \rangle$ は cHa で この $\tilde{\Omega}$ に対して $V^{(\tilde{\Omega})}$ を作ると 丁度 $(V^{(H)})^{(\Omega)}$ に isomorphic になっていることを証明する。

<u>$\Phi : V^{(\tilde{\Omega})} \longrightarrow (V^{(H)})^{(\Omega)}$ の定義</u>

$u \in V^{(\tilde{\Omega})}$ を遺伝的層表現として $\mathcal{D}(u)$ の各元 x に対して $\bar{x} \in (V^{(H)})^{(\Omega)}$ が既に定義され

$E_\Omega \bar{x} = E_{\tilde{\Omega}} x$,

$E(E_{\tilde{\Omega}} x) = E\bar{x}$, ここで E は E_H の略,

$i [\![\bar{x} = \bar{x}']\!] \leq [\![x = x']\!]_{\tilde{\Omega}} = [\![\bar{x} = \bar{x}']\!]_\Omega$, ここで

i は $i(p) = 1 \restriction p$ で定義される関数 $H \to \tilde{\Omega}$,

が充されているとする。今 u に対応する $\bar{u}$ を定義するために 先づ $\bar{u}$ の domain Z を定義する。

$$\mathcal{D}(z) = \{ \bar{x} \mid x \in \mathcal{D}(u) \}$$

$$x \in \mathcal{D}(z) \Rightarrow z(\bar{x}) = E\bar{x}$$

$$Ez = EE_{\hat{\Omega}} u$$

とすると z は $V^{(H)}$ の元で definite である。次に

$u^* : \mathcal{D}(z) \longrightarrow \hat{\Omega}$ を $u^*(\bar{x}) = E_{\hat{\Omega}} x$ で定義すると

$$\bar{x}, \bar{x}' \in \mathcal{D}(z) \Rightarrow [\![\bar{x} = \bar{x}']\!] \leqslant [\![u^*(\bar{x}) = u^*(\bar{x}')]\!]$$

が成立つことは次の様に証明される。一般に $p \in H$, $a, b \in \hat{\Omega}$ の時

$$p \leqslant [\![a = b]\!] \Leftrightarrow [\![a \restriction p = b \restriction p]\!] = 1 \Leftrightarrow a \hat{\wedge} i(p) = b \hat{\wedge} i(p)$$

が成立つから.

$$u^*(\bar{x}) \wedge i [\![\bar{x} = \bar{x}']\!] \leqslant E_{\hat{\Omega}} x \wedge [\![x = x']\!]_{\hat{\Omega}} \leqslant E_{\hat{\Omega}} x' = u^*(\bar{x}')$$

$$\therefore u^*(\bar{x}) \wedge i [\![\bar{x} = \bar{x}']\!] \leqslant u^*(\bar{x}') \wedge i [\![\bar{x} = \bar{x}']\!]$$

$$\therefore u^*(\bar{x}) \wedge i [\![\bar{x} = \bar{x}']\!] = u^*(\bar{x}') \wedge i [\![\bar{x} = \bar{x}']\!]$$

$$\therefore [\![\bar{x} = \bar{x}']\!] \leqslant [\![u^*(\bar{x}) = u^*(\bar{x}')]\!]$$

上の事実と z, u^* の定義から Lemma 1 を使って 次の条件を充す $V^{(H)}$ の元 $|\bar{u}|$ が存在する。

$$[\![|\bar{u}| : z \rightarrow \Omega]\!] = 1 \wedge [\![x \in z]\!] \leqslant [\![\langle x, u^*(x) \rangle \in |\bar{u}|]\!] \wedge$$

$$E|\bar{u}| = Ez$$

更に $E_\Omega \bar{u} = E_{\hat{\Omega}} u$ と定義すれば

$$\bar{x} \in \mathcal{D}(z) \Rightarrow u^*(\bar{x}) = E_{\hat{\Omega}} x \leqslant E_{\hat{\Omega}} u = E_\Omega \bar{u}$$

$$\therefore [\![\bar{x} \in z]\!] \leqslant [\![|\bar{u}| : z \rightarrow \Omega \wedge \langle \bar{x}, u^*(\bar{x}) \rangle \in |\bar{u}| \wedge$$

$$u^*(\bar{x}) \leqslant E_\Omega \bar{u} \wedge E_\Omega \bar{x}]\!]$$

$\therefore$ $[\![(\forall t \in z)[|\bar{u}|(t) \leq E_\Omega \bar{u} \wedge E_\Omega t]]\!] = 1$

$\therefore$ $[\![\langle |\bar{u}|, E_\Omega \bar{u} \rangle \in V^{(\Omega)}]\!] = E E_\Omega \bar{u}$

$\therefore$ $\bar{u} = \langle |\bar{u}|, E_\Omega \bar{u} \rangle \in (V^{(H)})^{(\Omega)}$

この時

1) $E E_{\tilde{\Omega}} u = E \bar{u}$

2) $E_\Omega \bar{u} = E_{\tilde{\Omega}} u$

3) $i [\![\bar{u} = \bar{u}']\!] \leq [\![u = u']\!]_{\tilde{\Omega}} = [\![\bar{u} = \bar{u}']\!]_\Omega$

が成立つ。 1), 2) は定義から明らかであり, 3) は次の様に証明される。$x \in \mathcal{D}(u)$ の時

$$[\![x \in u]\!]_{\tilde{\Omega}} = \bigvee_{y \in \mathcal{D}(u)} [\![x = y]\!]_{\tilde{\Omega}} \wedge u(y)$$

$$= \bigvee_{y \in \mathcal{D}(u)} [\![\bar{x} = \bar{y}]\!]_\Omega \wedge E_\Omega \bar{y}$$

(帰納法の仮定により)

$\therefore$ $[\![[\![x \in u]\!]_{\tilde{\Omega}} = \bigvee_{\bar{y} \in z} [\![\bar{x} = \bar{y}]\!]_\Omega \wedge |\bar{u}|(\bar{y})]\!] = 1$

$\therefore$ $[\![[\![x \in u]\!]_{\tilde{\Omega}} = [\![\bar{x} \in \bar{u}]\!]_\Omega]\!] = 1$

Equality axiom を使って

$[\![\bar{u} = \bar{u}']\!] \leq [\![[\![\bar{x} \in \bar{u}]\!]_\Omega = [\![\bar{x} \in \bar{u}']\!]_\Omega]\!]$

$\therefore$ $i [\![\bar{u} = \bar{u}']\!] \wedge [\![\bar{x} \in \bar{u}]\!]_\Omega = i [\![\bar{u} = \bar{u}']\!] \wedge [\![\bar{x} \in \bar{u}']\!]_\Omega$

$\therefore$ $i [\![\bar{u} = \bar{u}']\!] \leq ([\![\bar{x} \in \bar{u}]\!]_\Omega \leftrightarrow [\![\bar{x} \in \bar{u}']\!]_\Omega)$

$\therefore$ $i [\![\bar{u} = \bar{u}']\!] \leq ([\![x \in u]\!]_{\tilde{\Omega}} \leftrightarrow [\![x \in u']\!]_{\tilde{\Omega}})$

$\therefore$ $i [\![\bar{u} = \bar{u}']\!] \leq \bigwedge_{x \in \mathcal{D}(u)} (u(x) \rightarrow [\![x \in u']\!]_{\tilde{\Omega}})$

同様にして $i [\![\bar{u} = \bar{u}']\!] \leq \bigwedge_{x \in \mathcal{D}(u')} (u'(x) \rightarrow [\![x \in u]\!]_{\tilde{\Omega}})$.

又　$\bar{u} = \langle |\bar{u}|, E_\Omega \bar{u} \rangle$，$E_\Omega \bar{u} = E_{\hat{\Omega}} u$ より

$$[\![\bar{u} = \bar{u}']\!] \leqq [\![E_\Omega \bar{u} = E_\Omega \bar{u}']\!]$$

$$\therefore\ i [\![\bar{u} = \bar{u}']\!] \leqq (E_\Omega \bar{u} \leftrightarrow E_\Omega \bar{u}')$$

$$\therefore\ i [\![\bar{u} = \bar{u}']\!] \leqq (E_{\hat{\Omega}} u \leftrightarrow E_{\hat{\Omega}} u')$$

$$\therefore\ i [\![\bar{u} = \bar{u}']\!] \leqq [\![u = u']\!]_{\hat{\Omega}}$$

次に　$[\![u = u']\!]_{\hat{\Omega}} = [\![\bar{u} = \bar{u}']\!]_\Omega$ を証明する。

$$\begin{aligned} [\![[\![\bar{u} = \bar{u}']\!]_\Omega = {} & \textstyle\bigwedge_{x \in Z} (|\bar{u}|(x) \to [\![x \in \bar{u}']\!]_\Omega) \wedge \\ & \textstyle\bigwedge_{x \in Z'} (|\bar{u}'|(x) \to [\![x \in \bar{u}]\!]_\Omega) \wedge \\ & (E_\Omega \bar{u} \longleftrightarrow E_\Omega \bar{u}')]\!] = 1, \end{aligned}$$

ここに　$|\bar{u}| : Z \to \Omega$，$|\bar{u}'| : Z' \to \Omega$.

$$\begin{aligned} \therefore\ [\![\bar{u} = \bar{u}']\!]_\Omega = {} & \textstyle\bigwedge_{x \in \mathcal{D}(u)} (E_\Omega \bar{x} \to [\![x \in u']\!]_{\hat{\Omega}}) \wedge \\ & \textstyle\bigwedge_{x \in \mathcal{D}(u')} (E_\Omega \bar{x} \to [\![x \in u]\!]_{\hat{\Omega}}) \wedge \\ & (E_{\hat{\Omega}} u \longleftrightarrow E_{\hat{\Omega}} u') \\ = {} & [\![u = u']\!]_{\hat{\Omega}} \qquad (E_\Omega \bar{x} = E_{\hat{\Omega}} x \text{ より}) \end{aligned}$$

$$\therefore\ [\![\bar{u} = \bar{u}']\!]_\Omega = [\![u = u']\!]_{\hat{\Omega}}$$

従って　1), 2), 3) が成立ち　$\Phi(u) = \bar{u}$ によって

$$\Phi : V^{(\hat{\Omega})} \longrightarrow (V^{(H)})^{(\Omega)}$$

が定義される。

$V^{(\hat{\Omega})}$ 及び $(V^{(H)})^{(\Omega)}$ の上の同値関係 $\simeq_{\hat{\Omega}}$ 及び $\simeq_\Omega$ を

$$u, v \in V^{(\hat{\Omega})} \Rightarrow u \simeq_{\hat{\Omega}} v \text{ iff } [\![u = v]\!]_{\hat{\Omega}} = 1$$

$$u, v \in (V^{(H)})^{(\Omega)} \Rightarrow u \simeq_\Omega v \text{ iff } [\![[\![u = v]\!]_\Omega = 1]\!] = 1$$

で定義する時次の定理が成立つ。

定理 (1) 上に定義された Φ は $V^{(\tilde{\Omega})}/\tilde{\Omega}$ から $(V^{(H)})^{(\Omega)}/\hat{\Omega}$ の上への mapping で

(2) $[\![[\![u \in v]\!]_{\tilde{\Omega}} = [\![\bar{u} \in \bar{v}]\!]_{\Omega}]\!] = 1$

(3) $[\![[\![u = v]\!]_{\tilde{\Omega}} = [\![\bar{u} = \bar{v}]\!]_{\Omega}]\!] = 1$

証明

(1) $(V^{(H)})^{(\Omega)}$ の各元 v に対して $[\![\bar{u} = v]\!] = 1$ となる様な $V^{(\tilde{\Omega})}$ の元 u が存在することを証明すればよい。

$v \in (V^{(H)})^{(\Omega)}$ とすると

$$[\![v = \langle |v|, E_{\Omega} v \rangle \wedge E_{\Omega} v \in \Omega \wedge |v| : z \to \Omega \wedge z \subseteq V_{\beta}^{(\Omega)}$$
$$\wedge (\forall t \in z)[|v|(t) \leq E_{\Omega} v \wedge E_{\Omega} t]]\!] = E v$$

となる $|v|$, $E_{\Omega} v$, $z \in V^{(H)}$ 及び $\beta \in O_n$ が存在する。ここで z は遺伝的層表現をとることにする。

今 $u = \langle |u|, E_{\tilde{\Omega}} u \rangle$ を

$E_{\tilde{\Omega}} u = E_{\Omega} v$

$|u|$ は $|v| : z \to \Omega$ を外から見た関数 $\mathcal{D}(z) \to \hat{\Omega}$

となる様にとっておけば

$$E_{\Omega} \bar{u} = E_{\tilde{\Omega}} u = E_{\Omega} v$$

で $|\bar{u}|$ は $|u|$ が丁度 $|\bar{u}|$ を外から見た関数になる様に定義したのだから

$$[\![[\![\bar{u} = v]\!]_{\Omega} = 1]\!] = 1$$

(2) u, v は HSR と仮定してよい.

$$[\![u \in v]\!]_{\tilde{\Omega}} = \bigvee_{y \in \mathcal{D}(v)} [\![u = y]\!]_{\tilde{\Omega}} \wedge v(u)$$

$$= \bigvee_{y \in \mathcal{D}(v)} [\![\bar{u} = \bar{y}]\!]_{\Omega} \wedge E_{\Omega} \bar{y}$$

$$\therefore [\![[\![u \in v]\!]_{\tilde{\Omega}} = \bigvee_{\bar{y} \in z} [\![\bar{u} = \bar{y}]\!]_{\Omega} \wedge \bar{v}(\bar{y})]\!] = 1$$

$$\therefore [\![[\![u \in v]\!]_{\tilde{\Omega}} = [\![\bar{u} \in \bar{v}]\!]_{\Omega}]\!] = 1$$

(3) は既に証明された。

更に次の定理が成立つ。

<u>定理</u> $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ が set theoretical formula で $u_1, \cdots, u_n \in V^{\tilde{\Omega}}$ の時

$$[\![[\![\varphi(u_1, \cdots, u_n)]\!]_{\tilde{\Omega}} = [\![\varphi(\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_n)]\!]_{\Omega}]\!] = 1 .$$

<u>証明</u> φ の論理記号の数に関する帰納法により証明する。$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ が atomic formula の時は前の定理で証明された。

$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \varphi_1(x_1, \cdots, x_n) \wedge \varphi_2(x_1, \cdots, x_n)$ の時

$$[\![\varphi(u_1, \cdots, u_n)]\!]_{\tilde{\Omega}} = [\![\varphi_1(u_1, \cdots, u_n)]\!]_{\tilde{\Omega}} \wedge [\![\varphi_2(u_1, \cdots, u_n)]\!]_{\tilde{\Omega}}$$

帰納法の仮定により

$$[\![[\![\varphi_i(u_1, \cdots, u_n)]\!]_{\tilde{\Omega}} = [\![\varphi_i(\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_n)]\!]_{\Omega}]\!] = 1 , \quad i = 1, 2$$

$$\therefore [\![[\![\varphi(u_1, \cdots, u_n)]\!]_{\tilde{\Omega}} = [\![\varphi(\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_n)]\!]_{\Omega}]\!] = 1 .$$

$\varphi(x_1, \cdots x_n) = \exists x \varphi_1(x, x_1, \cdots, x_n)$ の時

$$[\![\varphi(u_1, \cdots, u_n)]\!]_{\tilde{\Omega}} = \bigvee_{x \in V^{(\tilde{\Omega})}} (E_{\tilde{\Omega}} x \wedge [\![\varphi_1(x, u_1, \cdots, u_n)]\!]_{\tilde{\Omega}})$$

$$= \bigvee_{\bar{x} \in (V^{(\Omega)})^{(\Omega)}} (E_{\Omega} \bar{x} \wedge [\![\varphi_1(\bar{x}, \bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_n)]\!]_{\Omega})$$

$\therefore [\![\, [\![\varphi(u_1, \cdots, u_n)]\!]_{\widetilde{\Omega}} = [\![\exists x \varphi_1(x, \bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_n)]\!]_{\Omega} \,]\!] = 1$

他の場合も同様に証明される。

以上の定理により、対応

$$\Phi : V^{(\widetilde{\Omega})} / _{\widetilde{\Omega}} \longrightarrow \left(V^{(H)} \right)^{(\Omega)} / _{\widetilde{\Omega}}$$

は isomorphiam になっている。