数理解析研究所講究録
第 362 巻 1979 年 25-29

An affirmative answer of a Joyal's problem

名大理　安本雅洋

$\mathfrak{A}$を $\mathbb{N}$ の elementary extension, a, b を $\mathfrak{A}$ の元. $[a, b]^{\mathfrak{A}} = \{x \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models a \leq x \leq b\}$ とする。

Joyal の問題とは

(*) $\mathbb{N}$ の elementary extension $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A}$ の元 c で $[0, c]^{\mathfrak{A}}$ が可算, $[0, 2^c]^{\mathfrak{A}}$ が非可算となる model が存在するか.

である。以下において, (*)に対する肯定的結果を与える。

言語 $L = \langle +, \cdot, 0, 1, f \rangle$ ただし f は一変数関数記号とする。自然数上の関数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に関して次の定理が成立する。

<u>定理</u>. 次の二条件は同値である。

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ ($f(m) > m^n$ を満たす m が無限個存在する。)

(b) $(\mathbb{N}, f)$ の elementary extension $(\mathfrak{A}, f')$ と $\mathfrak{A}$ の元 c で、$[0, c]^{\mathfrak{A}}$ が可算、$[0, f'(c)]^{\mathfrak{A}}$ が非可算となるものが存在する。

$[0, c]^{\mathfrak{A}}$ が可算ならば、$[0, c^n]$ が可算になることより、$\neg(a) \to \neg(b)$ は容易にわかる。(a) $\to$ (b) を証明する。c, d を constant symbols とする。

Lemma 1. T を次の sentences の集合とする。

(1) $Th(\mathbb{N}, f)$ i.e. $(\mathbb{N}, f)$ で成立する L の sentences の集合.

(2) $0 < c$, $1 < c$, $2 < c$, ...

(3) $d < f(c)$

(4) $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$ を L の formula とする時

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n \,(\, y_1 \le f(c) \wedge \cdots \wedge y_n \le f(c) \to d \ne \mu x\, \varphi(x, y_1, \cdots, y_n))$$

ただし、$\mu x\, \varphi(x, \ldots)$ は $\varphi(x, \cdots)$ を満たす最小の x か、又は、そのような x が存在しない時は 0 を表わすものとする。

この時、T は model を持つ。

[証明] T' を T の任意の有限部分集合とする。ある $c, d \in \mathbb{N}$ が存在して、$(\mathbb{N}, f, c, d)$ が T' の

model になることを証明すればよい。 まず $\varphi_1, \cdots \varphi_m$ を T' の (4) に現われる formulae の全体とする。 $A = \{n \in \mathbb{N}$ $| \; n = \mu x \varphi_i(x, b_1, \cdots, b_{k_i})$, for some $i \leq m$, $b_1 \cdots b_k \leq c\}$ とすると、Aの元の個数は 高々 $\Sigma_{i=1}^{m} c^{k_i}$ である。よって (a) より $\Sigma_{i=1}^{m} c^{k_i} < f(c)$ を満たす $c \in \mathbb{N}$ が無限個存在する。 従って T' の (2) も満たすように c をとってくることができる。 $[0, f(c)] - A$ は nonempty より、d をこの中から一つとってくると、$(\mathbb{N}, f, c, d)$ が T' の model になることは つくり方より明らか。

<u>Lemma 2.</u> 次の条件を満たす $L \cup \{c\}$ の可算model I, M が存在する。

(1) $(\mathbb{N}, f) \prec I \prec M$

(2) $[0, c]^I = [0, c]^M$

(3) $[0, f(c)]^I \neq [0, f(c)]^M$

[証明] M を Lemma 1 の T の可算 model とする。

$$I = \{ a \in M \mid a = \mu x \varphi(x, b_1, \cdots, b_k) \text{ ただし } \varphi \text{ は } L \text{ の formula}, \; b_1, \cdots, b_k \leq c \}$$

とおくと、明らかに $[0, c]^M \subset I$ 従って $[0, c]^M = [0, c]^I$。

又、Lemma 1 の (4) より $d \notin [0, f(c)]^I$、よって $[0, f(c)]^I \neq [0, f(c)]^M$。 したがって $I \prec M$ を証明すれば十分である。

$I_0 = I$

$I_{n+1} = \{a \in M \mid a = \mu x \varphi(x, b_1, \cdots, b_k)$ ただし φ は L の formula で $b_1, \cdots, b_k \in I_n\}$

とおく。Löwenheim-Skolem の定理の証明と同様に $\bigcup I_n \prec M$ が証明される。ところで任意の $a \in I_1$ に対して

$$a = \mu x \varphi(x, b_1, \cdots, b_k)$$
$$= \mu x (\varphi(x, y_1, \cdots, y_k) \wedge y_1 = \mu x_1 \psi_1(x_1 b_{11}, \cdots)$$
$$\cdots \wedge y_k = \mu x_k \psi_k(x_k, b_{1k}, \cdots))$$

ただし $b_1, \cdots, b_k$ は I のえ．したがって $b_{11}, \cdots, b_{1k}, \cdots \leq c$．よって $a \in I$ となる。従って $I = I_1 = \bigcup I_n \prec M$ となり Lemma 2 が証明された。

<u>Lemma 3</u> (R. Vaught) $R(x)$, $S(x)$ を formulae とする。$R^I = R^M$, $S^I \neq S^M$, $I \prec M$ なる model I, M が存在するならば，R^J は可算，S^J は非可算となるような M の elementary extension J が存在する。

Lemma 3 の証明は，Vaught の two-cardinal theorem と同じようにして証明できる (c.f. p.p. 130-131 [2])

Lemma 2 と Lemma 3 より 定理 1 が証明される。

定理 1 において $f(m) = 2^m$ とおくと (*) の model が

得られる。

References

[1] Bell, J. L. and Slomson, A. B.
Models and Ultraproducts. Amsterdam North-Holland Publishing Company, 1969.

[2] Sacks, G. E. Saturated Model Theory, Benjamin, New York, 1972.