数理解析研究所講究録
第 362 巻 1979 年 51-74

Generalized recursion theory について

名大 教養部　　柘植利之

S. C. Kleeneを先頭とする20年間にわたる諸労作によって，自然数に関する通常の recursion theory（相対化と一様性の概念に基づく type-1 の variable の介在を含めて）は数々の成果をもたらして，1955年にはほぼ完成の域に達した．その後，幾つかの方向からその拡張が試みられ，今日 generalized recursion theory として輝かしい発展を示してきた．その一つの発端となったのは，1954年，竹内外史 [9] である．

竹内 [9, 10] は集合論の無矛盾性を順序数論の無矛盾性に reduce することを試み，その思想及び用いられた技術が熟成して順序数上の recursion theory の導入となった（竹内 [11]）．ここで，R. A. Shore [8] の序文から関連する部分を引用しよう：

Essentially he showed that Gödel's construction of L (the class of constructible sets) could be mimicked in an (ordinal) effective way to give a (recursively) isomorphic copy of L within his theory of ordinal numbers (Takeuti[1965]). In many ways this work foreshadowed the close interconnections between recursion theory and set theory that arose in the study of the fine structure of L.

他方，1959年，Kleene [4] は higher types での recursion theory を建設し，見事な理論を展開した．基礎論を専攻する者にとって今や familiar な事実：$\mathbb{E}$ で general recursive という概念は hyperarithmetical という概念と同等である，ここで $\mathbb{E}$ は

$$\mathbb{E}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{if } \exists x[\alpha(x) = 0], \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義される type－2 の object である；はそのすばらしい結果の一例である．多くの recursion theorists が注目しこの新分野の研究に無論着手しはじめたが，Kleene 自身によるもののほかは柘植 [13] を除いて，関連する成果が公表され多くの結実を見るのは1960年代の後半以後である．その一因としてはこの理論の複雑微妙さとその困難さにあるものと思われる．こうした事情を A. S. Kechris − Y. N. Moschovakis [3] はその序文でつぎのように描いている．

From its inception, higher-type recursion has been considered difficult and somewhat esoteric. Although it has been brought to a seasoned maturity with the contributions of many researchers in the last fifteen years, it has not been understood by as wide a circle of mathematicians as it deserves. This is partly due to the technical difficulty of the basic papers on the subject. More than that, the basic notions of the theory have been considered difficult to understand and foundationally problematical.

その後，ordinal recursion theory，higher-type recursion theoryに加えて，よりabstractなset recursion theoryも起こり，これらはgeneralized recursion theoryと総称され，相互の関連を含めここ十数年の間に驚くばかりの発展を示してきた（generalized recursion theoryの研究の重要さとその意義については，G. Kreisel [6]の評論がある）．わが国では，ordinal recursion theory（柘植[14]）及びhigher-type recursion theory（柘植[13]）の創生期ないしは極めて早い時期においてのworkerが存在し，これらの分野ではよい環境にあったといえるが，残念ながらその後発展せずわずかに福山克[1]，篠田寿一[7]等の成果をみるにとどまっている．

ここでは，generalized recursion theoryにおける諸結果のなかで，ordinal recursion theoryとhigher-type recursion theory とがたがいに関連する部分を緒口的に紹介し，この方面への入門的解説をしたい．定義，記号及び証明の大部分はP. G. Hinmannの最近の著書［２］に従った．換言すれば，同書の終章：VIII。Recursion on Ordinalsから適宜話題を抜すいrearrangeしたもので，この章の主要な部分のinstantな解説にほかならない．

1　Ordinalsのrecursive functionは簡単にいえば，通常のrecursive functionの定義でのsuccessor，自然数のconstant function（一般に，ordinal numberを値とするconstant functionは認めない），projection等のinitial functions，substitution，（場合によっては）μ-operation，recursion等のschemataに，supremumに関するもの：

$$F(\rho, \boldsymbol{\mu}) \simeq \sup_{\pi<\rho} G(\pi, \boldsymbol{\mu}) \; (= \text{the least ordinal } \nu \text{ such that } \forall \pi < \rho.\ G(\pi, \boldsymbol{\mu}) < \nu)$$

を新たなschemaとして追加することにより定義される．ここで，$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_k)$，以後同様の記法を用いる．Hinmanの定義にしたがって，μ-operation（μはordinalに用いるので，記号 "least" を使う）を用いるので，若干説明しておく．

いま，ordinal λ が与えられたとして，理論を通じて固定しておく．λ-least operation とは

$$F(\mu) \simeq \lambda\text{-least } \pi.\ G(\pi,\mu) \simeq 0 \quad \text{iff}$$

$$F(\mu) \simeq \begin{cases} \pi, \text{ if } \pi < \lambda,\ G(\pi,\mu) \simeq 0, \text{ and } \forall \sigma < \pi \exists \nu > 0\, G(\sigma,\mu) \simeq \nu; \\ \text{undefined, if there is no such } \pi < \lambda \end{cases}$$

で定義され，このとき F は G から <u>λ-search</u> によって導入されるという。これはいわゆる <u>bounded search</u>：

$$F(\rho,\mu) \simeq \text{least } \pi < \rho.\ G(\pi,\mu)$$

とは異なるものである．λ-search の定義において，$\pi < \lambda$ という条件を取り外したものを <u>unbounded search</u> という：

$$F(\mu) \simeq \text{least } \pi.\ G(\pi,\mu) \simeq 0.$$

さて，任意の ordinals κ と λ とに対して，$\Omega_{\kappa\lambda}$ を次のように inductive definition によって定義する．

<u>定義 1.1</u>　すべての $k, n \in \omega$，すべての $i < k$，すべての $\mu \in {}^{k}\kappa$，及びすべての $\nu, \pi, \rho, \sigma, \tau < \kappa$ に対して，以下の条件を満たす最小の集合を $\Omega_{\kappa\lambda}$ とする：

(0.0)　$(\langle 0, k, 0, n\rangle, \mu, n) \in \Omega_{\kappa\lambda}$;

(0.1)　$(\langle 0, k, 1, i\rangle, \mu, \mu_i) \in \Omega_{\kappa\lambda}$;

(0.2)　$(\langle 0, k, 2, i\rangle, \mu, \mu_i + 1) \in \Omega_{\kappa\lambda}$;

(0.3)　$(\langle 0, k+4, 3\rangle, \pi, \rho, \sigma, \tau, \mu, \pi) \in \Omega_{\kappa\lambda}$, if $\sigma = \tau$;

(0.3)　$(\langle 0, k+4, 3\rangle, \pi, \rho, \sigma, \tau, \mu, \pi) \in \Omega_{\kappa\lambda}$, if $\sigma \neq \tau$;

(0.4) $(\langle 0, k+2, 4\rangle, p, q, \mu, \langle 1, (p)_1 \dot{-} 1, p, \langle 0, (p)_1 \dot{-} 1, 0, q\rangle, \langle 0, (p)_1 \dot{-} 1, 1, 0\rangle, \cdots, \langle 0, (p)_1 \dot{-} 1, 1, (p)_1 \dot{-} 2\rangle\rangle) \in \Omega_{\kappa\lambda}$,

for all $p, q \in \omega$;

(1) for any $k', b, c_0, \cdots, c_{k'-1} < \omega$ and any $\xi_0, \cdots, \xi_{k-1} < \kappa$, if for all $i < k'$, $(c_i, \mu, \xi_i) \in \Omega_{\kappa\lambda}$ and $(b, \xi, \nu) \in \Omega_{\kappa\lambda}$, then $(\langle 1, k, b, c_0, \cdots, c_{k'-1}\rangle, \mu, \nu) \in \Omega_{\kappa\lambda}$;

(2) for any b, if $(b, \mu, \nu) \in \Omega_{\kappa\lambda}$, then

$$(\langle 2, k+1\rangle, b, \mu, \nu) \in \Omega_{\kappa\lambda};$$

(3) if ν is the least ordinal such that $\forall \pi < \rho \exists \xi < \nu . (b, \pi, \mu, \xi) \in \Omega_{\kappa\lambda}$, then $(\langle 3, k+1, b\rangle, \rho, \mu, \nu) \in \Omega_{\kappa\lambda}$;

(4) if $\nu < \lambda$, $(b, \nu, \mu, 0) \in \Omega_{\kappa\lambda}$, and $\forall \pi < \nu \exists \xi > 0 . (b, \pi, \mu, \xi) \in \Omega_{\kappa\lambda}$, then $(\langle 4, k, b\rangle, \mu, \nu) \in \Omega_{\kappa\lambda}$.

この定義で (3) 及び (4) は sup 及び λ-search の operation を導入するものであって，それぞれ

$$\{\langle 3, k+1, b\rangle\}_{\kappa\lambda}(\rho, \mu) \simeq \sup_{\pi<\rho}\{b\}_{\kappa\lambda}(\pi, \mu),$$

及び

$$\{\langle 4, k, b\rangle\}_{\kappa\lambda}(\mu) \simeq \lambda\text{-least } \pi . \{b\}_{\kappa\lambda}(\pi, \mu) \simeq 0$$

となることを意図しているのはいうまでもない。

さて，すべての κ, λ, a, μ に対して，$(a, \mu, \nu) \in \Omega_{\kappa\lambda}$ となるような ν が高々一つ存在することが超限帰納法によって証明できるので，

$$\{a\}_{\kappa\lambda}(\mu) \simeq \nu \iff (a, \mu, \nu) \in \Omega_{\kappa\lambda}$$

とおくのである.

<u>定義 1.2</u> すべての κ, λ, a, μ, ν に対して,

(i) $\{a\}_{\kappa}(\mu) \simeq \nu \iff (a, \mu, \nu) \in \Omega_{\kappa\kappa}$;

(ii) $\{a\}_{\infty\lambda}(\mu) \simeq \nu \iff \exists \kappa\, (a, \mu, \nu) \in \Omega_{\kappa\lambda}$;

(iii) $\{a\}_{\infty}(\mu) \simeq \nu \iff \exists \kappa \exists \lambda\, (a, \mu, \nu) \in \Omega_{\kappa\lambda}$.

Partial function $F : {}^{k}\kappa \to \kappa$ が <u>κ-partial recursive</u> であるというのは, $F(\mu) \simeq \{a\}_{\kappa}(\mu)$ となるような $a \in \omega$ (a を F の <u>κ-index</u> という) が存在することと定義する. また partial function $F : {}^{k}On \to On$ が <u>(∞, λ)-partial recursive</u> [<u>∞-partial recursive</u>] であるというのは, $F(\mu) \simeq \{a\}_{\infty\lambda}(\mu)$ [$F(\mu) \simeq \{a\}_{\infty}(\mu)$] となるような $a \in \omega$ が存在することと定義する. κ-recursive 等々の定義は以上から通常の通り定義される.

ここで, κ-partial recursive functions の class が recursion theory として常識的な体裁を保つためにも, κ にある種の closed な性質—'regularity' を要請すべきはいうまでもない.

<u>定義 1.3</u> Ordinal κ が recursively regular であるというのは, κ がすべての (∞, κ)-partial recursive functions のもとで閉じていることと定義する.

証明は省略するがつぎのことが知られている．

<u>定理 1．4</u>　κに関するつぎの3つの性質は同等である．

(a)　κはrecursively regularである．

(b)　すべての$a \in \omega$，すべての$\mu < \kappa$と，すべてのνに対して，$\{a\}_{\infty\kappa}(\mu) \simeq \nu \Longleftrightarrow \{a\}_{\kappa}(\mu) \simeq \nu$．

(c)　すべてのκ-partial recursive functions Fとすべての$\rho, \mu < \kappa$に対して，

$$F(\pi, \mu)\downarrow \text{ for all } \pi < \rho \Longrightarrow \sup_{\pi<\rho} F(\pi, \mu) < \kappa,$$

ここで，$F(\pi,\mu)\downarrow$は'$F(\pi, \mu)$ is defined'の略記である．

<u>定理 1．5</u>　κをrecursively regularとすると，すべてのa，μ，及びνに対して，

$$\{a\}_{\kappa}(\mu) \simeq \nu \Longleftrightarrow \exists \upsilon < \kappa\,[T(a, \langle\mu\rangle, \upsilon) \wedge (\upsilon)_0 = \nu]$$

が成り立つ．ここで，Tは$(\infty, 0)$-recursive predicateである．

<u>注意</u>　κがrecursively regularならば，もちろんκはすべての$(\infty, 0)$-(partial) recursive functionsのもとで閉じており，また$(\infty, 0)$-(partial) recursive functionのrecursively regular ordinalへのrestrictionはκ-(partial) recursiveである．

上の定理1．5から直ちに系として，κ-partial recursive functionに対する<u>標準形定理</u>が得られる．

定理　1．6　集合 $\{\kappa \mid \kappa$ is recursively regular$\}$ は $(\infty, 0)$-recursive である．

なお，ω_1（non constructive ordinals の最小数）は ω より大きい最初の recursively regular ordinal であることが知られている．

2　Type-2 の functionals と ordinal recursion とのかかわりを述べるには，まず type-2 の objects での（partial）recursive function の定義を行い，ある程度その理論の紹介するのが順序というものであろうが，紙数の都合で一切割愛せざるを得ない．幸い，講究録336号，「ブール代数値の解析学と超準解析」に登載の篠田寿一の研究報告：Type-2 object での recursion，101〜116頁，は当面必要な事柄の良い解説を含んでいるので，それを参照して頂きたい．実は，本稿は Hinman［2］に従っているので，その定義も［2］の第VI章に従ってまず $\Omega[\mathbb{F}]$ の inductive な定義から進む仕方をとらなければ，つじつまが合わないのであるが，結局は同等であるということで了解を得たい．

いま，$\mathbb{F}$ を '$\mathbb{E}$ is recursive in $\mathbb{F}$' であるような type-2 の object とし，固定しておく．$\omega_1[\mathbb{F}]$ でもって，well-ordering $\leq (\subset \omega\times\omega)$ が recursive in $\mathbb{F}$ であるようなも

のの ordered type にはなり得ない最小の ordinal を表わすこととする．とくに，

$$\omega_1[\mathbb{E}] = \omega_1$$

はよく知られた事実である．

さて，以下で $\boldsymbol{m}$ は自然数の有限列を表わすものとし，

$$\mathrm{U}^{\mathbb{F}} = \{\langle a, \boldsymbol{m}\rangle \mid \{a\}^{\mathbb{F}}(\boldsymbol{m})\downarrow\}$$

とおくと，$\mathbb{F}$ で semi-recursive な relations $\preceq^+$，$\prec^+$，及び $\mathbb{F}$ で co-semi-recursive relations $\preceq^-$，$\prec^-$ とが存在して，u, v の少くとも一つが $\mathrm{U}^{\mathbb{F}}$ に属するとき，つねに

$$u \preceq^+ v \iff |u|^{\mathbb{F}} \leq |v|^{\mathbb{F}} \iff u \preceq^- v,$$

$$u \prec^+ v \iff |u|^{\mathbb{F}} < |v|^{\mathbb{F}} \iff u \prec^- v$$

が成り立つようにできる．ここで，$|\langle a, \boldsymbol{m}\rangle|^{\mathbb{F}}$ は $\{a\}^{\mathbb{F}}(\boldsymbol{m})$ の computation steps の長さを表わす ordinal である（$\{|u|^{\mathbb{F}} \mid u \in \mathrm{U}^{\mathbb{F}}\} = \omega_1[\mathbb{F}]$ がいえる！）．

これらの relations を（都合よく）用い，index から index への計算を機械的に実行し，通常の primitive recursion を適用することにより，

<u>補題 2.1</u>　すべての a と $\boldsymbol{m} \in \mathrm{U}^{\mathbb{F}}$ とに対して，

(i)　$\{f(a)\}^{\mathbb{F}}(\boldsymbol{m})\downarrow$ iff $\{a\}_{\omega_1[\mathbb{F}]}(|\boldsymbol{m}|^{\mathbb{F}})\downarrow$;

(ii)　$\{a\}_{\omega_1[\mathbb{F}]}(|\boldsymbol{m}|^{\mathbb{F}}) \simeq |\{f(a)\}^{\mathbb{F}}|^{\mathbb{F}}$

となるような primitive recursive function f が存在する．

がいえる（その証明はあまり容易ではない）．これを用いて，定理2．2，2．3が成り立つ．

<u>定理 2．2</u> 任意の集合 $R \subseteq {}^n\omega$ に対して，

(i) R is $\omega_1[\mathbb{F}]$-semi-recursive

$$\Rightarrow R \text{ is semi-recursive in } \mathbb{F}\,;$$

(ii) R is $\omega_1[\mathbb{F}]$-recursive $\Rightarrow R$ is recursive in $\mathbb{F}$

である．

<u>定理 2．3</u> $\omega_1[\mathbb{F}]$ は recursively regular である．

上掲の定理2．2の逆をうるためには若干の條件を要する．いま，$\{a\}_\kappa$ の arguments を ω に restrict したものを $\{a\}_\kappa^\omega$ で表わす．

<u>定義 2．4</u> 任意の κ に対して，$\mathbb{F}$ が <u>κ-effective</u> であるとは，

$$\mathbb{F}(\{a\}_\kappa^\omega) = F(a) \quad \text{for all } a \text{ such that } \{a\}_\kappa^\omega \in {}^\omega\omega$$

となるような κ-partial recursive function F が存在するときをいう．ここで，F に対する κ-index をまた $\mathbb{F}$ の κ-index という．

R is $\omega_1[\mathbb{E}]$-(semi)-recursive

$$\Leftrightarrow R \text{ is (semi)-recurive in } \mathbb{E}.$$

はよく知られているが，実際に，$\mathbb{E}$ は任意の $\kappa > \omega$ 対して κ-effective であることがいえる．すなわち，

$$E(a) \simeq \inf_{\pi<\omega} sg(\{a\}_\kappa(\pi))$$

とおくと，E は κ-partial recursive function であって，

$$\{a\}_\kappa^\omega \in {}^\omega\omega \Longrightarrow E(a) \simeq \mathbb{E}(\{a\}_\kappa^\omega).$$

注意　篠田 [7] は 'κ-effectiveness' の概念を用いることなく，定義 1. 1 に次の条項：

(*)　for any b and β, if $(b, n, \mu, \beta(n)) \in \Omega_{\kappa\lambda}(\mathbb{F})$ for all n, then $(\langle 5, k, b\rangle, \mu, \mathbb{F}(\beta)) \in \Omega_{\kappa\lambda}(\mathbb{F})$.

を組み入れることにより，以下の諸結果を導いている。

定理　2. 5　任意の d と $\kappa > \omega$ に対して，$\mathbb{F}$ が κ-effective with index d ならば，

$$\{g(a, d)\}_\kappa(m) \simeq \{a\}^{\mathbb{F}}(m) \quad \text{for all } a, m < \omega$$

となるような primitive recursive function g が存在する。

系　2. 6　$\mathbb{F}$ が κ-effective であるような任意の κ と任意の $R \subseteq {}^n\omega$ とに対して，

(i)　R is semi-rec. in $\mathbb{F} \Longrightarrow R$ is κ-semi-rec.

(ii)　R is rec. in $\mathbb{F} \Longrightarrow R$ is κ-rec.

が成り立つ。

系　2. 7　任意の recursively regular な κ に対して $\mathbb{F}$ が κ-recursive ならば，$\omega_1[\mathbb{F}] \leq \kappa$ である。

（証明）　$\mathbb{F}$ を κ-effective とし，$\sigma < \omega_1[\mathbb{F}]$ としよう。$\mathbb{F}$ で recursive で，その ordered type が σ となるような

$\preceq$ ($\subset \omega\times\omega$) をとる．系 2.6 より $\preceq$ は κ-recursive である．したがって，つぎの事実：

任意の recursively regular な $\kappa > \omega$ と任意の $\gamma \in W$ (慣用されている W) に対して，γ が κ-recursive ならば，$\|\gamma\| < \kappa$ である．

を用いて，$\sigma < \kappa$ をうる．かくして $\omega_1[\mathbb{F}] \leq \kappa$ がいえた．

定理 2.2 と系 2.6 とから，つぎの定理がえられる．

定理 2.8　もし $\mathbb{F}$ が $\omega_1[\mathbb{F}]$-effective ならば，すべての $R \subseteq {}^k\omega$ に対して，

(i)　R is $\omega_1[\mathbb{F}]$-semi-rec. $\Longleftrightarrow$ R is semi-rec. in $\mathbb{F}$;

(ii)　R is $\omega_1[\mathbb{F}]$-rec. $\Longleftrightarrow$ R is rec. in $\mathbb{F}$

である．

3　最後の節で利用するためもあって，ここで幾つかの定義とそれらに関する若干の性質を並べておく．

定義 3.1　任意の $d \in \omega$ に対して，

(i)　$Om[\mathbb{F}] = \{\omega_1[\mathbb{G}] \mid \mathbb{F}$ is recursive in $\mathbb{G}\}$;

(ii)　$Ef_d[\mathbb{F}] = \{\kappa \mid \kappa$ is recursively regular. $\wedge$. $\mathbb{F}$ is κ-effective with index $d\}$;

(iii)　$\mathbb{F}$ is effective with index d iff $Om[\mathbb{F}] \subseteq Ef_d[\mathbb{F}]$;

(iv)　$\mathbb{F}$ is effective iff it is effective with some index.

つぎに,

$$\mathbb{F}^{sJ}((\langle a, m\rangle) * \alpha) = \begin{cases} 0 & \text{if } \{a\}^{\mathbb{F}}(m, \alpha)\downarrow, \\ 1 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

によって定義される functional $\mathbb{F}^{sJ}$ を superjump という.

Type-2 の object $\mathbb{E}_1$ は

$$\mathbb{E}_1(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{if } \forall\beta\exists x.\,\alpha(\bar{\beta}(x)) = 0, \\ 1 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

で定義される functional であるが, $\mathbb{E}^{sJ}$ は $\mathbb{E}_1$ とは同等, 正確には, 'たがいに recursive in の関係' にあることが知られている.

通常のごとく, Ordinals の集合 A に対して, Lim(A) を

$$\mathrm{Lim}(A) = \{\kappa \mid \kappa \in A \wedge \forall\sigma < \kappa\, \exists\lambda \in A\, (\sigma < \lambda < \kappa)\}$$

と定義する.

以上定義した事柄に関連して, つぎの補題及び定理が成り立つ. 補題 3.3 の証明は余り容易ではない.

補題 3.2　　$Om[\mathbb{F}^{sJ}] \subseteq \mathrm{Lim}(Om[\mathbb{F}])$.

補題 3.3　　任意の d に対して,

$$\mathrm{Lim}(Ef_d[\mathbb{F}]) \subseteq Ef_{d'}[\mathbb{F}^{sJ}]$$

が成り立つような d' が存在する.

定理 3.4　　もし $\mathbb{F}$ が effective ならば, $\mathbb{F}^{sJ}$ もまた effective である.

4　まず，ordinal の stability を定義する．

任意の ordinals κ と λ に対して

(i)　κ が <u>stable</u> である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ κ がすべての ∞-partial recursive functions に関して閉じている；

(ii)　κ が <u>λ-stable</u> である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ κ がすべての (∞,λ)-partial recursive functions に関して閉じている；

(iii)　κ が <u>weakly stable</u> である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ κ がある $\lambda > \kappa$ に対して λ-stable である．

定義から容易につぎの関係がわかる：

κ が stable である $\Longleftrightarrow$ すべての λ に対して，κ は λ-stable である $\Longrightarrow$ κ は weakly stable である $\Longrightarrow$ κ が recursively regular である．

つぎの補題は本質的には竹内[11]によるもので，極めて有力で ordinals の recursion theory の基礎をなすものである．補題のなかに現れる φ_A は A の collapsing map である．

<u>補題 4．1</u>　任意の λ と任意の $A \subseteq \lambda$ [任意の $A \subseteq On$] に対して，もし A がすべての (∞,λ)-partial recursive functions [すべての ∞-partial recursive functions] に関して閉じているならば，すべての $\mu, \nu \in A$ と (∞,λ)-partial recursive function F [∞-partial recursive function F] とに対して

$$F(\mu) \simeq \nu \Longrightarrow F(\varphi_A(\mu)) \simeq \varphi_A(\nu)$$

が成り立つ．ここで，$\varphi_A(\mu)$ は $\mu = (\mu_0, \cdots, \mu_{k-1})$ のとき $(\varphi_A(\mu_0), \cdots, \varphi_A(\mu_{k-1}))$ の略記である．

<u>定理 4.2</u>　σ を $\geq \omega$ であるような勝手な ordinal とするとき，

(i)　任意の recursively regular な ordinal λ, $\lambda > \sigma$, に対して，$\sigma < \kappa \leq \lambda$, $\overline{\overline{\kappa}} = \overline{\overline{\sigma}}$，かつ κ は λ-stable となるような ordinal κ が存在する；

(ii)　$\sigma < \kappa$, $\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\kappa}}$ となるような stable ordinal κ が存在する．

（証明）　(ii) は全く同様にできるから (i) の証明だけを述べる．λ を recursively regular で $\lambda > \sigma$ とし，

$$A = \{F(\mu) \mid \mu \leq \sigma \wedge F \text{ is } (\infty, \lambda)\text{-partial rec.}\}$$

とおく．λ は recursively regular であるから，$A \subseteq \lambda$．さらに (∞, λ)-partial recursive functions の全体は composition に関して閉じているから，A はすべての (∞, λ)-partial recursive functions のもとで閉じている．そこで A が ordinal（それを κ とする）であることがいえれば，$\kappa \leq \lambda$ で λ-stable な ordinal κ が存在することがわかる．

まず，projection function は (∞, λ)-recursive であるから，$\sigma \subseteq A$（もちろん，A が ordinal であればそれは σ

より大). したがって collapsing map の性質:

$$\rho \subseteq A \Rightarrow \varphi_A(\rho) = \rho$$

より, すべての $\mu \leq \sigma$ に対して, $\varphi_A(\mu) = \mu$ である.

つぎに A の定義から, 任意の $\nu \in A$ に対して, $\mu \leq \sigma$ と $F(\mu) \simeq \nu$ となるような (ω, λ)-partial recursive function F とが存在する. したがって補題 4.1 より

$$\varphi_A(\nu) \simeq F(\varphi_A(\mu)) \simeq F(\mu) \simeq \nu$$

がいえる. つまり, すべての $\nu \in A$ に対して $\varphi_A(\nu) = \nu$ となり, A は一つの ordinal であることがわかった (φ_A は A の collapsing map だから).

最後に, (ω, λ)-partial recursive functions は高々可算個しかないから,

$$\overline{\overline{\kappa}} = \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \aleph_0 = \overline{\overline{\sigma}}$$

である.

<u>系 4.3</u> 任意の cardinal $\rho > \omega$ に対して, $\{\kappa \mid \kappa < \rho \land \kappa \text{ is stable}\}$ と $\{\kappa \mid \kappa < \rho \land \kappa \text{ is recursively regular}\}$ とはともに同じ cardinality ρ をもつ.

(証明) ρ を ω より大きい cardinal としよう. 勝手な ordinal σ: $\omega \leq \sigma < \rho$ に対して, 上の定理 4.2 より $\sigma < \kappa$, $\overline{\overline{\kappa}} = \overline{\overline{\sigma}}$ となるような stable な ordinal κ が存在する. すなわち, $\forall \sigma < \rho\, \exists \kappa [\sigma < \kappa < \rho \land \kappa \text{ is stable}]$. したがって,

ρ より小さい stable な ordinals は ρ と cofinal である．ρ が regular cardinal ならば，ρ より小さい stable ordinals の全体は ρ と同じ cardinality をもつ．このことからまた直ちに，ρ が singular のときも同じ結論をうる．

κ が stable であれば，κ は recursively regular であるから，ρ より小さい recursively regular ordinals の全体もまた ρ と同じ cardinality をもつことが結論される．

さて，λ-stability [stability] に関しつぎの性質：

<u>任意の λ に ρ に対して，ρ が λ-stable ordinals [stable ordinals] の limit ならば，ρ は λ-stable [stable] である</u>

がいえる．実際に，ρ が λ-stable ordinals の limit ordinal であるとすると，任意の $\mu < \rho$ に対して，$\mu < \kappa < \rho$ で λ-stable な ordinal κ が存在する．したがって，任意の (∞, λ)-partial recursive function F に対して

$$F(\mu) < \kappa < \rho$$

となり，ρ は λ-stable である．Stable の場合も全く同様である．

定理 4.2 から，uncoutable な cardinal $\aleph$ に対し，

$$\forall \sigma < \aleph\ \exists \kappa\, [\sigma < \kappa \wedge \overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\kappa}} \wedge \kappa \text{ is stable}]$$

が成り立つので，uncoutable cardinal は stable ordinals

の limit であり，したがって上述の性質より

<u>uncountable cardinal は stable であり</u>，<u>したがって</u>

<u>また recursively regular である</u>

が系として出てくる．

なお，最小の stable ordinal は δ_2^1（ω の Δ_2^1-wellordering では表わされないような最小の ordinal）であることが知られている．

5　系4.3より，おのおの[9] uncountable cardinal ρ は ρ-th recursively regular ordinal である．いま，

$$\tau_\rho = \text{least } \sigma\, [\, \sigma \text{ is recursively regular} \\ \wedge\ \forall \pi < \rho\, (\tau_\pi < \sigma)\,]$$

とおく．$\tau_0 = \omega$，$\tau_1 = \omega_1$（constructive ordinal でない最小の ordinal）であり，またすべての π と ρ に対して

$$\rho \leq \tau_\rho \quad , \text{かつ} \quad \pi < \rho \Longrightarrow \tau_\pi < \tau_\rho$$

である．そこで，任意の ordinal κ に対して，$\kappa = \tau_\kappa$ のとき，κ を <u>recursively inaccessible</u> であると定義する．

κ-partial recursive functions のクラス，(∞, λ)-partial recursive functions のクラス，また ∞-partial recursive functions のクラスはいずれも primitive recursion のもとで closed であること，及び $\{\kappa \mid \kappa \text{ is recursively regular}\}$

が $(\omega, 0)$-recursive であるを用いて，つぎの補題がいえる．

<u>補題 5．1</u>　$F(\rho) \simeq \tau_\rho$ となるような F は ∞-recursive である．任意の κ に対して，

$$F_\kappa(\rho) \simeq \tau_\rho \quad \text{iff} \quad \tau_\rho < \kappa$$

を満たす partial function F_κ は (∞, κ)-partial recursive であり，とくに κ が recursively regular ならば κ-recursive である．

<u>系 5．2</u>　κ が stable なら［weakly stable でも］，κ は recursively inaccessible である．

（証明）　まず，κ を stable としよう．補題 5．1 の F は ∞-recursive であるから，κ は F に関して閉じている．すなわち，$\rho < \kappa \Rightarrow \tau_\rho < \kappa$．$\kappa$ はそれ自身 recursively regular であるから τ_κ の定義の［　］の中を満たしており，したがって，$\tau_\kappa \leq \kappa$．他方，つねに $\kappa \leq \tau_\kappa$．

κ が，ある $\lambda > \kappa$ に対して，λ-stable ならば，κ は F_λ に関して closed である．したがって，任意の $\rho < \kappa$ に対して，もし $F_\lambda(\rho)$ が defined（すなわち，$\tau_\rho < \lambda$）ならば，$\tau_\rho < \kappa$ である．上と同様に，$\rho < \kappa \Rightarrow \tau_\rho < \kappa$ がいえれば十分である．そこで，仮りに $\rho < \kappa$，$\tau_\rho \geq \kappa$ となるような ρ が存在するとして，その最小数を ρ_0 としよう．すなわち，$\rho < \rho_0 \Rightarrow \tau_\rho < \kappa$．$\kappa$ は recursively regular であるから，

κ は τ_{ρ_0} の定義における [ ] の中を満たし，結果として $\tau_{\rho_0} \leq \kappa$. 仮定 $\tau_{\rho_0} \geq \kappa$ とから，$\tau_{\rho_0} = \kappa < \lambda$ となり，$F_\lambda(\rho_0)$ が defined. したがって上述のことより，$\tau_{\rho_0} < \kappa$ となって仮定に反する。

系 5.3 Recursively inaccessible ordinals の最小数は最初の stable ordinal より小さい ordinal である。

（証明） τ'_ρ を ρ-th recursively inaccessible ordinal:

$$\tau'_\rho = \text{least } \sigma \left[\tau_\sigma = \sigma \wedge \forall \pi < \rho \, (\tau'_\pi < \sigma) \right]$$

としよう. 補題 5.1 を用い，また同様の理由から，τ'_ρ は ρ の関数として ∞-recursive である. δ'_2 は stable だから，δ'_2 は ∞-partial recursive function に関して閉じており，したがって，とくに $\tau'_0 < \delta'_2$.

最後に，recursively inaccessible ordinal の特性づけ，及び筆者によって導入された type 2 の対象 E_1 に関する諸性質のうち，きわだった特性をこれに関連して一つ揚げて本稿を終ることとしたい。

定理 5.4 κ が recursively inaccessible であるための必要かつ十分條件は，κ が recursively regular であってかつ recursively regular ordinals の limit となることである.

（証明） まず，κ を recursively inaccessible，すなわち，$\kappa = \tau_\kappa$ としよう. κ は recursively regular であり，

さらに，任意の $\sigma<\kappa$ に対して，$\sigma\leq\tau_\sigma<\tau_\kappa=\kappa$ であるから，κ は recursively regular ordinals の limit number である。

逆に，κ を recursively regular で，recursively regular ordinals の limit であるとしよう。いま，κ が recursively inaccessible でない，すなわち $\kappa<\tau_\kappa$ と仮定してみよう。τ_ρ は increasing sequence であるから，ある $\rho<\kappa$ が存在して $\kappa=\tau_\rho$ 。κ は κ より小さな recursively regular ordinals の limit であるから，$\kappa=\sup_{\pi<\rho}\tau_\pi$ をうる。Sequence $\{\tau_\pi\}_{\pi<\rho}$ は κ-recursive であるから，このことは κ の recursively regularity に反する。

<u>定理 5.5</u>　最初の recursively inaccessible ordinal は $\omega_1[\mathbb{E}_1]$ である。

（証明）$\mathbb{E}^{sJ}$ と $\mathbb{E}_1$ とはたがいに'recursive in'の関係にあり，任意の $\mathbb{F}$ に対して，$Om[\mathbb{F}^{sJ}]\subseteq Lim(Om[\mathbb{F}])$ が成り立つこと，Om の定義及び上の定理 5.4 とから

$$\begin{aligned}\omega_1[\mathbb{E}_1]\in Om[\mathbb{E}_1]&\subseteq Lim(Om[\mathbb{E}])\\&\subseteq Lim\{\kappa\mid\kappa \text{ is recursively regular}\}\\&\subseteq\{\kappa\mid\kappa\text{ is recursively inaccessible}\}\end{aligned}$$

がいえる。

つぎに，$\omega_1[\mathbb{E}_1]$ が recursively inaccessible ordinals の

うちで最小のものであることをみるため，勝手に *recursively inaccessible ordinal* κ をとろう．定理5.4より

$$\kappa \in \mathrm{Lim}\{\lambda \mid \lambda \text{ is recursively regular}\}.$$

各 $\lambda > \omega$ に対して，'$\mathbb{E}$ is λ-effective with index d' となるような index d が存在するから，

$$\mathrm{Lim}\{\lambda \mid \lambda \text{ is recursively regular}\} \subseteq \mathrm{Lim}(\mathrm{Ef}_d[\mathbb{E}])$$

がいえ，さらに補題3.3により，$\mathrm{Lim}(\mathrm{Ef}_d[\mathbb{E}]) \subseteq \mathrm{Ef}_{d'}[\mathbb{E}_1]$ となるような index d' が存在する．以上によって，index d' が存在して，$\kappa \in \mathrm{Ef}_{d'}[\mathbb{E}_1]$ となることがわかった．したがって，$\mathbb{E}_1$ は κ-effective であり，系2.7を用いて，$\omega_1[\mathbb{E}_1] \leq \kappa$ が結論される．

References

[1] M. Fukuyama, Some concepts of recursiveness on admissible ordinals, J. Math. Soc. Japan, 23(1971), pp. 435-451.

[2] P. J. Hinman, Recursion-theoretic Hierarchies, Springer-Verlag, 1978.

[3] A. S. Kechris-Y. N. Moschovakis, Recursion in higher types, Handbook of mathematical logic, C. 6, North-Holland Publishing Co., 1977.

[4] S. C. Kleene, Recursive functionals and quantifiers of finite type I, Trans. Am. Math. Soc., 91(1959), pp1-52.

[5] S. C. Kleene, Recursive functionals and quantifiers of finite type II, Trans. Am. Math. Soc., 108(1963),pp. 106-142.

[6] G. Kreisel, Some reasons for generalizing recursion theory, in : Gandy and Yates(1971), pp.139-198.

[7] J. Shinoda, On the Upper semi-lattice 0f J_a^S-degrees, to

appear in Nagoya Math. J.

[8] R. A. Shore, α-recursion theory, in:Handbook of mathematical logic, 1977.

[9] G. Takeuti, Construction of the set theory from the theory of ordinal numbers, J. Math. Soc. Japan, 6(1954), pp.196-220.

[10] G. Takeuti, On the theory of ordinal numbers J. Math. Soc. Japan, 9(1957), pp.93-113.

[11] G. Takeuti, On the recursive functions of ordinal numbers, J. Math. Soc. Japan, 12(1960), pp.119-128.

[12] G. Takeuti, A formalization of the theory of ordinal numbers, J. Symbolic Logic, 30(1965), pp.295-317.

[13] T. Tugué, Predicates recursive in a type-2 object and Kleene Hierarchies, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 8(1960),pp.97-117.

[14] T. Tugué, On the partial recursive functions of ordinal numbers, J. Math. Soc. Japan, 16(1964) pp.1-31.