数理解析研究所講究録
第362巻 1979年 75-91

集合論 Z_y の Topos への Interpretation

九大工学部　倉田令二朗

0. はじめに

1° Topos において高階直観主義論理を展開できるというよく知られた結論を、Mitchel Bénabou Language とその internal interpretation という形で §1〜§3 で与える。若干異なるやり方（たとえば竹内「層，圏，トポス」）もあるが本質的に同じである。

2° transitive set object (§5) による古典的集合論 Z_y の Well pointed Topos における解釈は G. Osius の論文（J. Pure and Applied Alg. 4 (1974) 79-119）によって与えられた。

3° §4 で述べる結果も G. Osius の結果（Cahiers top et géom. diff. XV (1974) 157-180）であるが今回はとり上げない。

4° 本論は直観主義的集合論 Z_y の一般の Topos における解釈を与えようとするもので、internal external の混合型である

5° ここでいう Z_y とは extensionality, pair, sum, power restricted separation および変形された regularity をもつ系で付加的に A.T (axiom of transitivity) のもとで考察される。

1. Mitchel Bénabou Language

$\mathcal{E}$を与えられたelementary Toposとするとき、次のLanguageを定める。

1.1 type： $\mathcal{E}$のobjectの各は一つのtypeである。

type $X_1, X_2, \cdots, X_n$に対し、type $(X_1, \cdots, X_n)$には$\mathcal{E}$のobject $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$が対応し、type $[X_1, \cdots, X_n]$には$\mathcal{E}$のobject $P(X_1 \times \cdots \times X_n) = \Omega^{X_1 \times \cdots \times X_n}$が対応する。

1.2 function。$\mathcal{E}$のmap $f: X \to Y$の各は一つのfunction symbolである

1.3 equality membership relation (Predicate)

$* =_A *$ 　両辺ともtype Aが入る

$* \in_A *$ 　左辺がtype A，右辺がtype Ω^A

1.1〜1.3と、各type Xごとに与えられた可算個のtype Xのvariable $x, x', x'', \cdots$を用いて周知のように

type Xのterm, formula, abstraction $\{x \mid \phi(x)\}$ —ϕはformula— が定義される。

2. internal interpretation

1で定義されたterm, formulaに対し、次の条件をみたすように$\mathcal{E}$のmapを対応させる

tがtype $U_1, \cdots, U_n$の異なるvariable $u_1, \cdots, u_n$をもつ —— $U_1, \cdots, U_n$には同じものがあってもよい —— Type Aのterm

のとき、t に次の形の $\mathcal{E}$ の map $|t|$ を対応させる。

$$|t|: \prod_{i=1}^{n} U_i \longrightarrow A$$

formula は type Ω の term とみなされる。

具体的には次に定義する通りである。

2.1 <u>term の interpretation</u>

a) x を type X の variable とするとき、

$$|x| : X \xrightarrow{1_X} X.$$

b) t が type X の term, f が function $X \xrightarrow{f} Y$ のとき、

$|t|: \prod_{i=1}^{n} U_i \rightarrow X$ とするとき、$|f(t)|$ は

$$|f(t)| : \prod_{i=1}^{n} U_i \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$$

c) 1 では略したが τ が type X の term, σ が type Y の term のとき、順序対 $\langle \tau, \sigma \rangle$ は type $X \times Y$ の term とされる。

さて τ が type $U_1, \cdots, U_n$ の相異なる variable $u_1, \cdots, u_n$ をもつ type X の term であり、σ が type $V_1, \cdots, V_m$ の相異なる variable $v_1, \cdots, v_m$ をもつ type Y の term で

$$|\tau|; \prod_{i=1}^{n} U_i \rightarrow X, \qquad |\sigma|: \prod_{i=1}^{m} V_i \rightarrow Y$$

とする。そのとき variable $u_1, \cdots, u_n$ $v_1, \cdots, v_m$ の相異なる variable を $(w_1, \cdots, w_p)$ とするとき $|\langle \tau, \sigma \rangle|$ は

$$|\langle \tau, \sigma \rangle| : \prod_{j=1}^{p} W_j \longrightarrow X \times Y$$

である。ただし 上の map は $\prod_{j=1}^{p} W_j \xrightarrow{\pi} \prod_{i=1}^{n} U_i \xrightarrow{|\tau|} X$ と、$\prod_{j=1}^{p} W_j \xrightarrow{\pi'} \prod_{i=1}^{m} V_i \xrightarrow{|\sigma|} Y$ の product。ここに W_j は variable w_j の type

3

π, π' は natural projection である.

2.2. formula の interpretation (abstraction)

a) $\sigma =_X \tau$ 　　σ, τ を type X の term とするとき

$$|\sigma =_X \tau| = \delta_X(|\langle\sigma,\tau\rangle|) \ : U\times V \longrightarrow \Omega$$

によって定義する. ただし $|\sigma| : U \to X$, $|\tau| : V \to X$ とし.

δ_X は下の図で定まる Kronecker の δ-map である

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \longrightarrow & 1 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \Delta=\langle 1,1\rangle} & & \big\downarrow{\scriptstyle t} \quad \text{pull back} \\ U\times V & \xrightarrow{|\langle\sigma,\tau\rangle|} & X\times X & \xrightarrow{\delta_X} & \Omega \end{array}$$

b) $\sigma \in_X \tau$ 　　σ は type X, τ は type Ω^X の term

$$|\sigma \in_X \tau| = ev_X(|\langle\sigma,\tau\rangle|)$$

によって $|\sigma\in_X\tau|$ を定める. ただし $|\sigma| : U \to X$, $|\tau| : V \to \Omega^X$

とし ev_X は evaluation map : $X\times\Omega^X \xrightarrow{ev_X} \Omega$ である.

すなわち　$U\times V \xrightarrow{|\langle\sigma,\tau\rangle|} X\times\Omega^X \xrightarrow{ev_X} \Omega$

c) Ω は map $\wedge, \vee, \rightarrow : \Omega\times\Omega \to \Omega$ と map $\neg : \Omega \to \Omega$ によって internal Heyting algebra になることに注意しよう.

formula φ, ψ に対して $|\varphi| : U \to \Omega$, $|\psi| : V \to \Omega$ が定まったとき, $|\varphi\wedge\psi| = \wedge\circ|\langle\varphi,\psi\rangle| ; U\times V \xrightarrow{|\langle\varphi,\psi\rangle|} \Omega\times\Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$

によって定める. $\vee$, $\rightarrow$ に関しても同様, また

$$|\neg\varphi| = \neg|\varphi| \ : \ U \xrightarrow{|\varphi|} \Omega \xrightarrow{\neg} \Omega$$

d) $\underline{\forall x\varphi(x)}$, $\underline{\exists x\varphi(x)}$, $\underline{\{x \mid \varphi(x)\}}$

$|\phi|_x : X \times \prod U_i \longrightarrow \Omega$ とする。X は variable x の type.

$$X \times \prod U_i \xrightarrow{f} \prod U_i \quad とおく。$$

map $|\phi(x)| = |\phi|$ に対応する $X \times \prod U_i$ の subobject を $\|\phi\|$ と書けば

Functor $\forall_f : Sub(X \times \prod U_i) \to Sub(\prod U_i)$ (f^{-1} の right adjoint)

〃 $\exists_f : Sub(X \times \prod U_i) \to Sub(\prod U_i)$ (f^{-1} の left adjoint)

によって $\prod U_i$ の subobject $\forall_f \|\phi\|$, $\exists_f \|\phi\|$ が定まるが

その characteristic map $\prod U_i \longrightarrow \Omega$ をそれぞれ $|\forall x \phi(x)|$,

$|\exists x \phi(x)|$ として定める

$$|\{x | \phi(x)\}| = |\hat{\phi}| : \prod U_i \longrightarrow \Omega^X$$

$\{x | \phi(x)\}$ は type Ω^X の term であるが $|\{x | \phi(x)\}|$ は

$|\phi| : X \times \prod U_i \to \Omega$ の exponential conjugate $\prod U_i \xrightarrow{|\hat{\phi}|} \Omega^X$ として定義するのである。

3. <u>formula valid in $\mathcal{E}$</u>

formula ϕ に対する map $|\phi| : \prod U_i \longrightarrow \Omega$ に対し

$$\prod U_i \to \Omega = \prod U_i \longrightarrow 1 \xrightarrow{t} \Omega$$

のとき、formula ϕ は valid in $\mathcal{E}$ といい、$\mathcal{E} \models \phi$ と書く。

1 で定義した Language $L(\mathcal{E})$ に関する高階直観主義論理によって証明可能な formula はすべて $\mathcal{E}$ で valid である。

3.1. intuitionistic propositional calculus の axiom となる formula は valid in $\mathcal{E}$ である。

3.2. $\varphi(\tau) \longrightarrow \exists x \varphi(x)$, $\forall x \varphi(x) \to \varphi(\tau)$ は valid in $\mathcal{E}$.

(τ は term で τ と x は同じ type をもつ)

3.3. $\dfrac{\psi \to \varphi(x)}{\psi \to \forall x \varphi(x)}$ $\dfrac{\varphi(x) \to \psi}{\exists x \varphi(x) \to \psi}$ (ψ は variable x をもたない)

restricted modus ponens $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$ (φ の variables はすべて ψ の variables)

において上式が valid in $\mathcal{E}$ なら下式も valid in $\mathcal{E}$ である

3.4. extensionality は valid in $\mathcal{E}$

$$\forall x (x \in Y_1 \leftrightarrow x \in Y_2) \leftrightarrow Y_1 =_{\Omega^X} Y_2$$

x は variable of type X, Y_1, Y_2 は variable of type Ω^X.

3.5 equality axiom is valid in $\mathcal{E}$

$$x =_X x' \wedge x' =_X x'' \to x =_X x''$$

$$x =_X x' \to (x \in_X y \to x' \in_X y)$$

3.6. comprehension axiom is valid

formula ϕ に対し $x \in_X \{x \mid \phi(x)\} \leftrightarrow \phi(x)$

例) 3.6.1. pair $\{x, y\} = \{z \mid z = x \vee z = y\}$

x, y, z は同じ type X の variable $|\{x,y\}| : X \times X \to \Omega^X$

3.6.2 sum $S(x) = \{z \mid \exists y (z \in y \wedge y \in x\}$

x は type Ω^{Ω^X}, y は type Ω^X z は type X, $|S(x)| : \Omega^{\Omega^X} \to \Omega^X$

3.6.3 power $\mathbb{P}(x) = \{z \mid z \subset_X x\}$

x は type Ω^X, z も同じ. $|\mathbb{P}(x)| : \Omega^X \to \Omega^{\Omega^X}$

4. External interpretation in Well-opened Topos.

4.1. Well-opened Topos

Topos $\mathcal{E}$ の object U が open とは 1 の subobject $U \rightarrowtail 1$ のことである。これはまた任意の object A に対し map: $A \to U$ が高々1つであることと同値である。

well opened Topos とは open object の全体が generator をつくるような Topos のことである。すなわち任意の2つの map $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ $f \neq g$ に対して、open object U と $U \xrightarrow{h} A$ が存在して

$$U \xrightarrow{h} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$ がことなる $(f \cdot h \neq g \cdot h)$ ことである。

<u>Example</u> of well opened topos

$\mathcal{E}$ well opened, A が object $\Longrightarrow$ $\mathcal{E}/A$; well opened.

$\mathcal{E}$ well opened $\Omega \xrightarrow{J} \Omega$ が topology $\Longrightarrow$ $Sh_J(\mathcal{E})$; well opened.

A partially ordered set $\Longrightarrow$ Set^A well opened

とくに H を cHa とするとき H 上の category of presheaf $\hat{H}$ category of sheaves $H^{\sim}$ および $V^{(H)}$ はいずれも well opened である

Well-opened topos においては $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ の formula には 2 とおりのやり方で external Heyting algebra Sub(1) の値を与えることができる。

4.2. A-element

A を object とし、$N \rightarrowtail A$ とする。(あるいはその characteristic map と同一視して $A \xrightarrow{N} \Omega$ と書く)。

A element とは $1 \xrightarrow{a} \tilde{A}$ あるいはこれと一対一に対応する $U \xrightarrow{u} A$ (U: open) の形の map をいう ($\tilde{A}$ は partial map classifier)

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.b}"] & A \arrow[d, "\eta_A"] \\ 1 \arrow[r, "a"] & \tilde{A} \end{tikzcd}$$

このとき

$|u \in N|_e : N \wedge U \rightarrowtail A \quad (N \wedge U \subset 1)$

($u = \bar{a}$ と書く.)

$u : U \to A$, $v : V \to A$ を 2つの A-element とするとき

$|u = v|_e : U \wedge V \rightarrowtail A \quad (U \wedge V \subset 1)$

2つの A-element $u_1 : U_1 \to A$, $u_2 : U_2 \to A$ に対し

$|\langle u_1, u_2 \rangle|_e : U_1 \times U_2 \to A \times A \quad (U_1 \times U_2 \subset 1)$

と定義する.

4.3. formula の external interpretation

$\phi(x_1, \cdots, x_n)$ を formula, $x_1, \cdots x_n$ を type $A_1, \cdots, A_n$ の variables とする $|\phi| : A_1 \times \cdots \times A_n \to \Omega$, それに対応する $A_1 \times \cdots \times A_n$ の sub object を $\|\phi\|$ と書く.

$a_i : 1 \to \tilde{A}_i \ (\bar{a}_i : U \to A_i)$ に対し

$$|\phi(a_1, \cdots, a_n)|_e = |\langle a_1, \cdots, a_n \rangle|_e \wedge \|\phi\| \rightarrowtail A_1 \times \cdots \times A_n$$
$$= |\langle a_1, \cdots, a_n \rangle \in |\phi||_e$$

と定める. さらに

1°. $|\neg \phi(a_1, \cdots, a_n)|_e = |\langle a_1, \cdots, a_n \rangle|_e \wedge \neg |\phi(a_1, \cdots, a_n)|_e$

2°. $|\phi(a_1, \cdots, a_n) \wedge \psi(b_1, \cdots, b_m)|_e$

$$= |\langle a_1 \cdots a_n\, b_1, \cdots, b_m \rangle|_e \wedge |\phi(a_1 \cdots a_n)|_e \wedge |\psi(b_1, \cdots, b_m)|_e$$

ここで右辺の $\wedge$ は $\mathrm{Sub}(1)$ の演算である

3° $|\exists x\, \phi(x, a_1, \cdots, a_n)|_e$

$$= |\langle a_1, \cdots, a_n\rangle|_e \wedge \underset{a:A\text{element}}{\mathrm{Sup}} \left(|a| \wedge |\Phi(a, a_1, \cdots, a_n)|_e \right)$$

$|\forall x \Phi(x, a_1, \cdots, a_n)|_e$

$$= |\langle a_1, \cdots, a_n\rangle|_e \to \underset{a:A\text{element}}{\mathrm{Inf}} \left(|a| \to |\Phi(a, a_1, \cdots, a_n)|_e \right)$$

すべての A-element a_i に対して

$$|\Phi(a_1, \cdots, a_n)|_e = |\langle a_1, \cdots, a_n\rangle|_e$$

のとき Φ は external valid と呼ばれる.

external valid $\Longleftrightarrow$ internal valid (G. Osius)

がいえる.

5. transitive set object of a Topos

Topos $\mathcal{E}$ の map $r : A \to PA$ は A 上の relation と同一視される.

relation r が extensional とは r が mono のこと

r が recursive とは

任意の $PB \xrightarrow{g} B$ に対し、次のような $A \xrightarrow{f} B$ が唯一つ存在する.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \\ PA \arrow[r, "Pf"] & PB \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

が可換. ここに P は次のような Functor である

$N \rightarrowtail A$ の exponential conjugate を $1 \xrightarrow{\ulcorner N \urcorner} PA$ と

charac map $A \xrightarrow{N} \Omega$ の

するとき $1 \xrightarrow{\ulcorner N \urcorner} PA \xrightarrow{Pf} PB$ は image $f(N)$ $(= \exists_f(N))$

に対する $\ulcorner f(N) \urcorner$ をあらわす.

r が transitive set object とは extensional recursive r のこと.

inclusion relation $A \xrightarrow{r} PA$, $B \xrightarrow{s} PB$ に対し

$A \xrightarrow{f} B$ ($r \xrightarrow{f} s$) が inclusion であるとは

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[d, "s"] \\ PA \arrow[r, "Pf"] & PB \end{tikzcd}$$

が可換であること.

inclusion が存在するとき $r \subset s$ と書く

<u>Theorem</u> (Osius)

1° $A \xrightarrow{r} PA$, $B \xrightarrow{s} PB$ を tr-set-objects とするとき.

(a) inclusion $r \to s$ は存在すれば、mono であり唯一つである. これを $in(r, s)$ と書く.

(b) $r \subset s$, $s \subset r \iff r \cong s$ ($A \cong B$)

2° relation $A \xrightarrow{r} pA$, $B \xrightarrow{s} PB$ と inclusion $s \xrightarrow{i} r$ があるとき.

(a) r が wellfounded $\Longrightarrow$ s も well founded

(b) i が mono のとき、r が tr-set object $\Longrightarrow$ s も tr-set object

[注] $A \xrightarrow{r} PA$ が <u>well founded</u> とは 任意の $N \rightarrowtail A$ に対し

$$\cancel{r^{-1}[PN} \quad r^{-1}(P(N)) \subset N \Rightarrow N = A$$

が成立つことである

classical set theory のもとでは well founded $\iff$ tr-set object

3° (a) tr-set object は well-founded である

(b) $A \xrightarrow{r} PA$ が well founded ならば ~~再~~任意の $PB \xrightarrow{g} B$ に対し. 下図が可換となるような f が高々一つある.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & B \\ PA \arrow[r, "Pf"] & PB \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

10

4° 任意の2つの tr-set object $A \xrightarrow{r} PA$, $B \xrightarrow{s} PB$ に対し、tr-set object $A \wedge B \xrightarrow{r \wedge s} P(A \cap B)$, $A \cup B \xrightarrow{r \cup s} P(A \cup B)$ が存在して inclusion に関して inf. sup となる。

すなわち、$r \wedge s \subset r, s$, $t \subset r, t \subset s \Rightarrow t \subset r \wedge s$

$r, s \subset r \cup s$, $r \subset t, s \subset t \Rightarrow r \cup s \subset t$

(注) この $\cup, \wedge$ はある object の subobject のつくる Heyting algebra $Sub(X)$ における $\cup, \wedge$ とはさしあたり何の関係もない。

6. Model of Z_y in a Topos (準備)

6.1 atomic formula of Z_y

以下では $X \rightarrowtail^{a} A$ ($A \xrightarrow{r} PA$ は tr-set object) の形の map を考える

$X \overset{a}{\rightarrowtail} A$ ($A \xrightarrow{r} PA$ は tr-set-object), $Y \overset{b}{\rightarrowtail} B$ ($B \xrightarrow{s} PB$ は tr-set object) に対し $t = r \cup s : C \to PC$ を考え $in(r, r \cup s) = i$ $in(s, r \cup s) = j$ とおく そのとき $|a = b|$, $|a \in b|$ を次のように定義する

$|a = b| : X \times Y \overset{a \times b}{\rightarrowtail} A \times B \overset{i \times j}{\rightarrowtail} C \times C \xrightarrow{\delta_C} C$

$|a \in b| ; X \times Y \overset{a \times b}{\rightarrowtail} A \times B \overset{i \times j}{\rightarrowtail} C \times C \overset{1 \times t}{\rightarrowtail} C \times PC \xrightarrow{ev_C} \Omega$

2で定義した internal interpretation を $|\ \ |_i$ と書けば

$$|a = b| = |i a(x) =_C j b(y)|_i$$

$$|a \in b| = |i a(x) \in_C t \cdot j \cdot b(y)|_i$$

6.2 <u>extensionality</u>

$X \overset{a}{\rightarrowtail} A$ (tr-set object) $Y \overset{b}{\rightarrowtail} B$ (同) に対し、$\mathcal{E} \models \forall c\, (c \in a \leftrightarrow c \in b) \leftrightarrow a = b$ c は type C の variable

11

ただし $c\in a$, $c\in b$ $a=b$ の interpretation は 6.1 によるものとし $\leftrightarrow$ $\forall c$ の interpretation は 2 によるという意味でである.(以下同様)

3.4 において $X=C$ とし Y_1, Y_2 に $t\cdot i\cdot a(x)$, $t\cdot j\cdot b(y)$ を代入すれば(3.2 を用いて)

$$\mathcal{E}\models\forall c(c\in t\cdot i\cdot a(x)\longleftrightarrow c\in t\cdot j\cdot b(y))\longleftrightarrow t\cdot i\cdot a(x)\underset{PC}{=}t\cdot j\cdot b(y)$$

しかるに t が mono であることを用い、右辺は $\mathcal{E}$ の map として $|i\cdot a(x)\underset{C}{=}j\,b(y)|_i$ に等しいことがわかる

6.3 equality

$\mathcal{E}\models a=b\wedge b=c\rightarrow a=c$

$X\overset{a}{\rightarrowtail}A\,(A\overset{r}{\rightarrow}PA$ tr-set object$)$, $Y\overset{b}{\rightarrowtail}B\,(B\overset{s}{\rightarrow}PB$ tr-set object$)$
$Z\overset{c}{\rightarrowtail}C\,(C\overset{t}{\rightarrow}PC$, tr-set object$)$

$(r\cup s)\cup t=r\cup(s\cup t)=(r\cup t)\cup s$ および inclusion の一意性 mono に関する 6.2 の最後に述べた性質を用いる.(いったん $r\cup s\cup t$ に移して 3.5 を用いる) 同様にして

$\mathcal{E}\models\ a=b\rightarrow(a\in c\rightarrow b\in c)$

6.4 pair a,b i,j は 6.1 通りとし.

3.6.1 における type X の variable x,y に対する $\{x,y\}$ を $\{x,y\}_X$ と書く. $|\{x,y\}_X|_i: X\times X\longrightarrow\Omega^X=PX$.

$|\{a,b\}|=|\{i\cdot a(x),\ j\,b(y)\}|_i$ とおけば

$\mathcal{E}\models\forall c\,(c\in\{a,b\}\longleftrightarrow c=a\vee c=b)$ c は type C の variable

なぜなら $\mathcal{E}\models\forall c\,(c\in\{i\cdot a(x),\ j\,b(y)\}\longleftrightarrow c\underset{C}{=}i\cdot a(x)\vee c\underset{C}{=}j\cdot b(y))$

しかるに $|c \underset{C}{=} i\cdot a(x)|_i = |c = a|$, $|c \underset{C}{=} j\cdot b(y)|_i = |c = b|$

6.5 <u>sum</u> $\bigcup_X(y) = \{x \mid \exists z (x \in z \wedge z \in y)\}$ y は variable of type PPX

$|\bigcup_X|_i = |\bigcup_X(y)|_i : PPX \to PX$

そのとき $X \rightarrowtail^{a} A$ ($A \xrightarrow{r} PA$ tr-set-object) に対し、

$|\bigcup(a)| = \bigcup_A(pr\cdot r\cdot a(x))$

$; \; X \overset{a}{\rightarrowtail} A \xrightarrow{r} PA \xrightarrow{pr} PPA \xrightarrow{|\bigcup_A|_i} PA$ とおく。

そのときは

$$\mathcal{E} \vdash \forall a (a \in \bigcup(a) \longleftrightarrow \exists z (a \in z \wedge z \in a))$$

ここに a は type A の、z は type PA の variable

注) $A \xrightarrow{r} PA$ が tr-set object ならば $PA \xrightarrow{pr} PPA$ も tr-set-object である。

6.6 <u>power</u> y が type PX の variable のとき

$\mathbb{P}_X(y) = \{z \mid z \subset_X y\}$

$|\mathbb{P}_X|_i = |\mathbb{P}_X(\cancel{y})|_i : PX \to PPX$ とし、

$X \overset{a}{\rightarrowtail} A$ ($A \xrightarrow{r} PA$; tr-set object) に対し

$|\mathbb{P}(a)| = |\mathbb{P}_A(r\cdot a(x))|_i : X \overset{a}{\rightarrowtail} A \xrightarrow{r} PA \xrightarrow{|\mathbb{P}_A|} PPA$

とおけば $\mathcal{E} \vdash \forall z (z \in \mathbb{P}(a) \longleftrightarrow z \subset a)$ z は var. of type PA

注) $y_1 \subset_X y_2$ (y_1, y_2 は type PX) は $\forall x (x \in_X y_1 \to x \in_X y_2)$ と同一視してよいし、また $|y_1 \subset_X y_2|_i : PX \times PX \to \Omega$ を直接に定義することもできる。あとの場合は 6.1 と同じ記号で

$|a \subset b| = |t\cdot i\, a(x) \subset_C t\cdot j\cdot b(y)|_i$ である

7. Model (Interpretation) of Z_y in a Topos (結論)

7.1 基本方針 Z_y の formula は"集合"をあらわす variable $a, b, c \cdots$ と atomic formula $a \in b$, $a = b$ から出発して論理記号(ふつうの quantifier の他に、これと区別された bounded quantifier $\forall x(x \in a)$ $\exists x(x \in a)$ —a は set— がある)を用いて構成される。

Z_y の formula の $\mathcal{E}$ における interpretation は

⓪ set-variable は $X \overset{a}{\rightarrowtail} A$ (A tr-set object)— この形のものを set-object という— すなわち $\mathcal{E}$ のある tr-set-object の subobject を動くものとする(あるいは constant $\underline{a}$ の全体を考えてもよい)

① atomic formula $a \in b$, $a = b$ に対しては $|a \in b|$, $|a = b| : X \times Y \to \Omega$ を 6.1 によって定める。

② formula φ, ψ に対して interpretation $|\varphi|, |\psi|$ が定まったとき、$|\varphi \wedge \psi|$ や $|\neg \varphi|$ は 2.2.(c) と同じように定める。

③ $\forall x(x \in a)\psi(x)$ $\exists x(x \in a)\psi(x)$ に対しては a に対し、ある type A を、すなわち $\mathcal{E}$ の object A を対応させ 2.2(d) にしたがって $|\forall x \in a \psi(x)| = |\forall X \psi(X)|$ に、$|\exists x(x \in a)\psi(x)| = |\exists X \psi(X)|$ に によって定める。ここに X は type A の variable.

④ non bounded quantifier をもつ $\forall a \psi(a)$, $\exists a \psi(a)$ に対しては $|\forall a \psi(a)|$, $|\exists a \psi(a)|$ は定義されない。

しかし $\mathcal{E} \models \forall a \psi(a)$, $\mathcal{E} \models \exists a \psi(a)$ は定義される

すなわち任意の a に対して $\mathcal{E} \models \psi(a)$, ないしは あるaが存在して $\mathcal{E} \models \psi(a)$ となることとして。

⑤ Axiom の追加. 上のような interpretation が可能になるように Z_y に Axiom of transitivity を追加する

A.T $\forall a \exists b\,(a \subset b \wedge b$ is transitive set $)$

あるいは各 a に対し $a \subset \tilde{a}$ となる transitive set $\tilde{a}$ の対応が与えられているとしてもよい.

b is transitive とは $x \in b \wedge y \in x \to y \in b$ のことである. このとき 単射 $b \xrightarrow{r} Pb$ が存在する.

これを用いて以下のように Z_y の公理を書き変える.
これらは A.T のもとではもとの公理と同値である.

7.2 extensionality pair power sum

$$\forall a \forall b \forall x (x \in \widetilde{(a,b)})(x \in a \longleftrightarrow x \in b) \longleftrightarrow a = b$$

有限個の set $a_1, \cdots a_n$ をふくむ transitive set を $\widetilde{(a_1, \cdots a_n)}$ または $(a_1, \cdots, a_n)^\sim$ であらわす.

6.1 によってこれは $\mathcal{E}$ において真となる

equality axiom 6.3 は問題ない.

pair $\forall a \forall b \exists c\ \forall x (x \in \widetilde{(a,b)})(x \in c \longleftrightarrow x = a \vee x = b)$

sum $\forall a \exists c \forall x (x \in \tilde{a})(x \in c \longleftrightarrow \exists z (z \in P(\tilde{a}))(x \in z \wedge z \in a))$

power $\forall a \exists c \forall z (z \in P(\tilde{a}))(z \in c \longleftrightarrow z \subset a)$

§6によってこれらは $\mathcal{E}$ において真である

注1) $\forall a(a\in b \to a\in b') \to b\subset b'$
は $\mathcal{E}$ で真ではない.

注2) x を type A の variable とし, $A \xrightarrow{1_A} A$ に対応する
$1 \xrightarrow{\ulcorner a\urcorner} PA$ を考える ($A \xrightarrow{t_A} \Omega = A\to 1 \xrightarrow{t} \Omega$ の exponential conjugate)
そのとき $\forall x(x\in\ulcorner a\urcorner)\psi(x) \leftrightarrow \forall x\psi(x)$, $\exists x(x\in\ulcorner a\urcorner)\psi(x)\leftrightarrow\exists x\psi(x)$
は $\mathcal{E}$ で真である.

注3) power や sum の公理における C は $\mathcal{E}$ の set object であることを示さねばならない.

注4) set object $X \overset{a}{\rightarrowtail} A$ のかわりに $1\xrightarrow{\ulcorner a\urcorner} PA$ を考え,
6.5, 6.6 のかわりに $1 \xrightarrow{\ulcorner a\urcorner} PA \xrightarrow{Pr} PPA \xrightarrow{|\cup|} PA$, $1 \xrightarrow{\ulcorner a\urcorner} PA \xrightarrow{|P|} PPA$
をとってもよい. そのときは $\bigcup(\ulcorner a\urcorner)$ が set object になることは
自明となる. $1\xrightarrow{\ulcorner a\urcorner} PA \xrightarrow{Pr} PPA$ は r による X の image $r[x]$:
$X \rightarrowtail A \rightarrowtail PA$ に対する $\ulcorner r[x]\urcorner$ である (functor P の性質!)

7.3 restricted separation

高階直観論理の comprehension axiom を用いるが, Z_η は finitely axiomatizable であるから各 axiom を上記のように書きかえたうえ解釈すればよい. 有限個の axiom は $a\times b$ の存在, $a-b$ の存在,
$\{\langle x_1 x_2\rangle \mid \langle x_2 x_1\rangle\in a\}$ の存在. $\{\langle x y\rangle \mid x\in y \wedge y\in a\}$ の存在
$\{y \mid \exists x(\langle y x\rangle\in a)\}$ $\{\langle\langle z x\rangle, y\rangle \mid \langle\langle x y\rangle z\rangle\in a\}$ の存在 である.

7.4. regularity a を transitive set, b を $b\subset a$ とすれば

$$\forall x (x \in a)(x \subset b \rightarrow x \in b) \longrightarrow b = a$$

の形で成立つ.

$$\forall x (r(x) \subset b \rightarrow x \in b) \rightarrow b = a$$

が x : type A の variable $a : 1 \rightarrow PA$ ($A \overset{1}{\rightarrow} A$ に対応) $b : 1 \rightarrow PA$ ($X \rightarrowtail A$ に対応) に対して成立つが $r(x) = x$ とみなされるので上が成立つ.

内容的には Transitive set a 上で超限帰納法が成立つことと同じ。