数理解析研究所講究録
第 362 巻 1979 年 92-105

Sheaves over cHa and the Heyting valued model $V^{(H)}$

九大 工　下田 守

序

Hをある complete Heyting algebra（cHa）とする．竹内らによって紹介された Heyting valued model $V^{(H)}$ は Scott-Solovay の Boolean valued model $V^{(B)}$（Bはある complete Boolean algebra）の拡張であるが，sheaf を意識して作られたことはその定義から明らかであろう．$V^{(H)}$ を category として見るとき，それは（elementary）topos であり，かつ terminal object の subobjects が generators となることが，示される．すなわち，$V^{(H)}$ は，category としては，well-opened topos である［3］．さて，B をある complete Boolean algebra とするとき，B上の sheaves の全体と $V^{(B)}$ とが，category として equivalent であることが，知られている［2］．本稿では，H上の sheaves の全体と $V^{(H)}$ とが，category として equivalent であることを示す．

1. H上の presheaf と sheaf

Def. 1.1. 次の条件をみたす triple $A=\langle A, E, \urcorner\rangle$ をH上の presheaf という： A は set で, $E=E_A: A\to H$ かつ $\urcorner=\urcorner_A: A\times H\to A$ はそれぞれ map で, $\forall a\in A, \forall p, q\in H$ に対し, 1) $a\urcorner Ea=a$, 2) $E(a\urcorner p)=Ea\wedge p$, 3) $(a\urcorner p)\urcorner q=a\urcorner(p\wedge q)$ をみたす. H上の presheaves $A=\langle A, E, \urcorner\rangle$, $B=\langle B, E, \urcorner\rangle$ に対し, map $f: A\to B$ が次の条件：$\forall a\in A\ \forall p\in H$ に対して, 1) $Ef(a)=Ea$, 2) $f(a\urcorner p)=f(a)\wedge p$ をみたすとき, f をH上の presheaves の間の morphism という.

Remark. この定義は, 竹内[4]にあるものを拡張したものである. これによって決まる, H上の presheaves の全体から成る category を Presh(H) とすれば, Presh(H) はHから $\mathcal{S}$ への contravariant functor 全体の作る category $\mathcal{S}^{H^{op}}$ と同型である. ここに, Hは半順序により決まる category ($p\to q \Leftrightarrow p\leq q$) とし, $\mathcal{S}$ は集合全体の category とする.

Def. 1.2. $A=\langle A, E, \urcorner\rangle$ はH上の presheaf で, $a, b\in A$, $C\subseteq A$ とする. $a\urcorner Eb=b\urcorner Ea$ のとき a と b は compatible であるといい, C の任意の二元が compatible なとき C は compatible という.

Def. 1.3. H上の presheaf $A=\langle A, E, \urcorner\rangle$ が次の条件をみたすときH上の sheaf という： 任意の compatible な subset $C\subseteq A$ に対して, 条件 (1) $\forall c\in C\ \ a\urcorner Ec=c$, (2) $Ea=\bigvee_{c\in C} Ec$ をみ

たす $a \in A$ が唯一つ存在する．このとき上の a を $\bigvee C$ と表わす．H上のsheavesをobjectsとするPresh(H)のfull subcategoryをSh(H)と表わす．なお，上の条件で"唯一つ"を"高々一つ"に置き換えた条件が成り立つとき，Aはseparatedである，という．

Remark．この定義におけるseparated presheafおよびsheafの概念は，いわゆるcanonical Grothendieck topologyに対するもので，普通のtopologyにおけるsheafなどの自然な拡張になっている．Sh(H)はGrothendieck toposである．

Def. 1.4. $A = \langle A, E, \urcorner \rangle$ をH上のpresheafとする．$a, b \in A$ に対して，$\| a = b \| = \| a = b \|_A = \bigvee \{ p \leq Ea ; a \urcorner p = b \urcorner p \}$ とする．

Lemma 1.1. $\forall a, b, c \in A, \forall p \in H$ に対して次の式が成り立つ:

$$\| a = b \| \leq Ea \wedge Eb \qquad \| a = a \| = Ea$$

$$\| a = b \| = \| b = a \| \qquad \| a = b \| \wedge \| b = c \| \leq \| a = c \|$$

$$\| a = b \urcorner p \| = \| a = b \| \wedge p$$

Def. 1.5. $A \in Presh(H)$, $a, b \in A$ に対して

$$a \sim b \iff a \sim_A b \iff \| a = b \| = Ea = Eb$$

Lemma 1.2. $\sim$ はE, ┐と両立する同値関係である．すなわち，$\sim_A$ はA上の同値関係で，$\forall a, b \in A$ $\forall p \in H$ に対して，$a \sim b \Rightarrow Ea = Eb \wedge a \urcorner p \sim b \urcorner p$ が成り立つ．

Lemma 1.3. $f : A \longrightarrow B$ がpresheavesのmorphismとする．

$\forall a, a' \in A$ に対し，$\| a = a' \|_A \leq \| f(a) = f(a') \|_B$，$a \sim_A a' \Rightarrow f(a) \sim_B f(a')$.

Lemma 1.4. $A = \langle A, E, \neg \rangle$ が H 上の presheaf のとき，

A が separated $\Longleftrightarrow \forall a, b \in A \ (a \sim b \Leftrightarrow a = b)$

2. Heyting valued model $V^{(H)}$

$V^{(H)}$ の構成は，竹内らによるものと全く同様であるが，命題（正確には $V^{(H)}$ の sentence）に対する Heyting value の与え方が異なるので，後の展開にいくらかの差がある．ここでは，atomic formula として $t = s$，$t \in s$ および Et （t, s は項）をもつ first-order intuitionistic language を考える．Et は，"t が存在する" と読み，existence predicate といわれる［1］．（［4］にも似たような体系がある．）なお，Et が常に真とすれば，普通の一階の直観論理となる．

Def 2.1. 超限帰納法により $V^{(H)}$ を次のように定義する：

$V_0^{(H)} = \phi$，$V_{\alpha+1}^{(H)} = \{ u = \langle u, Eu \rangle ; u : D(u) \to H \ \ D(u) \subseteq V_\alpha^{(H)} \ \forall x \in D(u) \ u(x) \leq Ex \wedge Eu \}$

$V_\beta^{(H)} = \bigcup_{\alpha < \beta} V_\alpha^{(H)}$ （β : limit ordinal） $\quad V^{(H)} = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha^{(H)}$.

Def. 2.2. $V^{(H)}$ の sentence φ に対する Heyting value $\| \varphi \| = \| \varphi \|_{V^{(H)}}$ を，帰納法により次のように定義する．まず，atomic formula に対し，$u, v \in V^{(H)}$ のとき，

$$\| Eu \| = Eu, \quad \| u \in v \| = \bigvee_{y \in D(v)} (v(y) \wedge \| u = y \|)$$

$$\| u = v \| = \bigwedge_{x \in D(u)} (u(x) \to \| x \in v \|) \wedge \bigwedge_{y \in D(v)} (v(y) \to \| y \in u \|) \wedge Eu \wedge Ev.$$

とする．次に atomic でない sentence に対しては帰納的に，

$\|\neg\varphi\| = \neg\|\varphi\|$, $\|\varphi\wedge\psi\| = \|\varphi\|\wedge\|\psi\|$, $\|\varphi\vee\psi\| = \|\varphi\|\vee\|\psi\|$,

$\|\varphi\to\psi\| = \|\varphi\|\to\|\psi\|$, $\|\varphi\leftrightarrow\psi\| = \|\varphi\|\leftrightarrow\|\psi\|$,

$\|\forall x\,\varphi(x)\| = \bigwedge_{u\in V^{(H)}}(Eu\to\|\varphi(u)\|)$, $\|\exists x\,\varphi(x)\| = \bigvee_{u\in V^{(H)}}(Eu\wedge\|\varphi(u)\|)$

と定義する．右辺はいずれも cHa H における演算である．

Remark. $V^{(H)}$ は直観主義的集合論のモデルである．

Def. 2.3. $u, v\in V^{(H)}$ に対して，$u\sim v \Longleftrightarrow \|u=v\| = Eu = Ev$.

Lemma 2.1. $V^{(H)}$ の formula $\varphi(x)$ に対して，

$\forall u, v\in V^{(H)}.\quad u\sim v \Longrightarrow \|\varphi(u)\| = \|\varphi(v)\|$.

Def. 2.4. $u\in V^{(H)}$ が extensional $\Longleftrightarrow \forall x\in D(u)\ \ u(x) = \|x\in u\|$

Def. 2.5. V を集合の universe とする．$(V=\mathcal{S})$ $x\in V$ に対して帰納法により $\check{x}\in V^{(H)}$ を，$D(\check{x}) = \{\check{y}\,;\,y\in x\}$，$E\check{x} = 1$，$\check{x}:\check{y}\mapsto 1$ によって定義する．

Def. 2.6. $u, v\in V^{(H)}$ に対して，$\{u, v\}^H\in V^{(H)}$ を，$D(\{u,v\}^H) = \{u, v\}$, $E\{u,v\}^H = Eu\wedge Ev$, $\{u,v\}^H : x\mapsto Eu\wedge Ev$ によって定義する．また，$\langle u, v\rangle^H = \{\{u,u\}^H, \{u,v\}^H\}^H$ と定義する．

$V^{(H)}$ を category と見るには，$V^{(H)}$ の元全体を objects として，morphisms を適当に決めてやればよいが，ここでは次のように定義する．

Def 2.7. $a, b\in V^{(H)}$ に対し，次の集合 $\hom(a, b)$ の元を a から b への morphism という．$f: a\to b$ は f が a から b への写像で

あることを表現する$V^{(H)}$のformulaであるとする.

$$\mathrm{hom}(a,b) = \{ f \in V^{(H)};\ \| f : a \to b \| = 1,\ f \text{ は extensional},\ Ef = 1,\ D(f) = \{ \langle xy \rangle^H ;\ x \in D(a)\ \ y \in D(b) \} \}$$

$V^{(H)}$をこのようにcategoryと見るとき, well-opened toposであることが示される[3]が, さらに次の性質が確かめられる.

Prop. 2.1. $\forall a, b \in V^{(H)}$ $\forall f \in \mathrm{hom}(a,b)$に対して

1. fが($V^{(H)}$で) mono $\Longleftrightarrow$ $\| f$ は injective $\| = 1$.
2. fが($V^{(H)}$で) epi $\Longleftrightarrow$ $\| f$ は surjective $\| = 1$
3. fが mono かつ epi $\Rightarrow$ fは($V^{(H)}$で) isomorphism.

Prop. 2.2. $\forall a, b \in V^{(H)}$ $a \sim b \Rightarrow a \cong b$

すなわち $a \sim b$ ならば, aとbは($V^{(H)}$のobjectとして)同型である.

3. $V^{(H)}$におけるpresheafとsheaf

Def. 3.1. $u \in V^{(H)}$, $p \in H$に対して, $u \restriction p \in V^{(H)}$を, $D(u \restriction p) = D(u)$, $E(u \restriction p) = Eu \wedge p$, $u \restriction p : x \mapsto u(x) \wedge p$ によって定義する. $A \subseteq V^{(H)}$, $p \in H$に対して, $A \restriction p = \{ a \restriction p ;\ a \in A \}$, $A \restriction H = \bigcup_{p \in H} A \restriction p$ とする. $A \subseteq V^{(H)}$が, $A \restriction H \subseteq A$ をみたすとき Aは$\restriction$-closedであるという.

Lemma 3.1. $\forall u \in V^{(H)}$ $\forall p, q \in H$ に対して,

1) $u \restriction Eu = u$, 2) $E(u \restriction p) = Eu \wedge p$, 3) $(u \restriction p) \restriction q = u \restriction (p \wedge q)$.

よって, $A \subseteq V^{(H)}$が$\restriction$-closedならば$\langle A, E, \restriction \rangle$は$H$上のpresheaf.

実はこのとき, $\langle A, E, \restriction \rangle$はseparatedである.

Lemma 3.2. $\forall u, v \in V^{(H)}\ \forall p \in H$ に対して,

1) $\| u \in v \upharpoonright p \| = \| u \upharpoonright p \in v \| = \| u \in v \| \wedge p$

2) $\| u = v \upharpoonright p \| = \| u = v \| \wedge p$

3) u, v が extensional で $D(u) = D(v)$ ならば,

$$\| u = v \| = \bigvee \{ p \leq Eu \,;\, u \upharpoonright p = v \upharpoonright p \}$$

Def. 3.2. $a, b \in V^{(H)}$ に対して, $a \upharpoonright Eb = b \upharpoonright Ea$ のとき, a と b は compatible であるという. 明らかに, a と b が compatible ならば $D(a) = D(b)$. $C \subseteq V^{(H)}$ の任意の二元が compatible なとき, C は compatible であるという. (なお, $a \upharpoonright Eb \sim b \upharpoonright Ea$ のとき weakly compatible という. これを compatible といい, $a \upharpoonright Eb = b \upharpoonright Ea$ の場合の方を strongly compatible ということもある.)

Prop. 3.1. $C \subseteq V^{(H)}$ が compatible ならば, 次の条件 (1) (2) をみたす $u \in V^{(H)}$ が唯一つ存在する: (1) $\forall c \in C\ u \upharpoonright Ec = c$, (2) $Eu = \bigvee_{c \in C} Ec$

証) u として, $D(u) = \bigcup_{c \in C} D(c) = D(c)\ (c \in C)$, $Eu = \bigvee_{c \in C} Ec$,

$u : x \mapsto \bigvee_{c \in C} c(x)$ と定義すればよい.

Def. 3.3. $C \subseteq V^{(H)}$ が compatible なとき, 上の u を $\bigvee C$ と書く.

Lemma 3.3.

1) $\forall C \subseteq V^{(H)}\ \forall p \in H$ に対して, C が compatible ならば, $C \upharpoonright p$ も compatible で, そのとき $\bigvee (C \upharpoonright p) = (\bigvee C) \upharpoonright p$.

2) $\forall \langle C_i \rangle_{i \in I}$ に対し, $\forall i \in I.\ C_i \subseteq V^{(H)}$ が compatible とする. $B = \{ \bigvee C_i \,;\, i \in I \}$ とおく. すると, B が compatible $\iff \bigcup_{i \in I} C_i$ が compatible で, そのとき

$\vee B = \vee(\bigcup_{i\in I} C_i)$ が成り立つ.

Def. 3.4. $u \in V^{(H)}$ とする.

1) u が $V^{(H)}$ の presheaf $\Longleftrightarrow$ $D(u)$ が $\upharpoonright$-closed

2) u が $V^{(H)}$ の sheaf $\Longleftrightarrow$ u が $V^{(H)}$ の presheaf かつ $\forall C \subseteq D(u)$ に対し C が compatible ならば $\vee C \in D(u)$.

Remark. u が $V^{(H)}$ の presheaf または sheaf であることは, それぞれ $\langle D(u), E, \upharpoonright \rangle$ が H 上の presheaf または sheaf であることと同じことである.

Theorem 1.

任意の $u \in V^{(H)}$ に対して, 次の条件 1) — 3) をみたす $V^{(H)}$ の sheaf v が存在する:

1) $u \sim v$ 2) $\forall x, y \in D(v)$ $D(x) = D(y)$ 3) $\forall x \in D(v)$ x は extensional.

証明)

まず, 各 $x \in D(u)$ に対して, $x_0 \in V^{(H)}$ を, $D(x_0) = \bigcup_{y\in D(u)} D(y)$, $Ex_0 = Ex$, $x_0 : z \longmapsto \| z \in x \|$ によって定義する. 明らかに $x \sim x_0$ である. そこで, $u_0 \in V^{(H)}$ を, $D(u_0) = \{x_0 ; x \in D(u)\}$, $Eu_0 = Eu$, $u_0 : x_0 \longmapsto \| x \in u \|$ によって定義する. Lemma 2.1. より, $u \sim u_0$. よって u_0 は上の条件 1) — 3) をみたす.

次に, $v \in V^{(H)}$ を, $D(v) = \{ \vee C ; C \subseteq D(u_0) \upharpoonright H, C \text{ は compatible} \}$, $Ev = Eu_0$, $v : \vee C \longmapsto \vee \{ u_0(x_0) \wedge p ; (x_0 \upharpoonright p) \in C \}$ によって

定義する．v は well-defined である．Lemma 3.3より，v は $V^{(H)}$ の sheaf である．v が条件 2), 3) をみたすことは明らかであるから，1)をみたすことを示すために $u_0 \sim v$ が成りたつことを証明すればよい．

$$\| u_0 = v \| = \bigwedge_{y \in D(u_0)} (u_0(y) \to \| y \in v \|) \wedge \bigwedge_{z \in D(v)} (v(z) \to \| z \in u_0 \|) \wedge Eu_0 \wedge Ev$$

だから，まず $\forall y \in D(u_0)$ に対し $\{y\} \subseteq D(u_0)$ で $\{y\}$ は compatible，$y = \vee \{y\}$，$v(\vee \{y\}) = u_0(y)$．よって，$u_0(y) = v(y) \leq \| y \in v \|$．すなわち，$\bigwedge_{y \in D(u_0)} (u_0(y) \to \| y \in v \|) = 1$．次に，$\forall z \in D(v)$　$z = \vee C$，($C \subseteq D(u_0) \upharpoonright H$，$C$ は compatible) とおける．$\forall y \in D(u_0)$ $\forall p \in H$ $y \upharpoonright p \in C$ とすると，

$$u_0(y) \wedge p \wedge \| y = \vee C \| = u_0(y) \wedge \| y \upharpoonright p = \vee C \| \wedge Ey \wedge p$$
$$= u_0(y) \wedge \| y \upharpoonright p = (\vee C) \upharpoonright E(y \upharpoonright p) \| = u_0(y) \wedge E(y \upharpoonright p) = u_0(y) \wedge p.$$

よって，

$$v(z) \to \| z \in u_0 \| = v(\vee C) \to \| \vee C \in u_0 \| = \Big(\bigvee_{(y \upharpoonright p) \in C} u_0(y) \wedge p\Big) \to \| \vee C \in u_0 \|$$
$$= \bigwedge_{(y \upharpoonright p) \in C} \Big(u_0(y) \wedge p \to \bigvee_{w \in D(u_0)} (u_0(w) \wedge \| w = \vee C \|)\Big) \geq \bigwedge_{(y \upharpoonright p) \in C} (u_0(y) \wedge p \to u_0(y) \wedge \| y = \vee C \|)$$
$$= \bigwedge_{(y \upharpoonright p) \in C} (u_0(y) \wedge p \to u_0(y) \wedge p \wedge \| y = \vee C \|) = \bigwedge_{(y \upharpoonright p) \in C} (u_0(y) \wedge p \to u_0(y) \wedge p) = 1.$$

$$\therefore \bigwedge_{z \in D(v)} (v(z) \to \| z \in u_0 \|) = 1.$$

したがって，$\| u_0 = v \| = Eu_0 = Ev$，すなわち $u_0 \sim v$．

$u \sim u_0$ で，$\sim$ は同値関係だから，$u \sim v$．ゆえに，v は条件 1)－3) をみたす $V^{(H)}$ の sheaf である．

4. H上の sheaves と $V^{(H)}$ との関係

Def. 4.1.　H上の sheaf $A=\langle A, E, \urcorner\rangle$ に対して，$\tilde{A}=\mathcal{S}A\in V^{(H)}$ を次のように定義する．まず，各 $a\in A$ に対し $\tilde{a}\in V^{(H)}$ を，$D(\tilde{a})=\{\check{b}\,;\,b\in A\}$，$E\tilde{a}=Ea$，$\tilde{a}:\check{b}\longmapsto \|a=b\|_A$ により定義する．そこで $\tilde{A}\in V^{(H)}$ を，$D(\tilde{A})=\{\tilde{a}\,;\,a\in A\}$，$E\tilde{A}=\bigvee_{a\in A} Ea$，$\tilde{A}:\tilde{a}\longmapsto Ea$ によって定義する．また，H上の sheaves の間の morphism $f:A\to B$ に対して，$\tilde{f}=\mathcal{S}f\in hom(\tilde{A},\tilde{B})$ を，$\langle ab\rangle^{H}\longmapsto \|f(a)=b\|_B$ $(a\in A, b\in B)$ によって定義する．これらの対応は well-defined であり，$Sh(H)$ から $V^{(H)}$ への functor $\mathcal{S}: Sh(H)\longrightarrow V^{(H)}$ を定める．H上の sheaf A に対して，$\varphi_A: A\longrightarrow D(\tilde{A})$　$a\longmapsto\tilde{a}$ とする．

Prop. 4.1.　$A=\langle A, E, \urcorner\rangle$ をH上の sheaf，$a, b\in A$ とすると，

1) $\forall p\in H$.　$\widetilde{a\urcorner p}=\tilde{a}\upharpoonright p$　すなわち，$\varphi_A(a\urcorner p)=\varphi_A(a)\upharpoonright p$.

2) $\|\tilde{a}=\tilde{b}\|_{V^{(H)}}=\|a=b\|_A$

3) $\tilde{a}=\tilde{b}\iff a=b$

4) $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ が（$V^{(H)}$ で）compatible $\iff$ a と b が（A で）compatible

5) $\tilde{A}$ は $V^{(H)}$ の sheaf で，$\varphi_A:\langle A, E, \urcorner\rangle\longrightarrow\langle D(\tilde{A}), E, \upharpoonright\rangle$ は isomorphism.

証）　1)：定義より明らか．2)：Lemma 3.2. 3) による．

3)：$\tilde{a}=\tilde{b}\iff Ea=Eb\wedge\ \forall c\in A\ \|a=c\|_A=\|b=c\|_A\iff a\sim b$　Lemma 1.4. より $a\sim b\iff a=b$．　4)：1) と 3) より明らか．　5)：1) より $D(\tilde{A})$ は $\upharpoonright$-closed かつ $\varphi_A: A\longrightarrow D(\tilde{A})$ は $Presh(H)$ の morphism．3) より φ_A は bijective，よって isomorphism．したがって $\tilde{A}$ は $V^{(H)}$ の sheaf である．

Prop 4.2. Functor $\mathcal{S}: Sh(H) \to V^{(H)}$ は full かつ faithful.

証)

1. $\mathcal{S}$ は faithfull, i.e. $\forall f_1, f_2 : A \to B$ in $Sh(H)$ $\mathcal{S}f_1 = \mathcal{S}f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$

∵) $\mathcal{S}f_1 = \mathcal{S}f_2 \iff \tilde{f_1} = \tilde{f_2} \iff \forall a \in A\ \forall b \in B\ \ \tilde{f_1}(\langle \tilde{a} \tilde{b} \rangle^{V}) = \tilde{f_2}(\langle \tilde{a} \tilde{b} \rangle^{V})$

$\iff \forall a \in A\ \forall b \in B\ \|f_1(a) = b\| = \|f_2(a) = b\| \iff \forall a \in A\ \ f_1(a) \sim f_2(a)$

$\iff \forall a \in A\ \ f_1(a) = f_2(a)$ (B は separated) $\iff f_1 = f_2$.

2. $\mathcal{S}$ は full, i.e. $\forall A, B \in Sh(H)\ \forall g \in hom(\tilde{A}, \tilde{B})\ \exists f : A \to B$ in $Sh(H)$. $g = \mathcal{S}f$.

∵) $g \in hom(\tilde{A}, \tilde{B})$ とする. まず, 各 $a \in A$ に対して

$C_a = \{ \tilde{b} \restriction \|\langle \tilde{a} \tilde{b} \rangle \in g\| ; b \in B \}$ とおく. $C_a \subseteq D(\tilde{B})$ で compatible である. ∵) $\forall b_1, b_2 \in B$ に対し, $c_1 = \tilde{b_1} \restriction \|\langle \tilde{a} \tilde{b_1} \rangle \in g\|$, $c_2 = \tilde{b_2} \restriction \|\langle \tilde{a} \tilde{b_2} \rangle \in g\|$ とおく. $c_1, c_2 \in C_a$ で $D(c_1) = D(c_2) = \{ \check{b} ; b \in B \}$, $Ec_1 = \|\langle \tilde{a} \tilde{b_1} \rangle \in g\|$, $Ec_2 = \|\langle \tilde{a} \tilde{b_2} \rangle \in g\|$ である. g は $V^{(H)}$ の写像だから, $\forall b \in B$ に対し

$(c_1 \restriction Ec_2)(\check{b}) = c_1(\check{b}) \wedge Ec_2 = \|b = b_1\|_B \wedge \|\langle \tilde{a} \tilde{b_1} \rangle \in g\| \wedge \|\langle \tilde{a} \tilde{b_2} \rangle \in g\|$

$= \|\tilde{b} = \tilde{b_1}\| \wedge \|\tilde{b_1} = \tilde{b_2}\| \wedge Ec_1 \wedge Ec_2 \leq \|\tilde{b} = \tilde{b_2}\| \wedge Ec_1 \wedge Ec_2$

$= \|b = b_2\|_B \wedge Ec_2 \wedge Ec_1 = c_2(\check{b}) \wedge Ec_1 = (c_2 \restriction Ec_1)(\check{b})$ 　同様に,

$(c_2 \restriction Ec_1)(\check{b}) \leq (c_1 \restriction Ec_2)(\check{b})$ 　∴ $c_1 \restriction Ec_2 = c_2 \restriction Ec_1$.

次に, $\psi : D(\tilde{A}) \to D(\tilde{B})$ を, $\tilde{a} \mapsto \bigvee C_a$ によって定義する. さらに, $f = \varphi_B^{-1} \circ \psi \circ \varphi_A : A \to B$ とおく. すなわち, $f : A \to B$ で $f : a \mapsto b$ s.t. $\tilde{b} = \psi(\tilde{a})$ である. ($\widetilde{f(a)} = \psi(\tilde{a})$). $\forall a \in A, \forall p \in H$ に対し, $C_{a \restriction p} = C_a \restriction p$ が成り立つから, $\bigvee(C_{a \restriction p}) = (\bigvee C_a) \restriction p$.

明らかに, $E(\bigvee C_a) = Ea$ (g は写像). よって f は morphism である.

ここで，$\forall a \in A \quad \| \tilde a \in \tilde A \| \leq \| \langle \tilde a \, \psi(\tilde a) \rangle \in g \|$ が成り立つ．

∵) $\| \tilde a \in \tilde A \| \leq \| \exists y \langle \tilde a y \rangle \in g \| = \bigvee_{b \in B} \| \langle \tilde a \tilde b \rangle \in g \| = \| \bigvee_{b \in B} \tilde b \upharpoonright \| \langle \tilde a \tilde b \rangle \in g \| = \vee C_a \|$

$= \bigvee_{b \in B} (\| \tilde b = \vee C_a \| \wedge \| \langle \tilde a \tilde b \rangle \in g \|) = \bigvee_{b \in B} (\| \tilde b = \psi(\tilde a) \| \wedge \| \langle \tilde a \tilde b \rangle \in g \|) \leq \| \langle \tilde a \, \psi(\tilde a) \rangle \in g \|$.

Def 4.1 により $\tilde f \in hom(\tilde A, \tilde B)$ が定義されるが，$\forall a \in A \ \forall b \in B$ に対し，$\tilde f(\langle \tilde a \tilde b \rangle'') = \| \langle \tilde a \tilde b \rangle \in \tilde f \| = \| \psi(\tilde a) = \tilde b \| \wedge \| \tilde a \in \tilde A \|$ （Prop 4.1. 2)）.

$\leq \| \psi(\tilde a) = \tilde b \| \wedge \| \langle \tilde a \, \psi(\tilde a) \rangle \in g \| \leq \| \langle \tilde a \tilde b \rangle \in g \| = g(\langle \tilde a \tilde b \rangle'')$

逆に，$g(\langle \tilde a \tilde b \rangle'') = \| \langle \tilde a \tilde b \rangle \in g \| = \| \langle \tilde a \tilde b \rangle \in g \| \wedge \| \tilde a \in \tilde A \|$

$\leq \| \langle \tilde a \tilde b \rangle \in g \| \wedge \| \langle \tilde a \, \psi(\tilde a) \rangle \in g \| \leq \| \psi(\tilde a) = \tilde b \| \wedge \| \tilde a \in \tilde A \| = \tilde f(\langle \tilde a \tilde b \rangle'')$

∴ $\forall a \in A \ \forall b \in B \quad \tilde f(\langle a b \rangle'') = g(\langle \tilde a \tilde b \rangle'') \quad D(\tilde f) = D(g)$ だから，$\tilde f = g$.

すなわち，$g = \mathcal{S} f$ となる．

Theorem 2.

Functor $\mathcal{S} : Sh(H) \longrightarrow V^{(H)}$ は category の equivalence である．すなわち，２つの category $Sh(H)$ と $V^{(H)}$ とは，equivalent である．

証明)

$\mathcal{S}$ は full かつ faithful であるから，$V^{(H)}$の任意の object u に対して，$\tilde A \cong u$ (in $V^{(H)}$)，すなわち $V^{(H)}$で u と $\tilde A$ が同型になるような H 上の sheaf A が存在することを証明すればよい．

$u \in V^{(H)}$ とする．Theorem 1 により，$V^{(H)}$の sheaf v で，

1) $u \sim v$ 2) $\forall x, y \in D(v) \ D(x) = D(y)$ 3) $\forall x \in D(v)$ x は extensional

をみたすものが存在する．そこで，$A = D(v)$ とおけば，

$\mathcal{A}=\langle A, E, \upharpoonright\rangle$ は H上の sheaf である．$\forall a, b\in A$ に対して

$\|a=b\|_{\mathcal{A}}=\|a=b\|_{V^{(H)}}$ が成り立つ

∵) $\forall p\in H$ $p\leq Ea$, $a\upharpoonright p=b\upharpoonright p$ とすると $\|a=b\|\wedge p=E(a\upharpoonright p)=p$

∴ $p\leq\|a=b\|_{V^{(H)}}$. よって $\|a=b\|_{\mathcal{A}}=\bigvee\{p\leq Ea\,;\,a\upharpoonright p=b\upharpoonright p\}\leq\|a=b\|_{V^{(H)}}$

逆に $\|a=b\|_{V^{(H)}}=p$ とおくと，$p\leq Ea\wedge Eb$ で $\forall x\in D(a)=D(b)$ に対し $p\leq a(x)\leftrightarrow b(x)$．$E(a\upharpoonright p)=E(b\upharpoonright p)=p$ $\forall x\in D(a\upharpoonright p)=D(b\upharpoonright p)$ に対し，$(a\upharpoonright p)(x)=a(x)\wedge p=b(x)\wedge p=(b\upharpoonright p)(x)$ ∴ $a\upharpoonright p=b\upharpoonright p$. ∴ $\|a=b\|_{V^{(H)}}\leq\|a=b\|_{\mathcal{A}}$.

したがって，Prop 4.1.2) より $\forall a, b\in A$ $\|\tilde{a}=\tilde{b}\|_{V^{(H)}}=\|a=b\|_{V^{(H)}}$.

そこで，$f\in hom(v, \tilde{A})$ を，$D(f)=\{\langle a\tilde{b}\rangle^{V}; a\in D(v)\ \tilde{b}\in D(\tilde{A})\}$,

$f: \langle a\tilde{b}\rangle^{V}\longmapsto\|a=b\|=\|\tilde{a}=\tilde{b}\|$ によって定義する．f は well-defined である．さらに，$\forall\tilde{a}\in D(\tilde{A})$ $\|\tilde{a}\in\tilde{A}\|=\|\tilde{a}=\tilde{a}\|=\|a=a\|$ $=\|\langle a\tilde{a}\rangle\in f\|\leq\|\exists x\langle x\tilde{a}\rangle\in f\|$ ∴ $\|f$ は surjective $\|=1$,

$\forall a_1, a_2, b\in A$ $\|\langle a_1\tilde{b}\rangle\in f\|\wedge\|\langle a_2\tilde{b}\rangle\in f\|=\|a_1=b\|\wedge\|a_2=b\|\leq\|a_1=a_2\|$

∴ $\|f$ は injective $\|=1$．よって Prop 2.1. より f は epi かつ mono,

すなわち $f: v\cong\tilde{A}$．Prop 2.2. より $u\cong v$．よって，$u\cong\tilde{A}$.

したがって，定理が証明された．

Remark. Sh(H) は well-opened topos であることが知られているので，この定理により，$V^{(H)}$ が well-opened topos であることの別証明が得られる．

References

[1] M.P. Fourman, The logic of topoi, in: Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, 1977.

[2] A. Kock and G. E. Reyes, Doctrins in categorical logic, in: ibid.

[3] 下田 守, Heyting valued model $V^{(H)}$ について, シンポジウム「数理論理学の数学への応用」(1979.3.) にて報告, 同報告集掲載予定.

[4] 竹内外史, 層・圏・トポス, 日本評論社, 1978.