数理解析研究所講究録
第 362 巻 1979 年 106-113

一意性条件の存在条件による近似理論

筑波大　数学系　本橋信義

講演者が開発した新しい理論の紹介を行う。

L を等号をもった才一階の述語論理（古典論理でも直観主義論理のいずれでもよい）とし，$\mathbb{R}$ は L の中の述語記号のある集合とする．L の中の論理式 A が $\mathbb{R}$-positive（$\mathbb{R}$-negative）であるとは，A が $\mathbb{R}$ の元の negative（positive）occurrence をもたないことと定義し，A が $\mathbb{R}$-free であるとは A が $\mathbb{R}$ の元を含まないこととする。そこで我々は L の閉論理式 A に対し次の問題を考える。

問題．次の条件 (i)，(ii) をみたす $\mathbb{R}$-positive な閉論理式のある集合 S を求めよ．

(i) S の元はすべてある syntactical で simple な手続きで A から得られる．

(ii) L の任意の $\mathbb{R}$-positive な論理式 B について，

A⊃B が Lで証明可能になる条件は，Sの元Cで，C⊃B が Lで証明可能になるCが存在することである.

今，(i)，(ii) の条件をみたす $\mathbb{R}$-positive な閉論理式の集合 S が得られたとしよう。Sの中の各閉論理式から，R(E) (R∈$\mathbb{R}$) の形の部分論理式をすべて E=E の形の正しい論理式でおきかえて得られる閉論理式の全体を K とする。すると，

(iii) Lの任意の $\mathbb{R}$-free な閉論理式Bについて，A⊃B がLで証明可能になる条件は C⊃B がLで証明可能になるようなKの元Cが存在することである。

が成り立つ。(iii) は条件(ii) と Positive Lemma からの明らかな帰結である。(iii) は AからLの中で証明可能な$\mathbb{R}$の元を含まない閉論理式全体の公理系がKによって与えられることを示している。すなわち，我々の問題の解は，第二階の閉論理式 ∃$\mathbb{R}$A($\mathbb{R}$) の第一階部分の公理化を常に与えることになる。

しかし，上の問題を解くには，条件(i) の中の syntactical で simple な手続のきちんとした定義を与えなければならな

い。その一つの例として，我々は $\mathbb{R}$の一意性条件とよばれる一群の $\mathbb{R}$-negative な閉論理式の $\mathbb{R}$の存在条件とよばれる一群の閉論理式による"近似"という手続きを提出し，次のような定理を得た。

定理　A_1 は $\mathbb{R}$の一意性条件，A_2 は $\mathbb{R}$の存在条件で，A が $A_1 \wedge A_2$ のとき，A_1 の A_2 による近似の全体 S は上の問題の条件(i)，(ii)をみたす。

$\mathbb{R}$の一意性条件，$\mathbb{R}$の存在条件，$\mathbb{R}$の一意性条件の $\mathbb{R}$の存在条件による近似，といった概念の定義等，詳細は次の論文を参照されたい。

N. Motohashi, Appoximation theory of uniqueness conditions by existence conditions, to appear.

ここでは，ある特定の一意性条件と存在条件についての上の定理の特別の場合を説明し，その応用を2つ示すことにする。以下，$\mathbb{R}$は唯一つの2項述語記号 R だけからなる集合とする，i.e. $\mathbb{R} = \{R\}$．そして，U は R-negative 閉論理式；

$$\forall x \forall y \forall u \forall v\,(R(x,y) \wedge R(u,v). \supset D(x,y,u,v)),$$

E は R-positive 閉論理式；

$$\forall x \exists y R(x,y),$$

とする，ただし，$D(x,y,u,v)$ は R-free な論理式とする。

U は $\{R\}$ の一意性条件の一例であり，E は $\{R\}$ の存在条件の最も簡単な一例である。X が $R(t,s)$ の形の原始論理式の有限集合とし，$X(R)=\{\langle t,s\rangle \mid R(t,s)\in X\}$ とする。このとき，各自然数 k に対して，"A の B による X 上の k 次の近似" とよばれる論理式 $Ap^k(U,E,X)$ を次の (iv)，(v) で定義する。

(iv) $$Ap^0(U,E,X) = \bigwedge_{\langle t,s\rangle,\langle u,v\rangle\in X(R)} (R(t,s)\wedge R(u,v)\wedge D(t,s,u,v)).$$

(v) $$Ap^{k+1}(U,E,X)=\forall x_{k+1}\exists y_{k+1}\, Ap^k(U,E,X\cup\{R(x_{k+1},y_{k+1})\}).$$

"U の E による k 次の近似" とは閉論理式 $Ap^k(U,E,\phi)$ のこととし，これを $Ap^k(U,E)$ であらわす。すると，$Ap^k(U,E,X)$ は R-positive な論理式で，$Ap^k(U,E,X)$ の中に出てくる自由変数は X の中に出てくるものだけであり，しかも，論理式 $U\wedge E\wedge \bigwedge X.\supset Ap^k(U,E)$ はすべて L で証明可能になる。また，$Ap^k(U,E)$ は次の形をしている；

$$\forall x_1\exists y_1\forall x_2\exists y_2\cdots\forall x_k\exists y_k\Big(\bigwedge_{i,j=1}^{k} R(x_i,y_i)\wedge D(x_i,y_i,x_j,y_j)\Big).$$

すると，純粋に証明論的な手法を用いて，我々は，

(vi) 任意の R-positive な論理式 B について，$\mho \wedge E \wedge \wedge X. \supset B$ が L で証明可能になる条件は，ある自然数 k で $A_p^k(\mho, E, X) \supset B$ が証明可能になることである。

を得ることができる。以上の結果を無限論理 $L_{\omega_1 \omega}$ にまで拡張するには，各可算順序数 α に対して $A_p^\alpha(\mho, E, X)$ を定義すればよい。$\alpha = 0$ の場合，および α が limit ordinal でないときは (iv), (v) をそのまま用い，α が limit ordinal のときは，

(vii) $$A_p^\alpha(\mho, E, X) = \bigwedge_{\beta < \alpha} A_p^\beta(\mho, E, X)$$

を用いて定義する。すると (vi) は次のように拡張できる。

(viii) $L_{\omega_1 \omega}$ の中の任意の R-positive な論理式 B について，$\mho \wedge E \wedge \wedge X. \supset B$ が $L_{\omega_1 \omega}$ で証明可能になる条件は，ある可算順序数 α で，$A_p^\alpha(\mho, E, X) \supset B$ が証明可能になるものである
ことである。
さらに，B が有限論理の論理式のときは α として有限の順序数が取れる。

上記の結果，(vi)，(viii) は単純なものであるが，それでもいくつかの興味ある応用をもっている。

$\mho_n R$ を次のような R-negative 閉論理式とする；

$$\forall x \forall y \forall u \forall v\,(R(x,y) \wedge R(u,v). \supset (x=u \supset y=v)).$$

すると $A_p^k(\mho_n R, E)$ は

$$\forall x_1 \exists y_1 \cdots \forall x_k \exists y_k \,(\bigwedge_{i,j=1}^{k} R(x_i,y_i) \wedge (x_i = x_j \supset y_i = y_j)),$$

となる。この閉論理式を $E_x^k R$ であらわし，$E_x^1 R$ を $E_x R$ であらわすと，$E_x R$ が E となる。そして (vi) より，

(ix) 任意の R-positive な論理式 B について，$E_x R \wedge \mho_n R. \supset B$ が L で証明可能になる条件は，$E_x^k R \supset B$ が L で証明可能になるような自然数 k が存在することである。

特に，$E_x R \supset E_x^k R$ はすべて古典論理の中で証明可能だから，

(x) 任意の R-positive な論理式 B について，$E_x R \wedge \mho_n R. \supset B$ が古典論理で証明可能になる条件は，$E_x R \supset B$ が古典論理の中で証明可能になることである。

が得られる。(ix)，(x) は“一意性条件の消去定理”とよばれ

る定理の一部である。

次に，無限論理での応用を一つ示そう。まず，Lは一つの2項述語記号"$*<*$"と無限個の個体定数記号"$c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$"を少なくとももっているものとする。1つのL-構造 $\mathfrak{A}$ が順序（整列順序）構造であるとは，$\mathfrak{A}$の中での"<"の解釈，すなわち $\mathfrak{A}(<)$ が $\mathfrak{A}$ のユニバース $|\mathfrak{A}|$ 上の全順序（整列順序）を与えていることとする。$\mathbb{W}$ として次のR-negative 閉論理式を取る；

$$\forall x \forall y \forall u \forall v \, (R(x,y) \wedge R(u,v). \supset \bigwedge_{n<m} (x=c_n \wedge u=c_m . \supset v<y)).$$

$\mathbb{W}$ は R の $L_{\omega_1\omega}$ の中での一意性条件の一つである。$\mathbb{W}$ の定義と $\mathbb{W}$ の E による近似の定義から，

(xi) 任意の順序L-構造 $\mathfrak{A}$ について，

$$\mathfrak{A} \models \exists R(\mathbb{W} \wedge E) \iff \mathfrak{A} \text{は整列順序構造でない}$$

(xii) 任意の整列順序L-構造 $\mathfrak{A}$ と $\alpha < \omega_1$ について，

$$\mathfrak{A} \models \exists R \, Ap^{\alpha}(\mathbb{W}, E) \iff \mathfrak{A}(<) \text{の order type} \geq \alpha$$

が得られる。今，C が $L_{\omega_1\omega}$ の閉論理式で，C のモデルはすべて整列構造であったとする。C は R を含んでいないと仮定してよい。すると (xi) より $C \wedge \mathbb{W} \wedge E$ はモデルをもたない。

従って，　$\mathbb{W} \wedge E . \supset \neg C$　は　$L_{\omega_1\omega}$ で証明可能である．
すると (viii) より，　$A_p^\alpha(\mathbb{W}, E) \supset \neg C$ が証明可能になるのが取れる。C は R を含まないから　$\exists R A_p^\alpha(\mathbb{W}, E) \supset \neg C$　が valid になる．よって，　$C \wedge \exists R A_p^\alpha(\mathbb{W}, E)$　はモデルをもたない。(xii) より，C のモデルの order type はすべて α より小さいことになる。以上から，

(xiii)　$L_{\omega_1\omega}$ の中で表現できる整列順序は可算整列順序だけである．

という良く知られた結果が得られる。