数理解析研究所講究録
第 362 巻 1979 年 136-156

Silver Machine について

イリノイ大　竹内 外史
名大 理　篠田 寿一

Jensen によって証明された Covering Theorem は、fine structure theory の大きな成果の一つであるが、その証明は必ずしも分かり易いものではなかった。この証明を分析する事により、Silver は L-machine の概念を得、定理の証明を極めて簡単化する事に成功した。L-machine を用いた Covering Theorem の証明を紹介しようというのが小論の目標である。$\neg 0^{\#}$ により「L から L への nontrivial な Σ_1 elementary embedding は存在しない」という命題を表わすことにすると、

<u>定理</u>（Covering Theorem）$\neg 0^{\#}$ を仮定すると、

$$\forall X \subseteq On \, [\, |X| > \omega \rightarrow \exists Y \in L \, (X \subseteq Y \,\&\, |X| = |Y|)\,]$$

これから cardinal の簡単な計算により、

<u>系</u> λ が singular cardinal ならば、

$$2^{\lambda} = \begin{cases} 2^{\underline{\lambda}} & \text{if } \exists \tau < \lambda \ \ 2^{\tau} = 2^{\underline{\lambda}} \\ (2^{\underline{\lambda}})^{+} & \text{otherwise} \end{cases}$$

§1. class A の元の有限列全体を $A^{\underline{\omega}}$ で表わすことにする.

<u>定義 1.1.</u> $\mathfrak{A}=\langle A, F_i\rangle_{i\in I}$ が algebra とは, 各 F_i が $A^{\underline{\omega}}$ から A への部分関数であることをいう. $X\subseteq A$ が $\forall i\ \forall\vec{x}\in X^{\underline{\omega}}\ [F_i(\vec{x})\downarrow \to F_i(\vec{x})\in X]$ なる条件をみたすとき, X を $\mathfrak{A}$ の subalgebra という. $X\subseteq \mathfrak{A}$ に対して X により生成される subalgebra を $\mathfrak{A}(X)$ で表わす.

<u>定義 1.2.</u> algebra $\mathfrak{A}=\langle A, F_i\rangle_{i\in I}$ から algebra $\mathfrak{B}=\langle B, G_i\rangle_{i\in I}$ への 1:1 写像 π が $\pi(F_i(\vec{x}))\simeq G_i(\pi(\vec{x}))$ $(i\in I)$ をみたすとき、π を monomorphism という. ただし、$\pi(\langle x_1,\cdots,x_n\rangle)=\langle \pi(x_1),\cdots,\pi(x_n)\rangle$.

<u>定義 1.3</u> algebra $\mathfrak{A}=\langle A, F_i\rangle_{i<\omega}$ が machine とは,

(i) $A=On$ または $A\in On$

(ii) $F_0(\langle\alpha,\beta\rangle)=0$ if $\alpha<\beta$; $F_0(\vec{\alpha})\uparrow$ otherwise.

$\mathfrak{A}=\langle A, F_i\rangle_{i\in\omega}$ を一つの machine とする.

<u>定義 1.4</u> $\xi\in A$ に対して $\mathfrak{A}^{\xi}=\langle\xi, F_i^{\xi}\rangle_{i<\omega}$ を次の様な machine とする:

$$F_i^{\xi}(\vec{\alpha})=F_i(\vec{\alpha}) \text{ if } \vec{\alpha}\in\xi^{\underline{\omega}}\ \&\ F_i(\vec{\alpha})<\xi\ ;\ F_i^{\xi}(\vec{\alpha})\uparrow \text{ otherwise}$$

<u>定義 1.5</u> $\pi:\xi\to\eta$ が strong $\mathfrak{A}$-map とは、π が $\mathfrak{A}^{\xi}$ から $\mathfrak{A}^{\eta}$ への monomorphism である事をいう. $\pi:\xi\to\eta$ が medium $\mathfrak{A}$-map とは $\exists\delta\leqq\eta\ [\pi:\xi\to\delta$ is a strong $\mathfrak{A}$-map$]$ なる事をいう.

<u>定理 1.6.</u> $\pi_1 : \xi_1 \to \eta$, $\pi_2 : \xi_2 \to \eta$ が medium $\mathfrak{A}$-maps で $rng(\pi_1) \subseteq rng(\pi_2)$ ならば, $\pi_2^{-1} \circ \pi_1 : \xi_1 \to \xi_2$ は medium $\mathfrak{A}$-map である.

<u>定理 1.7</u> $\pi : \xi \to \eta$ が strong $\mathfrak{A}$-map で, $X \subseteq \xi$ ならば,

$$\pi'' \mathfrak{A}^{\xi}(X) = \mathfrak{A}^{\eta}(\pi'' X)$$

集合 $X \subseteq On$ に対し, その order type を $o(X)$ で表わす. $\xi = o(X)$ から X への unique order isomorphism を X の collapsing map ということにする.

<u>定義 1.8</u> $\mathfrak{A}$ が collapsing property をもつとは, $\mathfrak{A}^{\eta}$ のかってな subalgebra X に対して, X の collapsing map $\pi : \xi \to \eta$ $(\xi = o(X))$ が strong $\mathfrak{A}$-map になることをいう.

<u>定義 1.9</u> $\mathfrak{A}$ が finiteness property をもつとは,

$$\forall \eta \in A \ \exists H_\eta : \text{finite} \subseteq \eta \ \forall X \subseteq \eta \ [\mathfrak{A}^{\eta+1}(X \cup \{\eta\}) \subseteq \mathfrak{A}^{\eta}(X \cup H_\eta) \cup \{\eta\}]$$

をみたすことをいう.

<u>定理 1.10</u> κ を limit ordinal, $\eta = \min\{\eta \geq \kappa \mid \exists \alpha < \kappa \ \exists P : \text{finite} \subseteq \eta \ \ o(\mathfrak{A}^{\eta}(\alpha \cup P)) \geq \kappa\}$ とする. このとき, $\mathfrak{A}$ が finiteness property をもてば, η は limit ordinal である.

(証明) $\eta = \nu + 1$ と仮定する.

$$\mathfrak{A}^{\nu+1}(\alpha \cup P) \subseteq \mathfrak{A}^{\nu}(\alpha \cup (P \cap \nu) \cup H_\nu) \cup \{\nu\}$$

となる有限集合 $H_\nu \subseteq \nu$ が存在する. $o(\mathfrak{A}^\eta(\alpha\cup P))\geq\kappa$ ならば, κ は limit ordinal だから $o(\mathfrak{A}^\nu(\alpha\cup(P\cap\nu)\cup H_\nu))\geq\kappa$. これは η の最小性に反する. ☒

$\langle I,\leq\rangle$ を directed set とする. $\xi_i\in On$ および order preserving map $\pi_{ij}:\xi_i\to\xi_j$ $(i\leq j\in I)$ からなる direct system $\Pi=\langle\xi_i,\pi_{ij}\rangle_{i\leq j\in I}$ を考える. Π の direct limit $\varinjlim_I\Pi$ は linearly ordered set になるが, well-ordered set になるとは限らない. $\varinjlim_I\Pi$ が well-ordered set になるとき, Π を well-founded system ということにする.

<u>定理 1.11</u> Π が well-founded になるためには次のような列 $\langle i_n\mid n<\omega\rangle$, $\langle\sigma_n\mid n<\omega\rangle$ が存在しないことが必要十分である:

$$i_0\leq i_1\leq\cdots\leq i_n\leq\cdots,\quad i_n\in I,$$

$$\sigma_n\in\xi_{i_n},\quad \pi_{i_n i_{n+1}}(\sigma_n)>\sigma_{n+1}.$$

<u>定義 1.12</u> $\mathfrak{A}$ が direct limit property をもつとは, かってな well-founded direct limit system $\Pi=\langle\xi_i,\pi_{ij}\rangle_{i\leq j\in I}$ (π_{ij} は strong $\mathfrak{A}$-map (又は medium $\mathfrak{A}$-map)) に対して, $\pi_{i\infty}:\xi_i\to\xi_\infty$ が strong $\mathfrak{A}$-map (又は medium $\mathfrak{A}$-map) になることをいう. ここで $\varinjlim_I\Pi$ とその order type ξ_∞ を同一視している.

§2. この§では L-machine を定義する準備として，pairing machine を定義し，それが collapsing property, finiteness property, direct limit property をもつことを証明する．そのために先ず On^{ω} 上に well-ordering $<$ を入れることにする．

<u>定義 2.1</u>　$\vec{\alpha}=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m\rangle$, $\vec{\beta}=\langle\beta_1,\cdots,\beta_n\rangle\in On^{\omega}$ に対して，

$\vec{\alpha}<\vec{\beta}\iff$ (1)　$\max(\vec{\alpha})<\max(\vec{\beta})$

or (2)　$\max(\vec{\alpha})=\max(\vec{\beta})$ & $\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_m\rangle<\langle\beta_1,\cdots,\beta_{j-1},\beta_{j+1},\cdots,\beta_n\rangle$;　$\alpha_i=\max(\vec{\alpha})=\max(\vec{\beta})=\beta_j$

or (3)　$\vec{\beta}$ は $\vec{\alpha}$ の順序を変えたもので，辞書式順序に関して $\vec{\alpha}<\vec{\beta}$.

<u>定義 2.2</u>　$J: On^{\omega}\longrightarrow On$ を order isomorphism とし，C_i を

$$\begin{cases} C_i(\langle\alpha\rangle)=\beta_i & \text{if } J(\langle\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}\rangle)=\alpha \ \& \ i<n \\ C_i(\vec{\alpha})\uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する．machine $P_<=\langle On, F_0, J, C_i\rangle_{i<\omega}$ を pairing machine という．

J, C_i に関して、次の性質は明らかであろう．

<u>定理 2.3</u>　(1)　$\max(\vec{\alpha})\leq J(\vec{\alpha})$

(2)　$C_i(\langle\alpha\rangle)\leq\alpha$　if　$C_i(\langle\alpha\rangle)\downarrow$

以下に $P_<$ が collapsing, finiteness, direct limit properties

をもつことを示す. 紙数の都合で証明はアウトラインだけを述べる.

定理 2.4　$R_<$ は collapsing property をもつ

（証明）$X \subseteq \eta$ を $R_<^\eta$ の subalgebra, $\pi : \xi \to X$ を X の collapsing map とする. 今 $Z = \{\vec{\alpha} \in On^\omega \mid J(\vec{\alpha}) \in X\}$ とおくと, $Z \subseteq X^\omega$ かつ Z は X^ω の initial segment になる. $J \upharpoonright Z : Z \to X$ は order isomorphism であるから, Z の order type は ξ である.
$\pi : \xi \to X$ は自然に order isomorphism $\pi : \xi^\omega \to X^\omega$ をひきおこす. すると $\pi^{-1}Z$ は ξ^ω の initial segment でその order type は ξ となる. これより

$$\pi(J^\xi(\vec{\alpha})) \simeq J^\eta(\pi(\vec{\alpha})) \quad \text{for all } \vec{\alpha} \in \xi^\omega$$

がいえる. また、これから直ちに

$$\pi(C_i^\xi(\vec{\alpha})) \simeq C_i^\eta(\pi(\vec{\alpha})) \quad \text{for all } \vec{\alpha} \in \xi^\omega \quad \boxtimes$$

定理 2.5　$R_<$ は finiteness property をもつ.

（証明）η をかってな ordinal とし, $J(\langle \beta_0, \cdots, \beta_{n-1} \rangle) = \eta$ となる $\beta_0, \cdots, \beta_{n-1}$ をとる. $H_\eta = \{\beta_i \mid \beta_i \neq \eta \ \& \ i < n\}$ とすれば, 定理 2.3 により $H_\eta \subseteq \eta$. $X \subseteq \eta$ に対し $Y = R_<^\eta(X \cup H_\eta) \cup \{\eta\}$ とすると, 容易に分かるように Y は $R_<^{\eta+1}$ の subalgebra となる. 従って $Y \supseteq R_<^{\eta+1}(X \cup \{\eta\})$ $\boxtimes$

<u>定理 2.6</u>　$P_<$ は direct limit property をもつ

（証明）　$\Pi = \langle \eta_i, \pi_{ij} \rangle_{i \le j \in I}$ を well-founded direct system とする．（$\pi_{ij} : \eta_i \to \eta_j$ は strong $P_<$-map ）．

$\pi_{i\infty} : \eta_i \to \eta_\infty$ が strong $P_<$-map であることをいう．

$J^{\eta_i}(\vec{\alpha}) \simeq \beta$ とすると $J(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha}))$ に関する帰納法により，

$J(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha})) = \pi_{i\infty}(\beta)$ を示すことができる．また $J^{\eta_\infty}(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha}))$ が定義されていれば，$J^{\eta_i}(\vec{\alpha})$ も定義されていることが簡単な計算によって分かる．したがって

$$\pi_{i\infty}(J^{\eta_i}(\vec{\alpha})) \simeq J^{\eta_\infty}(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha})) \quad \text{for all } \vec{\alpha} \in \eta_i^{\omega}$$

これより，

$$\pi_{i\infty}(C_n^{\eta_i}(\vec{\alpha})) \simeq C_n^{\eta_\infty}(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha})) \quad \text{for all } \vec{\alpha} \in \eta_i^{\omega}$$

よって $\pi_{i\infty} : \eta_i \to \eta_\infty$ は strong $P_<$-map になる．

同様に、各 $\pi_{ij} : \eta_i \to \eta_j$ が medium $P_<$-map ならば、$\pi_{i\infty} : \eta_i \to \eta_\infty$ も medium $P_<$-map になる．☒

§3. 次のような ramified language $\mathcal{L}$ を考える：

variables：$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$

relation symbols：$\in$, $=$

propositional connectives：$\neg$, $\vee$

quantifiers：$\exists^\alpha$

abstraction operators：$\wedge_\alpha$

parenthesis : (,)

<u>定義 3.1</u>　$g(\exists^\alpha) = 2\alpha+1$, $g(\wedge^\alpha) = 2\alpha+2$. $\mathcal{L}$の記号列sに対して，sに現われる$\exists^\alpha$, $\wedge^\alpha$に対する$g(\exists^\alpha)$, $g(\wedge^\alpha)$の最大値を$g(s)$で表わす.

<u>定義 3.2</u>　(1) t_1, t_2 が constant terms か variables であるとき，$(t_1 = t_2)$, $(t_1 \in t_2)$ は formulas である.

(2) φ, ψ が formulas ならば，$(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\exists^\alpha x_i\, \varphi)$ は formulas である.

(3) $\varphi(x_i)$ が x_i 以外の自由変数を含まない formula で，$g(\varphi(x_i)) < g(\wedge^\alpha)$ をみたせば，$(\hat{x}_i^\alpha \varphi(x_i))$ は constant term である.

<u>定義 3.3</u>　$T_\alpha = \{t \mid t$ は $(\hat{x}_i^\beta \varphi)$ なる形の constant term, $\beta < \alpha\}$.　$T = \bigcup_{\alpha \in On} T_\alpha$.

$\mathcal{L}$の記号および記号列を順序数により、次のようにコードする.

<u>定義 3.4</u>　$\ulcorner \in \urcorner = J(\langle 0, 0 \rangle)$, $\ulcorner = \urcorner = J(\langle 0, 1 \rangle)$, $\ulcorner \neg \urcorner = J(\langle 0, 2 \rangle)$, $\ulcorner \vee \urcorner = J(\langle 0, 3 \rangle)$, $\ulcorner (\urcorner = J(\langle 0, 4 \rangle)$, $\ulcorner) \urcorner = J(\langle 0, 5 \rangle)$, $\ulcorner x_i \urcorner = J(\langle 0, 6+i \rangle)$, $\ulcorner \exists^\alpha \urcorner = J(\langle 0, \omega+\alpha \rangle)$, $\ulcorner \wedge^\alpha \urcorner = J(\langle 0, \omega+\alpha, \omega+\alpha \rangle)$. また記号列 $s_1 \cdots s_n$ に対し，$\ulcorner s_1 \cdots s_n \urcorner = J(\langle 1, \ulcorner s_1 \urcorner, \cdots, \ulcorner s_n \urcorner \rangle)$

以後，$\mathcal{L}$ の formula あるいは term と，そのコードとを同一視する．したがって formula あるいは term は順序数である．コードに関して次の性質がある．

(1) $\pi : \xi \to \eta$ が medium $P_<$-map で，φ が formula ならば，$\pi(\varphi)$ は φ に現われる $\exists^\alpha$, $\wedge_\alpha$ を $\exists^{\pi(\alpha)}$, $\wedge_{\pi(\alpha)}$ に置き換えて得られる formula である．term についても同様．

(2) $\exists^\alpha x_i\,\varphi(x_i)$ が sentence で，$t \in T_\alpha$ ならば，$\varphi(t) < (\exists^\alpha x_i \varphi)$, $t < (\exists^\alpha x_i \varphi)$．

(3) $\hat{x}_i^\alpha \varphi(x_i)$ が constant term で，$t \in T_\alpha$ ならば，$\varphi(t) < (\hat{x}_i^\alpha \varphi)$ かつ $t < (\hat{x}_i^\alpha \varphi)$．

(4) $\varphi < (\neg \varphi)$, $\varphi < (\varphi \vee \psi)$, $\psi < (\varphi \vee \psi)$

(5) $t_i < (t_1 = t_2)$ $(i = 1, 2)$, $t_i < (t_1 \in t_2)$ $(i = 1, 2)$

<u>定義 3.5</u> $D(\varphi)$, $D(t)$ を次のように定義する．

(1) $D(t_1 = t_2) \longleftrightarrow D(t_1) = D(t_2)$

(2) $D(t_1 \in t_2) \longleftrightarrow D(t_1) \in D(t_2)$

(3) $D(\neg\varphi) \longleftrightarrow \neg D(\varphi)$

(4) $D(\varphi \vee \psi) \longleftrightarrow D(\varphi) \vee D(\psi)$

(5) $D(\exists^\alpha x_i\,\varphi(x_i)) \longleftrightarrow \exists t \in T_\alpha\ D(\varphi(t))$

(6) $D(\hat{x}_i^\alpha \varphi(x_i)) \longleftrightarrow \{D(t) \mid t \in T_\alpha \ \&\ D(\varphi(t))\}$

$L_\alpha = \{D(t) \mid t \in T_\alpha\}$, $L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha$.

定義 3.6　L-machine $\mathcal{M} = \langle On, F_0, J, C_i, T, K \rangle_{i<\omega}$:

(1). $P_< = \langle On, F_0, J, C_i \rangle_{i<\omega}$ は pairing machine

(2). φ が $\mathcal{L}$ の sentence ならば,

$T(\langle\varphi\rangle) = 1$ if $D(\varphi)$;　$T(\langle\varphi\rangle) = 0$ otherwise

(3). $\exists^\alpha x_i \varphi(x_i)$ が $\mathcal{L}$ の sentence で, $D(\exists^\alpha x_i \varphi(x_i))$ ならば,

$K(\langle \exists^\alpha x_i \varphi(x_i)\rangle) = \min\{t \in T_\alpha \mid D(\varphi(t))\}$

(4). (2), (3) により定まらない $T(\vec{\alpha})$, $K(\vec{\alpha})$ の値は, undefined.

L-machine $\mathcal{M}$ が collapsing, finiteness, direct limit の各性質をもつことを示そう.

定理 3.7　$\mathcal{M}$ は collapsing property をもつ.

(証明) X を $\mathcal{M}^\eta$ の subalgebra とし, $\pi : \bar{\eta} \to X$ を X の collapsing map とする. 定理 2.4 により $\pi : \bar{\eta} \to \eta$ は strong $P_<$-map である. $\bar{\varphi} < \bar{\eta}$ を $\mathcal{L}$ の sentence に対して,

$$D(\bar{\varphi}) \longleftrightarrow D(\pi(\bar{\varphi}))$$

がいえる. これより $\pi(T^{\bar{\eta}}(\vec{\alpha})) \simeq T^\eta(\pi(\vec{\alpha}))$ がいえる. また, $\exists^{\bar{\alpha}} x_i \bar{\theta}(x_i) < \bar{\eta}$ ならば, $\pi(\exists^{\bar{\alpha}} x_i \bar{\theta}(x_i)) = \exists^\alpha x_i \theta(x_i)$ となり $\bar{t} = K(\langle \exists^{\bar{\alpha}} x_i \bar{\theta}(x_i)\rangle)$ とすると, $\pi(\bar{t}) = K(\langle \exists^\alpha x_i \theta(x_i)\rangle)$ となる. ただし, $\alpha = \pi(\bar{\alpha})$, $\theta = \pi(\bar{\theta})$. よって $\pi(K^{\bar{\eta}}(\vec{\alpha})) \simeq K^\eta(\pi(\vec{\alpha}))$.

定理 3.8　$\mathcal{M}$ は finiteness property を持つ

（証明） $H_\eta \subseteq \eta$ を定理 2.5 の証明のようにとり、$H_\eta' =$
$= H_\eta \cup \{K(\langle\eta\rangle)\}$ とすればよい。$\boxtimes$

<u>定理 3.9</u> $\mathcal{M}$ は direct limit property をもつ

（証明） $\langle \eta_i, \pi_{ij} \rangle_{i \leq j \in I}$ を well-founded direct system of strong $\mathcal{M}$-maps とする．定理 2.6 により $\pi_{i\infty} : \eta_i \to \eta_\infty$ は strong $R_<$-map である．φ を $\mathcal{L}$ の sentence とすると，φ に関する帰納法により，$\varphi < \eta_i$ ならば，

$$D(\varphi) \longleftrightarrow D(\pi_{i\infty}(\varphi))$$

が成り立つことを示せる．これより直ちに

$$\pi_{i\infty}(T^{\eta_i}(\vec{\alpha})) \simeq T^{\eta_\infty}(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha})) \quad \text{for all } \vec{\alpha} \in \eta_i^{\omega}$$

また $\varphi = \exists^\alpha x_j\, \theta(x_j) < \eta_i$，$K^{\eta_i}(\langle\varphi\rangle) = t$ ならば，
$\pi_{i\infty}(\varphi) = \exists^{\pi_{i\infty}(\alpha)} x_j\ \pi_{i\infty}(\theta)(x_j)$ であり $K^{\eta_\infty}(\langle\pi_{i\infty}(\varphi)\rangle) = \pi_{i\infty}(t)$
となる事が簡単な計算により分かる．ゆえに，

$$\pi_{i\infty}(K^{\eta_i}(\vec{\alpha})) \simeq K^{\eta_\infty}(\pi_{i\infty}(\vec{\alpha})) \quad \text{for all } \vec{\alpha} \in \eta_\infty^{\omega} \quad \boxtimes$$

§4. <u>定義 4.1</u> $\langle \delta, \alpha, P \rangle$ が acceptable triple であるとは，

(1) $\delta, \alpha \in On$ & $\alpha \leqq \delta$

(2) P: finite $\subseteq \delta$

(3) $\delta = \mathcal{M}^\delta(\alpha \cup P)$

が成り立つことをいう．

<u>定義 4.2</u> $\pi:\langle\delta,\alpha,P\rangle\longrightarrow\langle\delta',\alpha',P'\rangle$ が acceptable map とは,

(1) $\langle\delta,\alpha,P\rangle$, $\langle\delta',\alpha',P'\rangle$ は acceptable triples

(2) $\pi:\delta\longrightarrow\delta'$ は medium $\mathcal{M}$-map

(3) $\alpha\leqq\alpha'$ & $\pi\restriction\alpha=$ the identity map of α

N を admissible set で, $\omega\in N$ なるものとする. $\langle\delta,\alpha,P\rangle,\langle\delta',\alpha',P'\rangle\in N$ で $\pi:\langle\delta,\alpha,P\rangle\longrightarrow\langle\delta',\alpha',P'\rangle$ が acceptable map ならば, N の中で π は自然に構成できて, $\pi\in N$ となる.

<u>定義 4.3</u> κ を limit ordinal とする. $\Pi=\langle\langle\delta_i,\alpha_i,P_i\rangle,\pi_{ij}\rangle_{i\leqq j\in I}$ が κ-direct limit system であるとは,

(1) $\langle\delta_i,\pi_{ij}\rangle_{i\leqq j\in I}$ は direct system of medium $\mathcal{M}$-maps

(2) $\pi_{ij}:\langle\delta_i,\alpha_i,P_i\rangle\longrightarrow\langle\delta_j,\alpha_j,P_j\rangle$ は acceptable map

(3) $\delta_i<\kappa$

(4) $\{\alpha_i\mid i\in I\}$ は cofinal in κ.

<u>補題 4.4</u> μ,κ を $\mu\geqq\kappa$ なる limit ordinals とする.

(*) $\forall\eta<\mu\ \forall\alpha<\kappa\ \forall Q\subseteq\eta\ [\alpha\leqq\eta\ \&\ Q:\text{有限}\rightarrow o(\mathcal{M}^\eta(\alpha\cup Q))<\kappa]$

が成り立てば, κ-direct limit system で, well-founded かつ, その極限が μ となるものが存在する.

(証明) $I=\{\langle\eta,\alpha,Q\rangle\mid\eta<\mu\ \&\ \alpha<\kappa\ \&\ \alpha\leqq\eta\ \&\ Q:\text{有限}\subseteq\eta\}$ とする. $i=\langle\eta,\alpha,Q\rangle\in I$ に対して $\eta_i=\eta$, $\alpha_i=\alpha$, $Q_i=Q$ で表わす. I に次の様な順序を入れる:

$$i \leqq j \longleftrightarrow \eta_i \leqq \eta_j \ \& \ \alpha_i \leqq \alpha_j \ \& \ Q_i \subseteq Q_j .$$

明らかに $\langle I, \leqq \rangle$ は directed set になる. $X_i = M^{\eta_i}(\alpha_i \cup Q_i)$ とし, $\rho_i : \delta_i \to X_i$ を collapsing map とすると (*) より $\delta_i < \kappa$. $P_i = \rho_i^{-1} Q_i$ とおく. $i \leqq j$ ならば, $X_i \subseteq X_j$ だから定理 1.6 により, $\pi_{ij} = \rho_j^{-1} \circ \rho_i : \delta_i \to \delta_j$ は medium M-map になる. $\Pi = \langle\langle \delta_i, \alpha_i, P_i \rangle, \pi_{ij} \rangle_{i \leqq j}$ が κ-direct limit system でその極限が μ であることは容易に確かめられる. ⊠

•

<u>補題 4.5</u> κ を limit ordinal, $\langle I_1, \leqq_1 \rangle$, $\langle I_2, \leqq_2 \rangle$ を directed sets で $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ となるものとする. $\Pi_1 = \langle\langle \xi_i, \alpha_i, P_i \rangle, \rho_{ij} \rangle_{i,j \in I_1}$, $\Pi_2 = \langle\langle \eta_i, \beta_i, Q_i \rangle, \theta_{ij} \rangle_{i,j \in I_2}$ が well-founded κ-d.l.s. で, $\varinjlim \Pi_1 \leqq \varinjlim \Pi_2$ ならば, 次の条件をみたす κ-d.l.s. $\Pi = \langle\langle \zeta_i, \gamma_i, R_i \rangle, \pi_{ij} \rangle_{i,j \in I}$ が存在する.

(1) $I = I_1 \cup I_2$

(2) $i, j \in I,\ i \leqq j \longrightarrow (i, j \in I_1 \ \& \ i \leqq_1 j) \vee (i, j \in I_2 \ \& \ i \leqq_2 j)$
$\vee\ (i \in I_1 \ \& \ j \in I_2)$

(3)
$$\langle \zeta_i, \gamma_i, R_i \rangle = \begin{cases} \langle \xi_i, \alpha_i, P_i \rangle & \text{if } i \in I_1 \\ \langle \eta_i, \beta_i, Q_i \rangle & \text{if } i \in I_2 \end{cases}$$

(4) $\pi_{ij} = \rho_{ij}$ if $i \leqq_1 j$, $\quad \pi_{ij} = \theta_{ij}$ if $i \leqq_2 j$

(証明) $i \in I_1$, $j \in I_2$ に対し $i \leqq j$ と π_{ij} を定めればよい.

$$i \leqq j \longleftrightarrow \xi_i \leqq \eta_j \ \& \ \alpha_i \leqq \beta_j \ \& \ \rho_{i\infty}{}'' P_i \subseteq rng(\theta_{j\infty})$$

とすると，$rng(\rho_{i\infty}) \subseteq rng(\theta_{j\infty})$ となる．そこで $\pi_{ij} = \theta_{j\infty}^{-1} \circ \rho_{i\infty}$ とすれば，定理 1.6 により $\pi_{ij}: \xi_i \to \eta_j$ は medium $\mathcal{M}$-map になる．⊠

補題 4.6　κ を L の中の uncountable cardinal とし，$h: L_{\bar\kappa} \to L_\kappa$ を elementary embedding とする．well-founded $\bar\kappa$-d.l.s. $\bar\Pi = \langle\langle \bar\delta_i, \bar\alpha_i, \bar P_i \rangle, \bar\pi_{ij} \rangle_{i \le j \in I}$ に対して，$\Pi = h(\bar\Pi) = \langle\langle h(\bar\delta_i), h(\bar\alpha_i), h(\bar P_i) \rangle, h(\bar\pi_{ij}) \rangle_{i \le j \in I}$ とする．もし Π が well-founded κ-d.l.s. ならば，medium $\mathcal{M}$-map $h^*: \bar\mu \to \mu$ で，$h^* \upharpoonright \bar\kappa = h \upharpoonright \bar\kappa$ となるものが存在する．ただし，$\bar\mu = \varinjlim \bar\Pi$，$\mu = \varinjlim \Pi$．

（証明）$\bar\sigma < \bar\delta_i$ に対して，

$$h^*(\bar\pi_{i\infty}(\bar\sigma)) = \pi_{i\infty}(h(\bar\sigma))$$

とすればよい．ただし $\pi_{ij} = h(\bar\pi_{ij})$．⊠

§5.　$\boldsymbol{S}$ により，次の命題を表わす：

$$\forall X \subseteq On \; [\, |X| > \omega \longrightarrow \exists Y \in L \; (X \subseteq Y \;\&\; |X| = |Y|)\,].$$

また $\boldsymbol{I}$ により，次の命題を表わすことにする：

$$\forall \bar\mu \, \forall \pi \, [\bar\mu: \text{regular cardinal} \;\&\; \pi: \bar\mu \to On \text{ medium } \mathcal{M}\text{-map} \longrightarrow \pi = \text{the identity map on } \bar\mu\,]$$

この§で，$\boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{S}$ を証明する．そこで $\neg \boldsymbol{S}$ を仮定する．

<u>定義 5.1</u>　$\kappa = \min\{\lambda \mid \exists X \subseteq \lambda\ [|X| > \omega\ \&\ \forall Y \in L\ (X \subseteq Y \to |X| < |Y|)]\}$.
また $X \subseteq \kappa$ を

(**)　$|X| > \omega\ \&\ \forall Y \in L\ (X \subseteq Y \to |X| < |Y|)$

をみたすものとする.

<u>補題 5.2</u>　(1)　$\forall Y \in L\ (X \subseteq Y \to |Y|^L \geqq \kappa)$

(2)　$L \vDash \kappa$ *is a cardinal*

(3)　$\bigcup X = \kappa$

(4)　$|X| < |\kappa|$

(証明)　κの最小性およびXが(**)を満す事から明らか. ⊠

<u>補題 5.3</u>　次の条件をみたす *elementary embedding* $h: L_{\bar{\kappa}} \longrightarrow L_\kappa$ が存在する:

(1)　$X \subseteq rng(h)$,　$|X| = rng(h)$

(2)　$\bar{\pi}$ が *well-founded* $\bar{\kappa}$-*d.l.s.* ならば, $h(\bar{\pi})$ は *well-founded* κ-*d.l.s.* である.

この補題の証明は、次の§でする. 今、$h: L_{\bar{\kappa}} \to L_\kappa$ を上の様なものとする.

<u>定理 5.4</u>　$\boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{S}$

(証明)　$\neg \boldsymbol{S}$ と仮定し、$\neg \boldsymbol{I}$ を示す. 補題 4.4, 4.6, 5.2, 5.3 により、或る *regular cardinal* $\bar{\mu} \geqq \bar{\kappa}$ に対して,

(*)　$\forall \bar{\eta} < \bar{\mu}\ \forall \bar{\alpha} < \bar{\kappa}\ \forall \bar{Q} \subseteq \bar{\eta}\ [\bar{\alpha} \leqq \bar{\eta}\ \&\ \bar{Q}$:有限 $\to o(\mathcal{M}^{\bar{\eta}}(\bar{\alpha} \cup \bar{Q})) < \bar{\kappa}]$

を示せばよい. 我々は、かってな *limit ordinal* $\bar{\mu} \geqq \bar{\kappa}$ に対

して (*) が成り立つ事を示す. (*) が成り立たないとすると
$\exists\bar{\eta}<\bar{\mu}$ such that

$$\exists\bar{\alpha}<\bar{\kappa}\ \exists\bar{Q}\subseteq\bar{\eta}\ [\bar{\alpha}\leqq\bar{\eta}\ \&\ \bar{Q}:\text{有限}\ \&\ o(\mathcal{M}^{\bar{\eta}}(\bar{\alpha}\cup\bar{Q}))\geqq\bar{\kappa}\,]$$

そのような $\bar{\eta}$ で最小のものをとる. 定理1.10により $\bar{\eta}$ は limit ordinal である. まず, $\bar{\eta}=\mathcal{M}^{\bar{\eta}}(\bar{\alpha}\cup\bar{Q})$ と仮定してよい事に注意する. (さもなければ, $\pi:\tilde{\eta}\longrightarrow\mathcal{M}^{\bar{\eta}}(\bar{\alpha}\cup\bar{Q})$ を collapsing map とし, $\bar{Q}'=\pi^{-1}\bar{Q}$ とすると $\tilde{\eta}=\mathcal{M}^{\tilde{\eta}}(\bar{\alpha}\cup\bar{Q}')$ であるが, $\bar{\eta}$ の最小性から $\tilde{\eta}=\bar{\eta}$ となる). $\bar{\eta}$ に対しては (*) が成り立つから, medium $\mathcal{M}$-map $h^*:\bar{\eta}\longrightarrow On$ で, $h^*\restriction\bar{\kappa}=h\restriction\bar{\kappa}$ となるものが存在する. $\eta=\sup\{h^*(\bar{\sigma})+1\mid\bar{\sigma}<\bar{\eta}\}$ とすれば, $h^*:\bar{\eta}\longrightarrow\eta$ は strong $\mathcal{M}$-map になる. $Y=\mathcal{M}^{\eta}(h(\bar{\alpha})\cup h^{*}{}''\bar{Q})$ とすると、明らかに $Y\in L$. しかも $|Y|^L=|h(\bar{\alpha})|^L<\kappa$.
また、定理1.7, 補題5.3より

$$X\subseteq rng(h)\subseteq rng(h^*)=h^*\,\mathcal{M}^{\bar{\eta}}(\bar{\alpha}\cup\bar{Q})=\mathcal{M}^{\eta}(h^{*}{}''\bar{\alpha}\cup h^{*}{}''\bar{Q})$$

明らかに $\mathcal{M}^{\eta}(h^{*}{}''\bar{\alpha}\cup h^{*}{}''\bar{Q})\subseteq Y$ であるから、$X\subseteq Y$.
以上の事は、補題5.2 (1) に反する. ⊠

§6. この§で、補題5.3の証明を行う. 証明は $cf(\kappa)=\omega$ の場合と $cf(\kappa)>\omega$ の場合に分けてする. 最初に、$cf(\kappa)=\omega$ の場合を考えよう.

定義 6.1　$Z\subseteq L_\kappa$ とし, $\Pi=\langle\langle\delta_i,\alpha_i,P_i\rangle,\pi_{ij}\rangle_{i\leq j\in I}$ を κ-d.l.s.

とする.

(1) $\Pi \subseteq Z \longleftrightarrow \delta_i, \alpha_i, P_i, \pi_{ij} \in Z$

(2) Π は Z-well-founded でない $\longleftrightarrow \exists \langle i_n \mid n<\omega \rangle \exists \langle \sigma_n \mid n<\omega \rangle$

$$i_n \leq i_{n+1} \in I \ \& \ \sigma_n < \delta_{i_n} \ \& \ \pi_{i_n i_{n+1}}(\sigma_n) > \sigma_{n+1}$$

<u>補題 6.2</u> $Z \prec L_\kappa$, $X \subseteq Z$, $|X| = |Z|$ と仮定すると、次の条件をみたす $Z' \prec L_\kappa$ が存在する:

(1) $Z \subseteq Z'$ & $|Z'| = |X|$

(2) $\Pi \subseteq Z$ が well-founded でない κ-d.l.s. ならば、Π は Z'-well-founded でない.

(証明) $h: L_{\bar{\kappa}} \to L_\kappa$ を $rng(h) = Z$ なる elementary embedding とする. well-founded $\bar{\kappa}$-d.l.s. $\bar{\Pi}$ で, $h(\bar{\Pi})$ が well-founded でないものが存在するとし, $\underrightarrow{\lim}\,\bar{\Pi}$ が最小になるものを $\bar{\Pi}_1 = \langle\langle \bar{\xi}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{P}_i \rangle, \bar{\rho}_{ij} \rangle_{i,j \in I_1}$ とする. $h(\bar{\Pi}_1) = \langle\langle \xi_i, \alpha_i, P_i \rangle, \rho_{ij} \rangle_{i,j \in I_1}$ は well-founded でないから, 定理 1.11 より, 列 $\langle i_n \mid n<\omega \rangle$, $\langle \sigma_n \mid n<\omega \rangle$ で,

$$i_n \leq_1 i_{n+1} \ \& \ \sigma_n < \xi_{i_n} \ \& \ \rho_{i_n i_{n+1}}(\sigma_n) > \sigma_{n+1}$$

をみたすものが存在する. $Z' \prec L_\kappa$ を $Z \cup \{\sigma_n \mid n<\omega\} \subseteq Z'$ かつ $|Z'| = |Z|$ なるものとする. (2) を示そう. $\Pi_2 = \langle\langle \eta_i, \beta_i, Q_i \rangle, \theta_{ij} \rangle_{i \leq j \in I_2} \subseteq Z$ を well-founded でない κ-d.l.s. とする. $\bar{\Pi}_2 = \langle\langle \bar{\eta}_i, \bar{\beta}_i, \bar{Q}_i \rangle, \bar{\theta}_{ij} \rangle_{i,j \in I_2}$ を $h(\bar{\Pi}_2) = \Pi_2$ なる $\bar{\kappa}$-d.l.s. と

する. $\overline{\Pi}_2$ は well-founded であると仮定してよい. すると, $\varinjlim \overline{\Pi}_1 \leqq \varinjlim \overline{\Pi}_2$ であるから, 補題 4.5 の条件 (1)〜(4) をみたす κ-d.l.s. $\overline{\Pi} = \langle\langle \bar{\varsigma}_i, \bar{\gamma}_i, \bar{R}_i \rangle, \bar{\pi}_{ij} \rangle_{i,j\in I}$ が存在する. 今, $j_n \in I_2$ を $i_n \leqq j_n$ なるようにとり, $\pi_{ij} = h(\bar{\pi}_{ij})$, $\sigma_n' = \pi_{i_n j_n}(\sigma_n)$ とすると $\sigma_n' \in Z'$ であって $\theta_{j_n j_{n+1}}(\sigma_n') > \sigma_{n+1}'$ となる. 従って, Π_2 は Z'-well-founded でない. ⊠

<u>補題 5.3 の証明 ($cf(\kappa)=\omega$ の場合)</u>

$Z \prec L_\kappa$ で, 次の (a), (b) をみたすものを求めればよい.

(a) $X \subseteq Z$, $|Z| = |X|$

(b) $\Pi \subseteq Z$ が Z-well-founded κ-d.l.s. ならば, Π は well-founded である.

いま, Π の index set が可算であるとき, Π を可算な system ということにすると, (b) は次の (b′) におきかえてよい事に注意しよう.

(b′) $\Pi \subseteq Z$ が可算な Z-well-founded κ-d.l.s. ならば, Π は well-founded である.

そこで, (a), (b′) をみたす Z をつくろう. 補題 6.2 を繰返し用いることにより, 次の条件 (i)〜(iii) をみたす Z_α ($\alpha < \omega_1$) が存在する:

(i) $Z_\alpha \prec L_\kappa$, $X \subseteq Z_\alpha$, $|Z_\alpha| = |X|$

(ii) $\alpha < \beta \longrightarrow Z_\alpha \subseteq Z_\beta$

(iii) $\Pi \subseteq Z_\alpha$ が well-foundedでない κ-d.l.s. ならば、Π は $Z_{\alpha+1}$-well-founded でない.

$Z = \bigcup_{\alpha<\omega_1} Z_\alpha$ とおけば, Z が (a), (b') をみたすことは明らかであろう. ⊠

次に $cf(\kappa) > \omega$ の場合を考えよう. 必要ならば、X の κ での closure を考えることにより、X は closed unbounded in κ と仮定してよい. $S = \{\lambda \in X \mid cf(\lambda) = \omega\}$ とする.

<u>補題 6.3</u>　$Z \prec L_\kappa$ を $X \subseteq Z$, $|Z| = |X|$ なるものとすると、次の (1), (2) をみたす $Z' \prec L_\kappa$ が存在する:

(1) $Z \subseteq Z'$, $|Z'| = |X|$

(2) $\lambda \in S$ で, $\Pi \subseteq Z$ が well-founded でない λ-d.l.s. ならば, Π は Z'-well-founded でない.

(証明) 補題 6.2 の証明から分かるように、各 $\lambda \in S$ に対し, 適当な可算集合 $A_\lambda \subseteq \lambda$ をとれば,

$$Z \cup A_\lambda \subseteq Z' \prec L_\kappa \longrightarrow Z' \text{ は } \lambda \text{ に対して (2) をみたす}$$

とできる. そこで, $Z' \prec L_\kappa$ を $\bigcup_{\lambda \in S} A_\lambda \cup Z \subseteq Z'$ かつ, $|Z'| = |X|$ となるようにとればよい. ⊠

これから、前と同様にして,

<u>系 6.4</u>　次の (1), (2) をみたす $Z \prec L_\kappa$ が存在する:

(1) $X \subseteq Z$, $|Z| = |X|$

(2) $\lambda \in S$ で，$\Pi \subseteq Z$ が可算な Z-well-founded λ-d.l.s. ならば，Π は well-founded である．

補題 5.3 の証明（$cf(\kappa) > \omega$ の場合）

$\Pi = \langle\langle\langle \delta_i, \alpha_i, P_i \rangle, \pi_{ij} \rangle_{i \le j \in I} \subseteq Z$ を well-founded でない κ-d.l.s. とする．Π が Z-well-founded でない事を示せばよい．（Z は系 6.4 の条件をみたすもの）．

Π は well-founded でないから，$\langle i_n \mid n<\omega \rangle$, $\langle \sigma_n \mid n<\omega \rangle$ で，すべての $n<\omega$ に対し，

$$i_n \in I \ \& \ \sigma_n \in \delta_{i_n} \ \& \ i_n \le i_{n+1} \ \& \ \pi_{i_n i_{n+1}}(\sigma_n) > \sigma_{n+1}$$

となるものが存在する．$cf(\kappa) > \omega$ なることと，X が closed unbounded in κ なることから，次の (i) ～ (iii) をみたすような $j_n \in I$ をみつけることができる：

(i) $i_n \le j_n$, $j_n \le j_{n+1}$

(ii) $\lambda = \sup_{n<\omega} \delta_{j_n} \in S$

(iii) $\Pi' = \Pi \restriction \{ j_n \mid n<\omega \}$ は可算な λ-d.l.s. である．

そこで，$\sigma_n' = \pi_{i_n j_n}(\sigma_n)$ とすると，$\pi_{j_n j_{n+1}}(\sigma_n') > \sigma_{n+1}'$ であるから，Π' は well-founded でない．Z のとり方から，Π' は Z-well-founded でない．したがって Π も Z-well-founded でない．$\boxtimes$

最後に Covering Theorem を証明しよう. $\neg \mathbf{S}$ と仮定する. $h: L_{\bar\kappa} \to L_\kappa$ を補題 5.3 のようにとる. 定理 5.4 の証明から分かるように、

$(*)$ $\forall \bar\eta\, \forall \bar\alpha < \bar\kappa\, \forall \bar Q \subseteq \bar\eta\, [\bar\alpha \leqq \bar\eta\ \&\ \bar Q$: 有限 $\to \rho(M^{\bar\eta}(\bar\alpha \cup \bar Q)) < \bar\kappa]$

が成り立つ. $I = \{\langle \bar\eta, \bar\alpha, \bar Q \rangle \mid \bar\eta \in On\ \&\ \bar\alpha < \bar\kappa\ \&\ \bar\alpha \leqq \bar\eta\ \&\ \bar Q$:有限 $\&\ \bar Q \subseteq \bar\eta\}$ とすると I は proper class になるが、これから補題 4.4 のように $\bar\kappa$-d.l.s. $\bar\Pi = \langle\langle \bar\delta_i, \bar\alpha_i, \bar P_i \rangle, \bar\pi_{ij} \rangle_{i,j \in I}$ をつくると, $\varinjlim_I \bar\Pi = On$ となる. $\Pi = h(\bar\Pi)$ とすると, Π は well-founded κ-d.l.s. で $\varinjlim_I \Pi = On$ となる. そこで補題 4.6 のように $h^*: On \to On$ を定めると, h^* は M から M へ a monomorphism となる. 今 $j: L \to L$ を $j(D(\bar E)) = D(h^*(\bar E))$ とすれば, j は nontrivial な Σ_1 elementary embedding になる. ☒

参考文献

[1] R. B. Jensen : The fine structure of the constructible hierarchy, Ann. Math. Logic 4 (1972)

[2] K. J. Devlin & R. B. Jensen ; Marginalia to a theorem of Silver, Lecture Notes in Math. 499 Springer-Verlag (1975) 115-142

Silver machine について

訂正

1. 定義4.3に次の(5), (6)を付け加える.

(5) $\forall i, j \in I \;\; \exists k \in I \; [i < k \wedge j < k]$

(6) $i < j \Rightarrow \sup\{\pi_{ij}(\nu)+1 : \nu < \delta_i\} < \delta_j$

2. 補題4.4の証明において, I上の順序を次のようにかえる:

$$i < j \longleftrightarrow \eta_i \leqq \eta_j \;\&\; \alpha_i \leqq \alpha_j \;\&\; Q_i \subseteq Q_j \;\&\; \eta_i \in Q_j$$

3. 補題4.5の証明において, ≤ の定義を次のようにする.

$$i \leq j \longleftrightarrow \xi_i \leqq \eta_j \;\&\; \alpha_i \leqq \beta_j \;\&\; \rho_{i\infty}'' P_i \subseteq rng(\theta_{j\infty})$$
$$\& \; \sup\{\rho_{i\infty}(\nu)+1 \mid \nu < \xi_i\} \in rng(\theta_{j\infty})$$