数理解析研究所講究録
第 362 巻 1979 年 157-165

Sheaf of structures により保存される sentence について

早大　理工　　廣瀬　健
高橋　真

[5]に於いて R. Mansfield は "Is every sentence prserved by global sections a Horn sentence ?" という問題を提示しているがここではこれに対する肯定的な答を与え，それに関連して，いろいろな Sheaf of structures の global sections により保存される sentence について考察する。

§0　準備

$\mathcal{L}$: first order language に対し，$\mathbb{M}_{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$-structures とその間の homomorphisms とから成る category とする。X: top. sp. に対し，functor $P: \mathcal{O}(X)^{op} \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathcal{L}}$ を presheaf of structures と呼び (X, P) と書くことにする。($\mathcal{O}(X)$ は X の open sets 全体のなす category) presheaf of structures (X, P) が次の条件 1), 2) を満たす時 Sheaf of structures と呼ぶ。

1) $\forall U \in \mathcal{O}(X)\ \forall \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$: open covering of U $\forall \{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ s.t. $a_\alpha \in P(U_\alpha)$

に対し $\forall \alpha, \beta \in A \ P^{u_\alpha}_{u_\alpha \cap u_\beta}(a_\alpha) = P^{u_\beta}_{u_\alpha \cap u_\beta}(a_\beta) \Longrightarrow \exists! a \in P(u) \ \forall \alpha \in A \ P^{u}_{u_\alpha}(a) = a_\alpha$

2) $\forall R(x_1, \cdots, x_n)$: atomic formula $\forall u \in \mathcal{O}(X) \ \forall \{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$: open covering of u

$\forall a_1, \cdots, a_n \in P(u)$ に対し

$\forall \alpha \in A \quad P(u_\alpha) \models R(P^{u}_{u_\alpha}(a_1), \cdots, P^{u}_{u_\alpha}(a_n)) \Longrightarrow P(u) \models R(a_1, \cdots, a_n)$

(P^{u}_{v} は P により決まる $P(u)$ から $P(v)$ への homomorphism)

P_x を $x \in X$ に於ける P の stalk とする。P^{u}_{x} を P により決まる $P(u)$ から P_x への canonical map とするとき $P^{u}_{x}(a)$ を $[a]_x$ と書くことにする。C : constant symbol in $\mathcal{L}$ に対し C の P_x での解釈 C_{P_x} を $C_{P_x} = [C_{P(u)}]_x$ for some $u \ni x$ により、また f : n-ary function symbol in $\mathcal{L}$ に対し f の P_x での解釈 f_{P_x} を $b_1, \cdots, b_n \in P_x$ に対し $f_{P_x}(b_1, \cdots, b_n) = [f_{P(u)}(a_1, \cdots, a_n)]_x$ for some $u \ni x$, $a_1, \cdots, a_n \in P(u)$ s.t. $[a_k]_x = b_k$ $(1 \leq k \leq n)$ により与える。上の定義は $u, a_1, \cdots, a_n \in P(u)$ のとり方によらない。また $R(x_1, \cdots, x_n)$: n-ary atomic formula $b_1, \cdots, b_n \in P_x$ に対し、$P_x \models R(b_1, \cdots, b_n) \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \exists u \ni x \ \exists a_1, \cdots, a_n \in P(u)$ s.t. $[a_k]_x = b_k$ $(1 \leq k \leq n)$ $P(u) \models R(a_1, \cdots, a_n)$ とする。以上の定義より P_x は $\mathcal{L}$-structure となる。(X, P) : sheaf of structures に対し $P(X)$ を global sections of (X, P) と呼ぶ。

X : top. sp. A : $\mathcal{L}$-structure とする。A に discrete top. を入れた時、$P(u) = \{f \mid f : u \xrightarrow{\text{conti}} A\}$ $(u \in \mathcal{O}(X))$, $P^{u}_{v}(f) = f \restriction v$ $(v \subset u$ $f \in P(u))$, C : constant symbol in $\mathcal{L}$ に対し $C_{P(u)}(x) = C_A$ $(x \in u)$ f : function symbol in $\mathcal{L}$ に対し $f_{P(u)}(f_1, \cdots, f_n)(x) = f_A(f_1(x), \cdots, f_n(x))$

$P(u) \models R(f_1, \cdots, f_n) \Leftrightarrow \forall x \in u \ \ A \models R(f_1(x), \cdots, f_n(x))$ により決まる sheaf of structures を constant A-sheaf と呼び，(X, A) と書き $P(X)$を特に$\Gamma(X, A)$と書くことにする。

次の条件(*)，(**)を満たす sheaf of structures (X, P) をそれぞれ(*)-sheaf，(**)-sheafと呼ぶことにする。

(*) $\forall x \in X \ \forall b \in P_x \ \exists a \in P(X) \ [[a]_x = b]$

(**) X: Boolean space，任意の formula φ，任意の $a_1, \cdots, a_n \in P(X)$ に対し $\{x \in X \mid P_x \models \varphi([a_1]_x, \cdots, [a_n]_x)\} \in C(X)$ である.

但し $C(X)$: Xの clopen set 全体

（条件(**)は Comer's condition と呼ばれている。[2]）

sentence φ が任意の sheaf of structures (resp., constant sheaf (*)-sheaf，(**)-sheaf) に於いて，global section が存在して，任意の stalkでφが成立するならば，常にφが global sections で成立する時，φを sheaf sentence (constant sheaf sentence, (*)-sheaf sentence，(**)-sheaf sentence) と呼ぶ。

Remark $\mathbb{M}_{\mathcal{L}}$ では empty structure を除外していない。しかし，$\mathcal{L}$に constant symbol がある場合は$\mathbb{M}_{\mathcal{L}}$に empty structure はない。従って constant symbol がある時，常に global section が存在する。しかし，拳の場合には，empty であることもありうる。

§1 Constant sheaf sentence

Lemma 1.1　constant A-sheaf (X, A) に於いて，$\Gamma(X, A)$ は任意の formula φ に対し $[\![\varphi(f_1, \cdots, f_n)]\!] = \{x \in X \mid A \models \varphi(f_1(x), \cdots, f_n(x))\}$ と value を決めることにより，Maximum Principle, Finite completeness property を満たす $C(X)$-valued structure となる。

proof）$f_1, \cdots, f_n \in \Gamma(X, A)$ に対し $U_x = f_1^{-1}(f_1(x)) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(f_n(x))$ とおくと U_x は clopen set であり，$X_0 = \{x \in X \mid A \models \varphi(f_1(x), \cdots, f_n(x))\} = \bigcup_{x \in X_0} U_x$，$X_1 = \{x \in X \mid A \models \neg\varphi(f_1(x), \cdots, f_n(x))\} = \bigcup_{x \in X_1} U_x$ で $X_0 \cap X_1 = \phi$, $X_0 \cup X_1 = X$ であるから，$[\![\varphi(f_1, \cdots, f_n)]\!] = \{x \in X \mid A \models \varphi(f_1(x), \cdots, f_n(x))\} \in C(X)$ である。

Boolean Algebra としての $C(X)$ の $+, \cdot, \sim$ は集合としての $\cup, \cap, {}^c$，であるから，$[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] + [\![\psi]\!]$，$[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cdot [\![\psi]\!]$，$[\![\neg\varphi]\!] = \sim[\![\varphi]\!]$ は明らか。また $[\![\exists y\, \varphi(y, f_1, \cdots, f_n)]\!]$ は clopen であるから

$$[\![\exists y\, \varphi(y, f_1, \cdots, f_n)]\!] = \bigcup_{g \in \Gamma(X, A)} \{x \in X \mid A \models \varphi(g(x), f_1(x), \cdots, f_n(x))\}$$
$$= \bigvee_{g \in \Gamma(X, A)} [\![\varphi(g, f_1, \cdots, f_n)]\!] \text{ である。}$$

同様にして $[\![\forall y\, \varphi(y, f_1, \cdots, f_n)]\!] = \bigwedge_{g \in \Gamma(X, A)} [\![\varphi(g, f_1, \cdots, f_n)]\!]$ である。

Equality Axiom を満たすことは定義より明らか。

従って $\Gamma(X, A)$ は $C(X)$-valued structure である。

次に任意の $x \in X$ に対し，$A \models \exists y\, \varphi(y, f_1(x), \cdots, f_n(x))$ のとき $A \models \varphi(a_x, f_1(x), \cdots, f_n(x))$ となる a_x を fix する。また $A \not\models \exists y\, \varphi(y, \cdots)$ のときは任意の a_x を fix する。

$x, x' \in X$ に対し，$x \sim x' \Longleftrightarrow f_1(x) = f_1(x') \wedge \cdots \wedge f_n(x) = f_n(x')$ により

equivalence relationを決める。$X/\sim$ の代表元の集合 $\{x_\alpha\}_\alpha$ とする。そこで，$h(x)=a_{x_\alpha}$ iff $x\sim x_\alpha$ により $h: X\longrightarrow A$ を決める。任意の A の subset A' に対し，$h^{-1}(A')=\bigcup_{a_{x_\alpha}\in A'} U_{x_\alpha}$ である。但し，$U_{x_\alpha}=f_1^{-1}(f_1(x_\alpha))\cap\cdots\cap f_n^{-1}(f_n(x_\alpha))$。従って h は連続である。
$A\models\exists y\,\varphi(y,f_1(x),\cdots,f_n(x))\longleftrightarrow A\models\varphi(h(x),f_1(x),\cdots,f_n(x))$ より
$[\![\exists y\,\varphi(y,f_1,\cdots,f_n)]\!]=[\![\varphi(h,f_1,\cdots,f_n)]\!]$ よって Maximum Principle が成立する。また，$u\in\mathcal{O}(X)$，$f,g\in\Gamma(X,A)$ に対し，$h(x)=f(x)$ if $x\in u$
$h(x)=g(x)$ otherwise により $h: X\longrightarrow A$ を定義すると h は連続で，$[\![h=f]\!]\supseteq u$，$[\![h=g]\!]\supseteq u^c$ であるから，Finite completeness property を満たす。 ⊣

Lemma 1.2 (Ellentuck - Mansfield - Volger)
$\langle M, B\rangle$ を Maximum Principle，Finite completeness property を満たす B-valued structure とする。任意の $\mathcal{L}$-sentence φ に対し，Boolean Algebras の formula Φ と $\mathcal{L}$-sentences $\theta_1,\cdots,\theta_n$ が存在して，$M\models\varphi$ iff $B\models\Phi([\![\theta_1]\!],\cdots,[\![\theta_n]\!])$ が成り立つ。

Cor. 1.3 Maximum Principle，Finite completeness property，Almost two valued（任意の sentence φ に対し，$[\![\varphi]\!]=\mathbb{1}$ or $[\![\varphi]\!]=\mathbb{0}$ であること）を満たす，任意の Boolean valued structures $\langle M, B\rangle$，$\langle M', B'\rangle$ に対し，$B\equiv B'$ かつ任意の sentence φ に対

し $[\![\varphi]\!]_M = 1$ iff $[\![\varphi]\!]_{M'} = 1$ ならば $M \equiv M'$ である。

proof Lemma 1.2 より明らか $\dashv$

Th. 1.4 次の3つの条件は同値である。

1) φ は reduced power sentence である。

2) φ は constant sheaf sentence である。

3) φ は Boolean space 上の constant sheaf sentence である。

proof) 2) $\longrightarrow$ 3) は明らか。

1) $\longrightarrow$ 2) φ を reduced power sentence とする。任意の top. sp. X に対し $C(X) \cong 2^I/F$ となる I と I 上の filter F が存在する。任意の $\mathcal{L}$-st. A に対し，Lemma 1.1 より $\Gamma(X, A)$ は Lemma 1.3 の仮定を満たす。reduced power A^I/F が Lemma 1.3 の仮定を満たすことは明らかである。また任意の sentence φ に対し，$[\![\varphi]\!]_{\Gamma(X,A)} = 1$ iff $A \models \varphi$ iff $[\![\varphi]\!]_{A^I/F} = 1$ である。従って Lemma 1.3 より $\Gamma(X, A) \equiv A^I/F$。よって仮定より $A \models \varphi$ ならば $A^I/F \models \varphi$ であるから，$A \models \varphi$ ならば $\Gamma(X, A) \models \varphi$ である。よって φ は constant sheaf sentence である。

3) $\longrightarrow$ 1) φ を Boolean space 上の constant sheaf sentence とする。上と同様にして任意の $\mathcal{L}$-st. A と任意の I, F (I 上の filter) に対し，Lemma 1.3 より $\Gamma((2^I/F)^*, A) \equiv A^I/F$ である。（但し $(2^I/F)^*$ は $2^I/F$ の dual space である。）従って仮定より $A \models \varphi$ ならば

$\Gamma((2^I/F)^*, A) \models \varphi$ であるから，$A \models \varphi$ ならば $A^I/F \models \varphi$ である。
よって φ は reduced power sentence である。 ⊣

Th 1.5　sheaf sentence はある Horn sentence に equivalent である。

proof) sheaf sentence は Th 1.4 より reduced power sentence であり，また direct product sentence でもあるから，reduced product sentence である。よってある Horn sentence に equivalent である。 ⊣

Th 1.5 により R. Mansfield の問題に対する肯定的な答が得られる。

§2　(*)-sheaf sentences と (**)-sheaf sentences

Th 2.1　i) (*)-sheaf sentence はある Horn sentence に equivalent である。
ii) Special Horn sentence は (*)-sheaf sentence である。

proof) i) constant sheaf は (*)-sheaf である。また (*)-sheaf sentence は direct product sentence でもあるから，Th 1.5 と同様に (*)-sheaf sentence はある Horn sentence に equivalent である。

ii) 条件(*)は global sections が stalks の subdirect product である事を示している。よって Special Horn sentence は(*)-sheaf sentenceである。

Th 2.2　次の2条件は同値である。

i)　φ は(**)-sheaf sentence である。

ii)　φ はある Horn sentence に equivalent である。

proof) i)$\rightarrow$ii)　(**)-sheaf sentence は Boolean space 上の constant sheaf sentenceであり，また finite direct product sentence でもあるから，ある Horn sentenceに equivalent である。

ii)$\rightarrow$i)　Horn formula が(**)-sheaf で保存されることを示せば十分である。Horn formula の構成についての inductionで証明する。universal Horn formula は任意の sheaf で保存されるから，Horn formula $\exists y\varphi(y)$ が(**)-sheaf で保存されることを示せば十分である。(**)-sheaf の global sections は条件(**)より Maximum Principle を満たす Boolean valued structure となる。従って $\langle X, P\rangle$；(**)-sheaf とすると，$\forall x\in X\ P_x\models\exists y\varphi(y)$ i.e. $[\![\exists y\varphi(y)]\!]=\mathbb{1}$ ならば，ある $f\in P(X)$ が存在して $[\![\varphi(f)]\!]=\mathbb{1}$ i.e. $\forall x\in X\ P_x\models\varphi([f]_x)$である。よって induction の仮定より $P(X)\models\varphi(f)$ であるから，$P(X)\models\exists y\varphi(y)$ となる。　⊣

H. Volgerはこことは違った方法により，R. Mansfieldの問題を解いている（[7]）。

REFERENCES

[1] C. C. Chang and H. J. Keisler, Model theory, North Holland, Amsterdam 1973.

[2] S. D. Comer, Ellementary properties of structures of sections, Bol. Soc. Math. Mexicana, Ser. 2 19 (1974) pp 78-85.

[3] E. Ellentuck, Boolean valued rings, Fund. Math. 96 (1977) pp 67-86.

[4] D. P. Ellerman, Sheaves of structures and generalized ultraproducts, Ann. Math. Logic, 7 (1974) pp 163-195.

[5] R. Mansfield, Sheaves and normal submodels, J. of Symbolic Logic, 42 (1977) pp 241-250.

[6] H. Volger, The Feferman-Vaught theorem revisited, Colloq. Math. 36 (1976) pp 1-11.

[7] ———, Preservation theorems for limits of structures and global sections of sheaves of structures, Math. Z. 166 (1979) pp 27-53.