数理解析研究所講究録
第 364 巻 1979 年 33-44

ON THE MODULUS OF PATH-FAMILIES

阪大 教養　柴田敬一

擬等角写像の研究に有用な曲線族の modulus がもつ基本性質について述べる。最終の結果は知られた事実であるが，方法は従来のものと異なり，extremal length の定義と、調和函数・積分の古典的定理とのみに依存し，補助の等角写像を用いない。以下においては、試みに $\mathbb{R}^2$ の4辺形へ適用するにとどめたが，然るべき修正によって高次元擬等角性の研究にも利用され得る可能性をもつ。

1. 記号・定義

$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(z_1, z_2, z_3, z_4)$: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ の4辺形

Γ : $\mathcal{Q}$ の辺 $\overset{\frown}{z_1, z_2}$, $\overset{\frown}{z_3, z_4}$ を結ぶ曲線族

$\rho(z)$: $\mathcal{Q}$ に support をもつ non-negative Borel 函数

$$L(\rho) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \int_\gamma \rho(z)|dz| ,$$

$$A(\rho) = \iint \{\rho(z)\}^2 dxdy , \quad \left(\begin{array}{l} z = x + iy, \text{ 積} \\ \text{分範囲は全} \mathbb{R}^2 \end{array} \right)$$

$$\operatorname{mod}\Gamma=\inf_{\rho}\frac{A(\rho)}{\{L(\rho)\}^2}.$$

$\operatorname{mod}\Gamma$ の定義はまた，次のようにしてもよい。即ち，

A-normalization： $\rho(z)$ を $A(\rho)=1$ により正規化して

$$\operatorname{mod}\Gamma=1\Big/\left[\sup_{\rho}L(\rho)\right]^2.$$

L-normalization： $\rho(z)$ を $L(\rho)\geq 1$ なるものに限定すれば

$$\operatorname{mod}\Gamma=\inf_{\rho}A(\rho).$$

以上はよく知られた Γ の extremal length の定義そのものである。ここで議論を簡単にするため次の付帯条件を置くが，主定理が導かれたのちに顧れば或るものは近似操作により容易に取除かれ，また或るものは極値問題の解に本質的な影響を及ぼさないことがわかるであろう。

（i）　Ω の各辺は十分に滑らかであり，且つ各頂点において互に直交する。

（ii）　Γ の各元 γ は C^2-級であり[1)]，且つ両端点において Ω の辺に直交する。

$m_j(E)$：集合 E の j-次元 Hausdorff 測度　$(j=1,2)$.

注　1)　実パラメターの区間 $(-1,1)$ から $\mathbb{R}^2$ の中への或る C^2-級の非特異写像によって定義されるが，parametrization の変更により，analytic arc と見ること

ができる（［1］，p. 100，定理2の系2参照）。

2. 主定理とその証明

定理1. 次の性質をもつ Borel 函数 $\rho_0(z) \geqq 0$ が存在する：

$$\mathrm{mod}\, \Gamma = \frac{A(\rho_0)}{\{L(\rho_0)\}^2}.$$

証明. A-normalization をみたす $\rho(z)$ の族の中に，$\{\rho_n(z)\}_{n=1,2,\cdots}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} L(\rho_n) = \sup_{\rho} L(\rho)$ となる。$\rho_0(z) = \limsup_{n\to\infty} \rho_n(z)$ とし，任意の有限定数 M を以て $\dot{\rho}_n(z) = \min(\rho_n(z), M)$，$\dot{\rho}_0(z) = \limsup_{n\to\infty} \dot{\rho}_n(z)$ とおけば，任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\gamma \dot{\rho}_n(z)|dz| \leqq \int_\gamma \left(\limsup_{n\to\infty} \dot{\rho}_n(z)\right)|dz| = \int_\gamma \dot{\rho}_0(z)|dz|.$$

さて，任意の $\varepsilon > 0$ に対して適当な $\gamma \in \Gamma$ が存在して

$$L(\dot{\rho}_0) + \varepsilon > \int_\gamma \dot{\rho}_0(z)|dz| \geqq \limsup_{n\to\infty} \int_\gamma \dot{\rho}_n(z)|dz| \geqq \limsup_{n\to\infty} L(\dot{\rho}_n)$$

となるから，$N = N(\varepsilon)$ が存在して N 以上のすべての n について

$$L(\rho_0) + \varepsilon \geqq L(\dot{\rho}_0) + \varepsilon > L(\dot{\rho}_n).$$

従って
$$L(\rho_n) \leqq L(\rho_0) + \varepsilon$$

より
$$\limsup_{n\to\infty} L(\rho_n) \leqq L(\rho_0).$$

ゆえに

$$\frac{A(p_0)}{\{L(p_0)\}^2} \le \frac{A(p_0)}{\limsup_{n\to\infty}\{L(p_n)\}^2} = \liminf_{n\to\infty}\frac{A(p_0)}{\{L(p_n)\}^2}$$
$$= \liminf_{n\to\infty}\frac{A(p_n)}{\{L(p_n)\}^2}$$

となって証明が終る。

定理 2. Γ の適当な subfamily Γ_α が存在し，Γ_α は Ω の内部をただ1重に隙間なく覆う analytic arcs の族であり，且つ適当な index set A が存在して

$$\Gamma = \bigcup_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha .$$

証明 Ω の辺 $\widehat{z_2, z_3}$ 上で値1をとり，$\widehat{z_4, z_1}$ 上で -1 をとり，他の2辺で normal derivative が 0 となる int Ω での調和函数 $u(z)$ の等高線は1つの Γ_α であり得る。ゆえに $\bigcup_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma$。逆に，$\bigcup_{\alpha\in A}\Gamma_\alpha \supseteq \Gamma$ を示すため，Γ に属する任意の γ_α をとりこれを固定する。γ_α と辺 $\widehat{z_1, z_2}$, $\widehat{z_3, z_4}$ との交点をそれぞれ ζ_1, ζ_2 とする。4辺形 $\Omega_1 = \Omega_1(z_1, \zeta_1, \zeta_2, z_4)$ に対して，$\widehat{z_4, z_1}$ 上で値 -1 をとり，$\widehat{\zeta_1, \zeta_2}$ 上で 0 をとり，残りの2辺では normal derivative 0 という境界条件で Dirichlet 問題を解き，その解を $u^{(1)}(z)$ とする。同様に，4辺形 $\Omega_2 = \Omega_2(\zeta_1, z_2, z_3, \zeta_2)$ に対しては $\widehat{z_2, z_3}$ 上で1，$\widehat{\zeta_2, \zeta_1}$ 上で 0，他の辺では法線微係数 0 との条件できまる Dirichlet 問題のただ1つの解を

$u^{(2)}(z)$ とする。そこで

$$u_\alpha(z) = \begin{cases} u^{(1)}(z), & z \in \Omega_1 \\ u^{(2)}(z), & z \in \Omega_2 \end{cases}$$

とおけば，$u_\alpha(z)$ の等高線は Γ_α の条件をみたす。ゆえん $\Gamma \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$ であり，結局は $\Gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$.

補題．函数族 $\{u_\alpha(z)\}_{\alpha \in A}$ は Ω で正規である。

証明．Δ を $\mathrm{int}\,\Omega$ に含まれる任意の閉領域とし，Δ 上に任意の2点 z_1, z_2 をとる。また，Δ と $\partial\Omega$ との距離を δ とする。従前通りの記号を用いることとし，まず，$z_1, z_2 \in \Delta \cap \mathrm{int}\,\Omega_1$ の場合を考える。Cauchy の積分公式から得られる2つの等式

$$u^{(1)}(z_1) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{\pi i}\int_{\partial\Omega_1} \frac{u_\alpha(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_1} \frac{u_\alpha(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right\},$$

$$0 = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{\pi i}\int_{\partial\Omega_2} \frac{u_\alpha(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_2} \frac{u_\alpha(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right\}$$

を辺々相加えることによって

$$u_\alpha(z_1) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{u_\alpha(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{u_\alpha(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right\}$$

を得る。これと，全く同様にして導かれる等式

$$u_\alpha(z_2) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{u_\alpha(\zeta)}{\zeta - z_2} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{u_\alpha(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right\}$$

とから

$$|u_\alpha(z_1)-u_\alpha(z_2)| \le \frac{|z_1-z_2|}{\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{|u_\alpha(\zeta)|}{|\zeta-z_1||\zeta-z_2|}|d\zeta|$$
(1)
$$\le \frac{|z_1-z_2|}{\pi\delta^2}\cdot(\text{length of }\partial\Omega)$$

が従う。その他の場合も同様にして（z_1, z_2 が γ_α 上にあるときは z_1, z_2 を避ける路に沿って積分し，のちに相殺される），（1）と同じ評価式を得る。（1）は $\{u_\alpha(z)\}_{\alpha\in A}$ の同程度連続性であり，他方，一様有界性は明らかであるから，これで証明が終る。

定理 3. 適当な $\alpha_0\in A$ が存在し，T_{α_0} に属するすべての γ に対して

$$\int_\gamma \rho_0(z)|dz| = L(\rho_0).$$

証明 1° $T=\bigcup_{\alpha\in A}T_\alpha$ から

$$L(\rho_0)=\inf_{\gamma\in T}\int_\gamma \rho_0(z)|dz| = \inf_{\alpha\in A}\left\{\inf_{\gamma\in T_\alpha}\int_\gamma \rho_0(z)|dz|\right\}.$$

故に，列 $\{T_{\alpha_n}\}_{n=1,2,\cdots}$ が存在して

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left[\inf_{\gamma\in T_\alpha}\int_\gamma \rho_0(z)|dz|\right]=L(\rho_0).$$

また，T_α と $u_\alpha(z)$ とは 1 対 1 に対応するから，函数列 $\{u_{\alpha_n}(z)\}_{n=1,2,\cdots}$ が定まる。補題によりこの列から Ω で広

義一様収束する部分列を選ぶことができる。簡単のためそれも同じ記号で表わし、$\lim_{n\to\infty} u_{\alpha_n}(z) = u_{\alpha_0}(z)$ とおく。

2° $u_{\alpha_0}(z)$ の c−level $\{z \mid u_{\alpha_0}(z) = c\}$ は analytic arc であり、Γ_{α_0} は int Ω を隙間なく、ただ1重に覆う。実際，$u_{\alpha_0}(z) = c$ をみたす任意の点 z_0 をとり，$\delta > 0$ を任意とすれば，$N_1 = N_1(\delta)$ が存在して $n \geq N_1$ なる限り $|u_{\alpha_n}(z) - u_{\alpha_0}(z)| < \delta \quad (z \in \Delta)$ となる。$u_{\alpha_n}(z_0) = c'$ とおけば $|c - c'| < \delta$ だから $u_{\alpha_n}(z)$ の c'− level curve は z_0 の近傍を通る。換言すれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N_2 = N_2(\varepsilon)$ を十分大きくとれば，すべての $n \geq N_2$ について，$u_{\alpha_n}(z)$ の c−level curves は z_0 の ε−近傍を通る。ゆえに，$\{z \mid u_{\alpha_0}(z) = c\}$ は $u_{\alpha_n}(z)$ の c−level curves の集積集合である。しかるに，$u_{\alpha_n}(z) = c$ は $-1 < t < 1$ において $z = \varphi_n(t; c)$ という形で表示される解析曲線で，$\varphi_n(t; c)$ は c をパラメターとする univalent holomorphic function であるから，Hurwitz の定理によりその cluster value $z = \varphi(t; c)$ は $-1 < t < 1$ で non−constant univalent holomorphic である。さらに，任意の $z_0 \in$ int Ω に対して c が存在してすべての n につき $u_{\alpha_n}(z)$ の c−level が z_0 を通っているから，$u_{\alpha_0}(z)$ の c−level が z_0 を通る。また，z_0 を2つの

上の c-levels が通らないこともわかる。

3° 定理 1 の証明でなされたように $\rho_0(z)$ を M で truncate したものを $\dot{\rho}_0(z)$ で表わし、$\dot{\rho}_0(z)$ の mollification を $\hat{\dot{\rho}}_0(z)$ と書く。任意の $\eta > 0$ に対して Ω の可測部分集合 Q が存在して、Q では $\hat{\dot{\rho}}_0(z)$ は $\dot{\rho}_0(z)$ を一様に近似し、且つ $m_2(\Omega \setminus Q) < \eta$ とできる（Egoroff の定理）。このことから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して Γ_{α_0} の適当な部分族 Γ'_{α_0} が存在し、$\widehat{z_1, z_2}$ 上で m_1 について測った Γ'_{α_0} の端点の測度が δ 以下であり、且つすべての $\gamma_0 \in \Gamma_{\alpha_0} \setminus \Gamma'_{\alpha_0}$ に対して $m_1(\gamma_0 \cap (\Omega \setminus Q)) < \varepsilon / M$ となるようにできる。ゆえに、Q での $\dot{\rho}_0(z)$ の十分に良い近似 $\hat{\dot{\rho}}_0(z)$ をとれば

$$|\dot{\rho}_0(z) - \hat{\dot{\rho}}_0(z)| < \varepsilon / (\text{length of } \gamma_0) \quad (z \in \gamma_0 \cap Q)$$

とできる。従って

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_0} |\dot{\rho}_0(z) - \hat{\dot{\rho}}_0(z)||dz| &\leq \int_{\gamma_0 \cap Q} |\dot{\rho}_0(z) - \hat{\dot{\rho}}_0(z)||dz| \\
&\quad + \int_{\gamma_0 \cap (\Omega \setminus Q)} |\dot{\rho}_0(z) - \hat{\dot{\rho}}_0(z)||dz| \qquad (3) \\
&\leq \int_{\gamma_0 \cap Q} |\dot{\rho}_0(z) - \hat{\dot{\rho}}_0(z)||dz| + \int_{\gamma_0 \cap (\Omega \setminus Q)} [\dot{\rho}_0(z) + \hat{\dot{\rho}}_0(z)]|dz| < 3\varepsilon.
\end{aligned}
$$

また、γ_0 が $u_{\alpha_0}(z)$ の c-level なら、$u_{\alpha_n}(z)$ の c-level を γ_n とすることにより、$\hat{\dot{\rho}}_0(z)$ の連続性を用いて

(4) $$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}\tilde{\dot{p}}_0(z)|dz| = \int_{\gamma_0}\tilde{\dot{p}}_0(z)|dz|$$

とできる。

4° 或る番号から先のすべての n について

(5) $$\int_{\gamma_n}|\dot{p}_0(z)-\tilde{\dot{p}}_0(z)||dz| < 4\varepsilon$$

が成立つ。なぜなら，かりに

$$\int_{\gamma_n}|\dot{p}_0(z)-\tilde{\dot{p}}_0(z)||dz| \geq 4\varepsilon$$

となる番号が無限に多くあるならば

$$\int_{\gamma_0}|\dot{p}_0(z)-\tilde{\dot{p}}_0(z)||dz| \geq \limsup_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}|\dot{p}_0(z)-\tilde{\dot{p}}_0(z)||dz| \geq 4\varepsilon$$

となって（3）に反するからである。

5° （3），（4），（5）から

$$\int_{\gamma_0}\dot{p}_0(z)|dz| < \int_{\gamma_0}\tilde{\dot{p}}_0(z)|dz| + 3\varepsilon = \lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}\tilde{\dot{p}}_0(z)|dz| + 3\varepsilon$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}\dot{p}_0(z)|dz| + 7\varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}p_0(z)|dz| + 7\varepsilon.$$

ゆえに $$\int_{\gamma_0}p_0(z)|dz| \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}p_0(z)|dz|$$

を経て，$\widehat{z_1, z_2}$ 上の殆んどすべての点を端点とする $\gamma_0 \in$

T_{α_0} に対し

(6) $$\int_{\gamma_0} \rho_0(z)|dz| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \rho_0(z)|dz|$$

を得る。

6° (2) により、T_{α_n} の元 γ_n を特に

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \rho_0(z)|dz| = L(\rho_0)$$

となるようにとることができるから、(6) によって、少くとも1つの $\gamma_0 \in T_{\alpha_0}$ が存在して

$$\int_{\gamma_0} \rho_0(z)|dz| = L(\rho_0).$$

7° すべての $\gamma \in T_{\alpha_0}$ について

(7) $$L(\rho_0) \leq \int_{\gamma} \rho_0(z)|dz|$$

であるばかりでなく、等号だけが起る。なぜなら、L-normalization を採用し、かりに不等号を成立させる γ の集合 T'_{α_0} ($\subset T_{\alpha_0}$) が存在して且つ、$\widehat{z_1, z_2}$ 上の T'_{α_0} の端点の m_1 一測度が正であったとし、

$$\rho_0^*(z) = \begin{cases} (1-\varepsilon)\rho_0(z), & z \in T'_{\alpha_0} \\ \rho_0(z), & z \notin T'_{\alpha_0} \end{cases}$$

とおけば、十分小さい定数 $\varepsilon > 0$ に対しては、$L(\rho_0^*) \geq 1$

となる。$\rho_0(z)$, Γ_{α_0} の作り方から

$$A(\rho_0^*) < A(\rho_0) = \mathrm{mod}\,\Gamma = \inf_{\rho} A(\rho)$$

となり、矛盾を生ずる。ゆえに、殆んどすべての $\gamma \in \Gamma_{\alpha_0}$ に対して（7）では等号のみが起る。

8° 引用論文［1］の補題3と同様にして，4辺形 Ω と長方形 R との間に1対1 C'−級の微分同型写像 $w = f(z)$ が存在し，Γ_{α_0} の殆んどすべての元 γ が R の辺に垂直な横断線に対応する。これから $f(z)$ が等角写像で，$\rho_0(z)|dz| = |f'(z)||dz|$ となり，Γ_{α_0} のすべての元 γ が解析弧であり、その ρ_0−length は相等しいことが結論される。

3. 應用について

主定理の応用というよりはむしろ，方法の応用として次のようなものがある。

定理（modulus の優加法性） Ω の辺 $\widehat{z_1, z_2}$, $\widehat{z_3, z_4}$ を Ω 内で結ぶ横断線 γ によって Ω を2つの4辺形 Ω_1, Ω_2 に分けるとき

$$\mathrm{mod}\,\Omega_1 + \mathrm{mod}\,\Omega_2 \leq \mathrm{mod}\,\Omega.$$

ここで等号が起るのは、γ が Γ_{α_0} の1つの元と一致する場合

に限る。

定理　1-q.c.写像は等角写像である。

いずれも，補助等角写像を借りずに，§2 の方法だけで証明できる。

Reference

[1] K. Shibata: On the defining properties of Teichmüller map, Osaka J. Math. 14 (1977), 95 - 109.