数理解析研究所講究録
第 364 巻 1979 年 52-65

リーマン面の接続のある問題への擬等角写像の応用

東大 教養　及川廣太郎

1. S_0をリーマン面とする。もしS_0から，あるリーマン面Sの部分領域の上への等角写像φが存在するとき，(S, φ)のことをS_0の<u>接続</u>という。もし$\varphi(S_0) \neq S$ならば，接続はプロパーであるという。もしプロパーな接続がないならば，S_0は<u>極大</u>リーマン面という。S_0の接続(S, φ)は，もしSが極大リーマン面ならば，S_0の<u>極大接続</u>という。任意のS_0に対して，その極大接続が存在することが知られている[5]。

S_0が"唯一つの"極大接続を持つのは，どのような場合か，という問題を考えるのであるが，"唯一つ"という概念に異なったものが3つある。

S_0の極大接続(S_i, φ_i), $i=1, 2$, に対し，$\varphi_1(S_0)$から$\varphi_2(S_0)$の上への等角写像$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$が，もしつねに$S_1 \to S_2$の位相写像に接続できるとき，$S_0$の極大接続は<u>topologically unique</u>であるという。同じく，もしつねに$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$が$S_1 \to S_2$の等角写像に接続できるとき，$S_0$の極大接続は

<u>conformally unique</u> であるという. 最後に, もし S_0 の極大接続 (S_i, φ_i), $i=1, 2$ において, つねに S_1 と S_2 とが等角同値ならば, S_0 の極大接続は <u>unique</u> であるという. この際は, S_1 から S_2 への等角写像は, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ とは無関係としてある.

われわれは, これらのうち第3の場合を問題にする. S_0 の極大接続が unique であるための必要十分条件を求める.

2. この種の問題のはじまりは, 筆者の知る限りでは, つぎの Nevanlinna による "Eindeutigkeitssatz" であろう ([10]): 平面領域 S_0 に於て, そこからリーマン球 $\mathbb{P}$ の部分領域の上への等角写像が, つねに $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ の等角写像(つまり一次変換)に拡張できるための必要十分条件は, S_0 が class O_{AD} に属すること(つまり, Dirichlet 積分が有限であるような非定数の正則関数は存在しないこと)である。

この結果は, 後述の Heins の定理を参照するならば, つぎのものと同値である: <u>平面領域 S_0 の極大接続が conformally unique であるための必要十分条件は, $S_0 \in O_{AD}$ である.</u>

森 [9] は, これを, 次のところまで拡張した: <u>種数</u>

有限なS_0の極大接続が conformally unique であるための必要十分条件は, $S_0 \in O_{AD}$ である.

一般の種数に対しては, S_0 が class O_{AD} であるという条件は, かなり様子が異ってくる. 今扱っている問題に関しては, つぎのような条件を考えると, 話がうまくいく: リーマン面 S_0 が条件 A をみたすとは, S_0 の任意の regularly imbedded subregion Ω は, もしそれの relative boundary $\partial\Omega$ がコンパクトであるか, 或いはそれの $\partial\Omega$ に関する double $\hat{\Omega}$ が planar ならば, $\hat{\Omega}$ は class O_{AD} に属する. (S_0の種数が有限なら, $S_0 \in O_{AD}$ と条件 A とは同値である).

この言葉を用いると, 次の定理が得られる: リーマン面 S_0の極大接続が conformally unique であるための必要十分条件は, S_0 が条件 A をみたすことである. これは Jurchescu [8] によるものである; ただし, このままの形であるわけではないが, この論文中の二・三の定理を組みあわせると Corollary 16 が, ちょうどこれに相当する.

平面領域 S_0 が O_{AD} に入るための特徴づけとして, S_0 から $\mathbb{P}$ の部分領域の上への任意の等角写像fに対して, $\mathbb{P}-f(S_0)$ の 2次元測度 $m(\mathbb{P}-f(S_0))$ が 0 であるということがある (Ahlfors-Beurling [3]). このこと

の一般化は、誰が最初に述べたことか、はっきりしないが、Renggli [14] には定理2として述べられている：リーマン面 S_0 の極大接続が conformally unique であるための必要十分条件は、任意の極大接続 (S,φ) に対して $m(S-\varphi(S_0))=0$ が成り立つことである。

3. つぎに、topologically unique であるが、馴れた読者なら、ここまで読んだところで、O_{AD} の代りに $O_{SD}\,(=O_{SB})$ をとればよいということに気がつかれることと思う。じっさい、次の定理は Jurchescu [8] の定理21である：リーマン面 S_0 の極大接続が topologically unique であるための必要十分条件は、任意の regularly imbedded subregion Ω で、$\partial\Omega$ に関する double $\hat{\Omega}$ が planar なものは、つねに $\in O_{SD}$ であることである。

S_0 の種数が有限になれば、この条件はもっと簡単に述べることができる。たとえば、閉リーマン面から N_{SD} class のコンパクト集合を除いたもの、といってもよいし、または S_0 の ideal boundary component はすべて weak である、といってもよい (Sario-Oikawa [17])。

4. 以上の topological uniqueness, conformal uniqueness は, 写像の接続, いいかえれば特異点の除去可能性の問題であったが, 二つの uniqueness は様子が異なる. 勿論, conformally unique なら unique であるが, 問題は逆の証明である.

この種の問題の出発は, つぎの Heins [6] による定理である: 平面領域 S_0 が, 種数 > 0 のリーマン面の部分領域と等角同値であるための必要十分条件は, S_0 が有界単葉正則関数を持たないことである. これには, Jenkins [7], Rochberg [16] による別証がある.

この結果を一寸変形すると, つぎのようになる:

定理1 (Heins) 平面領域 S_0 の極大接続が unique であるための必要十分条件は, $S_0 \in O_{SD}$ である.

1960年, 筆者はつぎのことを証明した [12]:

定理2. 種数が > 0 で < ∞ であるようなリーマン面 S_0 の極大接続が unique であるための必要十分条件は, $S_0 \in O_{AD}$ である.

こゝでは，これを拡張した次の定理を証明する：

<u>定理3. 種数が>0（つまりplanarでない）リーマン面S_0の極大接続がuniqueであるための必要十分条件は，S_0が条件Aをみたすことである。</u>

5. 定理2と3において，十分性は，conformally unique に関する条件からすぐ証明できる。

必要性を証明するために，次のように考える。いまS_0が条件Aをみたさなかつたとする。すると極大接続はconformally uniqueではないから，2°の最後で述べた命題によつて，つぎのような極大接続(S, φ)が存在する：$m(S-\varphi(S_0))>0$. コンパクト集合$E \subset S-\varphi(S_0)$を，どんな小さくてもよいが，$mE>0$であるようにひとつとり，この部分のみでSの解析構造をかえる。即ち，supportがEに含まれるような，S上のBeltrami微分$\mu\, d\bar{z}\, dz^{-1}$によりリーマン面S^μを考える；こゝでS^μは，位相空間としてはSと同じものであるが，恒等写像ιはμ-等角写像となっているものである（Bers [4]）. すると，ιは$S-\varphi(S_0)$では

等角であるから$(S^{\mu}, 2\circ 4)$は S_0 の接続である。擬等角写像は極大性を保存する([11])から、これは S_0 の極大接続である。従って、もし S^{μ} が S と等角同値でない(ような μ が存在する)ならば、S_0 の極大接続はuniqueでないことになって、定理2,3の証明が完了することになる。

よって、定理2と3の証明は、次の定理に含まれる(S が種数>0で極大なら、定理4の仮定をみたす):

定理4. リーマン面 S は、リーマン球から n $(0 \leq n \leq 3)$ 個の点を除いたもの、単位円板から n $(0 \leq n \leq 1)$ 個の点を除いたものではないものとすると、$mE > 0$ であるような任意のコンパクト集合 E に対し、

$$\|\mu\|_{\infty} < 1, \quad \mathrm{supp}\,\mu \subset E$$

であるような S 上のBeltrami微分をとり、S^{μ} が S と等角同値でないようにすることができる。

6. 定理2を証明するときは、定理4を、S が種数>0の閉リーマン面について証明すればよい。このときは、S中心のTeichmüller空間を考え、$\mathrm{supp}\,\mu \subset E$

であるような S^μ の全体は，S を内点に含むことが示せる．Teichmüller 空間において，moduli 空間上の各ファイバーは discrete な集合であるので，以上によってこの場合の定理4の証明が終る（以上 [12] の方法）．

ところが，このやり方は，一般の S に対しては通用しないのである．何故ならば，一般には，$\mathrm{supp}\,\mu \subset E$ であるような S^μ のみでは，S の近傍を埋め得ないのである．反例はつぎのとおりである（若林功，谷口雅彦両氏による）．

反例1．$S = \mathbb{C} - \{1, 2, \cdots\}$，$S_\varepsilon = \mathbb{C} - \{1+i\varepsilon, 2, 3, \cdots\}$ とする．ε が近いと S_ε は（Teichmüller 距離で測って）S の近くにある．にもかかわらず，$S \to S_\varepsilon$ の擬等角写像で，あるコンパクト集合を除いて等角であるものは，存在しない；$1+i\varepsilon$ に対応する点がありえないことが示せるのである．

反例2．上記の S を2枚用意して，分岐点2つづつを切り込みで結び，これらに沿って2枚を貼りあわせる．それを $\hat{S}$ とすると，S_ε から同様に作った $\hat{S}_\varepsilon$ に関して，上と同様なことがいえる．つまり，$\hat{S}$ の近傍は，$\mathrm{supp}\,\mu$ がコンパクトな集合に含まれているような $\hat{S}^\mu$ では埋め得ない．なお，この $\hat{S}$ は極大リーマン面である（Radó [13]）．

7. 筆者は，はじめ，一般の場合の定理4も，6°のはじめの方で述べたような方法で証明しようとしたのであるが，反例が出るに及んで，あきらめざるを得なかった。

その間，1975，Renggli [15] が定理3の証明を与えた。彼の方法は conformal sewing というものを用いるものである。

彼の証明をよむうちに，つぎのことに気がついた。すなわち，定理4は次の定理に含まれる：

定理5. S と E とは，定理4と同じものとするとき，S 中心の Teichmüller 空間 $T(S)$ 上の連続関数 Φ と，$\operatorname{supp}\nu\subset E$ であるような S 上の Beltrami 微分 $\nu\, d\bar{z}\, dz^{-1}$ で，条件

(i) $T(S)$ の moduli 空間の S の上の fiber における Φ の値域は，可算集合

(ii) $\left.\dfrac{d}{dt}\Phi(\langle S^{t\nu}, \iota\rangle)\right|_{t=0}$ は存在して $\neq 0$.

をみたすものが存在する。

この定理から定理4を導くことは，つぎのように，容易である。即ち，曲線 $t\in[0, t_0]\longmapsto\langle S^{t\mu}, \iota\rangle\in T(S)$,

たゞし $0<t_0=1/\|v\|_\infty$，の上で Φ の値域は区間，よってこの曲線は S 上の fiber に含まれてしまうわけにはいかない。従って，ある $t\in(0,t_0]$ に対して S^{tv} は S と等角同型にならない。この tv が，定理4での μ である。

さて，定理5の証明であるが，Φ として，はじめは周期微分のノルムなどで考えていたが，つぎに示すように，甚だ簡単なものでよいことがわかった。

8．<u>定理5の証明.</u> S が torus の場合だけを，別にやらなければならない。これは，下記のものを技術的に変形するものであるが，くわしくは読者にゆずりたい。

それ以外の場合の S は，上半平面 H_+ の non-elementary な Fuchs 群 Γ で，楕円的変換を含まないもの，によって，$S=H_+/\Gamma$ とあらわすことができる。一般性を失うことなく，0 と ∞ は，ひとつの双曲的変換 $\gamma_0\in\Gamma$ の不動点（それぞれ，repelling と attracting な），1 はもうひとつの双曲的変換 $\gamma_1\in\Gamma$ の repelling な不動点と仮定してよい。γ_1 の attracting な不動点を a とおく。

S 中心の Teichmüller 空間の代りに，Γ 中心の Teichmüller 空間 $T(\Gamma)$ を考える。それは，$H_+\to H_+$ の

擬等角写像 f で，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(\infty)=\infty$，さらに $\forall\gamma\in\Gamma$ に対して $f\gamma f^{-1}$ が1次変換となっているもののすべてからなる空間を，$\mathbb{R}$ で一致するもの同志を同値とする関係によって，類別して得られるものである。同値類を $\langle f\rangle$ とあらわす。関数

$$\Phi \ : \ \langle f\rangle \longmapsto f(a)$$

は $T(\Gamma)$ で定義される（実数値）連続関数である。

H_+/Γ と $H_+/f\Gamma f^{-1}$ とが等角同型であるような f の $\langle f\rangle$ の全体を $\mathcal{F}_\Gamma$ とあらわす（moduli 空間上の fiber である）。$f\in\langle f\rangle\in T(S)$ に対し $\langle f\rangle\in\mathcal{F}_\Gamma$ であるための必要十分条件は，適当な一次変換 l によって $f\Gamma f^{-1}=l\Gamma l^{-1}$ が成り立つことである。従って，$(l^{-1}f\gamma_0 f^{-1}l,\ l^{-1}f\gamma_1 f^{-1}l)\in\Gamma\times\Gamma$ が得られる。この対は，$\langle f\rangle$ からの f のとり方にはよらない；ただし l のえらび方には関係する。いま，$\langle f_1\rangle,\langle f_2\rangle\in\mathcal{F}_\Gamma$ に対して，それぞれ適当に l_1，l_2 をとって得られる，上記の対が一致したとする：$l_1^{-1}f_1\gamma_i f_1^{-1}l_1=l_2^{-1}f_2\gamma_i f_2^{-1}l_2$，$i=0,1$。すると，$\gamma_0$，$\gamma_1$ の不動点 0，1，∞ をしらべることによって，$l_1=l_2$ を得，従って $f_1(a)=f_2(a)$ を得る。よって，関数 Φ の $\mathcal{F}_\Gamma$ での値域は，$\Gamma\times\Gamma$ の濃度，つまり可算，をこえない。

$\Phi(\langle f^{t\nu}\rangle) = f^{t\nu}(a)$ については，Ahlfors-Bers[2]によって示されているように

$$\left.\frac{d}{dt} f^{t\nu}(a)\right|_{t=0} = \frac{-a(a-1)}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\nu(z)\,dx\,dy}{z(z-1)(z-a)}$$

である；ここに $\nu(z)$ は有界可測関数で，$\nu(\bar{z}) = \overline{\nu(z)}$，そして H_+ では $\nu(\gamma(z))\overline{\gamma'(z)}\,\gamma'(z)^{-1} = \nu(z)$ を $\forall\gamma \in \Gamma$ に対してみたすものとする。

Sに与えられたEを，H^+ の Γ の基本領域内にもちあげ，そこで $\nu(z) = 1/\bar{z}(\bar{z}-1)(\bar{z}-\bar{a})$ とおく。次に $\Gamma(E)$，およびその下半平面への鏡像へは，上述の関係式が成り立つように拡張し，$\mathbb{C}$ のそれ以外の部分では 0 とおくと，これは S 上の Beltrami 微分とみて $\mathrm{supp}\,\nu \subset E$ であり，しかも，上式の右辺を 0 にしない。つまり，このようにして求めた Φ と ν が，定理5で要求されたものである。　　（証終）

文献

[1] Ahlfors, L. V. Lectures on Quasiconformal Mappings. D. Van Nostrand Co., Inc., 1966.

[2] Ahlfors, L. V. and Bers, L. Riemann's mapping theorem for variable metrics. Ann. Math. 72 (1960), 385-404.

[3] Ahlfors, L. A. and Beurling, A. Conformal invariants and function-theoretic null-sets. Acta Math. 83 (1950), 101-129.

[4] Bers, L. Spaces of Riemann surfaces. Proc. Math. Congr. Edinburgh, 1958, pp. 349-367.

[5] Bochner, S. Fortsetzung Riemannscher Flächen. Math. Ann. 98 (1928), 406-421.

[6] Heins, M. A problem concerning the continuation of Riemann surfaces. Contribution to the Theory of Riemann Surfaces. Princeton Univ. Press, 1953, pp. 55-62.

[7] Jenkins, James A. On a result of M. Heins. Proc. Edinbugh Math. Soc. (2) 19 (1974/75), 371-373.

[8] Jurchescu, M. Bordered Riemann surfaces. Math. Ann. 143 (1961), 264-292.

[9] Mori, A. A remark on the prolongation of Riemann surfaces of finite genus. J. Math. Soc. Japan 4 (1952), 198-209.

[10] Nevanlinna, R. Eindeutigkeitsfragen in der Theorie der konformen Abbildung. Comptes Rendus 10, Congr. Scand.,1946.

[11] Oikawa, K. Some properties of quasi-conformal mappings. Sūgaku 9 (1957/58), 13-14. Japanese.

[12] ---"--- On the uniqueness of the prolongation of an open Riemann surface of finite genus. Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 785-787.

[13] Radó, T. Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Math. Z. 20 (1924), 1-6.

[14] Renggli, H. On romovable sets for conformal mappings. Ann. Math. 176 (1968), 517-323.

[15] ---"--- Structural instability and extensions of Riemann surfaces. Duke Math. J. 42 (1975), 211 - 224.

[16] Rochberg, Richard. Continuation of Riemann surfaces. Proc. Amer. Math. Soc. 48 (1975), 82 - 84.

[17] Sario, L. and Oikawa, K. Capacity Functions. Springer Verlag. 1969.