数理解析研究所講究録
第364巻 1979年 66-73

n次元空間における Teichmüller のモデュール定理の変形と歪曲問題への応用

山形大 教養　居駒和雄

単位円板からそれ自身へのある平面 quasiconformal mappings (qc map と略記) に対する Hölder 型 ($|w(z_1)-w(z_2)| \leqq \gamma|z_1-z_2|^{t}$) の歪曲定理は，最初 M.A. Lavrentieff, L. Ahlfors によって考察されたが，最良の評価式（定理B）は，A. Mori [5] が彼のモデュール定理を用いて確立した。その後 Lehto-Virtanen [4] は Mori のモデュール定理を導く Teichmüller のモデュール定理の一変形（定理A）を与え，これを用いて定理Bを別証明した。

定理A. もし ring R が z_1, z_2 を $0, \infty$ から分離すれば

$$\mathrm{mod}\ R \leqq \log \Phi_2\left(\sqrt{2(|z_1|+|z_2|)}\Big/|\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}|\right),$$

ここで $\log \Phi_2(a)$ は平面 Grötzsch ring $R_G(a)$ のモデュールを表わし，$\sqrt{z_1}, \sqrt{z_2}$ は R で一価な平方根の同じ分枝に属するものである。

定理B. w は単位円板からそれ自身上への $w(0)=0$ によっ

て正規化された K-qc map とする。然るときは $|z_1|\leqq 1$, $|z_2|\leqq 1$ なるすべての点対 z_1, z_2 に対して

$$|w(z_1)-w(z_2)| \leqq 16\,|z_1-z_2|^{\frac{1}{K}}.$$

ここで数16は不等式がすべての K に対してなりたつべきとするならば，より小さい如何なる限界によってもおきかえることはできない。

§1. 定理A，Bに対応して，$n\ (\geqq 3)$ 次元の場合 Hölder 型でどのような評価がなりたつかを [2] で考察した。定理Aの証明では，ring R の double を作るために解析的な分枝 $w=\sqrt{z}$ および $w=-\sqrt{z}$ が用いられる。n 次元の場合にはこのような分枝に対応する 1-qc map の分枝はないので，$-\pi\leqq\theta<\pi$ および $\pi\leqq\theta<3\pi$ に対する写像 $y_1=r\cos\frac{\theta}{2}$, $y_2=r\sin\frac{\theta}{2}$, $y_j=x_j\ (3\leqq j\leqq n)$ の2つの分枝 $y=y_+(x)$ および $y=y_-(x)$ を用いる。これらはいわゆる folding と呼ばれる 2-qc map であることから，定理Aの対応形定理A$'$では評価式の右辺に最初の因子2が現われる。定理A$'$を用いてえられる定理Bの対応形定理B$'$では指数が $\frac{1}{2K}$ となりいい評価とはいい難い。

定理A$'$. もし n 次元 ring R が点対 α, β を原点と無限遠点から分離するならば

$$\mathrm{mod}\ R \leqq 2\ \log\Phi_n\left(\sqrt{2(|\alpha|^2+|\beta|^2)}\,/\,|\alpha-\beta|\right),$$

ここで $\log\Phi_n(a)$ は n 次元 Grötzsch ring のモヂュールである。

定理B'. yはn次元空間の単位球体からそれ自身上への$y(0)=0$で正規化されたK-qc mapとする。すると$|\alpha|\leqq 1$, $|\beta|\leqq 1$なるすべての点対α,βに対して

$$|y(\alpha)-y(\beta)| \leqq 2\lambda_n\ |\alpha-\beta|^{\frac{1}{2K}},$$

である。ここにλ_nは$\Phi_n(a)\leqq\lambda_n a$なる一限界である。

§2. ここではn次元でringの非有界な補集合成分に関しあとの歪曲問題への応用に差支えない付加条件の下で、Teichmüllerのモデュール定理の別変形を定理1として確立する。これを用いてHölder型の指数を最大にした歪曲評価式が定理2としてえられることを示したい。

定理1. n次元空間のring Rが点対α,βを原点と無限遠点から分離すると仮定し、Rの非有界な補集合成分がある一定半径r_0の球体$\{x\mid |x|\leqq r_0\}$を含むと仮定する。然るときは

$$\mathrm{mod}\,R \leqq \log\Phi_n\left(\sqrt{2\{|\alpha|^2(|\beta|+r_0)^2+|\beta|^2(|\alpha|+r_0)^2\}}\Big/ r_0|\alpha-\beta|\right).$$

定理2. yはn次元空間における単位球体からそれ自身上への$y(0)=0$で正規化されたK-qc mapとする。すると$|\alpha|\leqq 1$, $|\beta|\leqq 1$なるすべての点対α,βに対して

$$|y(\alpha)-y(\beta)| \leqq c\,|\alpha-\beta|^{\frac{1}{K}},$$

ここで $c=2^{1+\frac{1}{K}}\left(1+\frac{1}{\rho_0}\right)\lambda_n$, $\rho_0=1/\Phi_n^{-1}[\{\Phi_n(4)\}^K]$, として$\Phi_n^{-1}$は$\Phi_n$の逆関数である。

注意 1. 定理2における指数 $\frac{1}{K}$ はより大きな数ではおきかえることができない。何故ならば、K-qc map $y=y_0(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})$:

$$\begin{cases} y_1=r^{\frac{1}{K}}\cos\theta_1,\cdots,\ y_j=r^{\frac{1}{K}}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{j-1}\cos\theta_j \quad (j=2,3,\cdots,n-1), \\ y_n=r^{\frac{1}{K}}\sin\theta_1\cdots\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

を考えれば, t が $\frac{1}{K}$ より大きい限り, 各々の定数 c に対して

$$|y_0(x)-y_0(0)| > c|x|^t \quad , \quad |x|<1$$

なるような点 x が存在するからである。

§3. n次元における ring のモデュールの定義およびその基本性質すなわちモデュールの優加法性, Grötzsch および Teichmüller のモデュール定理, また K-qc map の定義およびその基本性質については Mostow [6] を参照されたい。ただここでは, n次元 K-qc map は Gehring [4] および Mostow [6] の意味であり, Väisälä [7] の意味の K^{n-1}-qc map に相当するものであることを注意しておく。

§4. 定理1の証明の概略.

ring R を球面 $S^{n-1}(0,r_0)$ に関する反転つづいて球面 $S^{n-1}(-r_0e_1, 2r_0)$ に関する反転最後に適当な一つの平行移動を組合わせた写像 $\zeta=\zeta(x)$ によって, 半空間 $\{\zeta \mid \zeta_1 \geq 2r_0\}$ 内の ring R' に変換する。R' の超平面 $\{\zeta \mid \zeta_1=0\}$ に関する対称な ring を R'' とすると, $\operatorname{mod} R = \operatorname{mod} R' = \operatorname{mod} R''$ なる。
R', R'' の補集合の有界成分をそれぞれ C_0', C_0'' とし, これら

を補集合成分としてもつringをR_0とすると

$$\mathrm{mod}\,R' + \mathrm{mod}\,R'' \leqq \mathrm{mod}\,R_0$$

$$\therefore\ \mathrm{mod}\,R \leqq \frac{1}{2}\,\mathrm{mod}\,R_0 .$$

点αの上記写像$\zeta = \zeta(x)$による像をα_+とし，超平面$\{\zeta \mid \zeta_1 = 0\}$に関する$\alpha_+$の対称点を$\alpha_-$で表わす。$\alpha_+$，$\alpha_-$をそれぞれ原点，無限遠点にうつすような補助のMöbius変換によるR_0の像を$\tilde{R}_0$とすると，　$\mathrm{mod}\,R_0 = \mathrm{mod}\,\tilde{R}_0$.

$\tilde{R}_0$に対してn次元におけるTeichmüllerのモヂュール定理が適用でき　$\mathrm{mod}\,\tilde{R}_0$が上から評価されて，定理1における評価式がえられる。

§5. 次に定理2の証明のために，定理1とともに必要な次のlemmasを証明なしに挙げる。

Lemma 1.（[2]）　$\Phi_n(a) \leqq \lambda_n a$ で，$4 \leqq \lambda_n$.

（λ_nに対する上の限界は直接係わないので省略）

注意2. $\Phi_n(a)$は$a > 1$でaの増加，連続関数であることが知られている。（例えば，Mostow[6]の§§6~7参照）

Lemma 2.（Schwarzのlemmaの空間類似形）yはn次元球体からそれ自身上への，$y(0) = 0$をみたすK-qc mapとすると，任意の$0 < |x| < 1$なるxに対して

$$\Phi_n\left(\frac{1}{|y|}\right) \leqq \left\{\Phi_n\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}^K .$$

これはn次元におけるspherical symmetrization (Mostow

[6] の §8 参照）を用いて導かれる n 次元 Grötzsch のモデュール定理を用いると，2 次元の場合と同様にして示される。

注意 3. Lemma 2 から $|x|=r_0$ $(0<r_0<1)$ 上で

$$|y(x)| \geqq 1/\Phi^{-1}\left[\left\{\Phi_n\left(\frac{1}{r_0}\right)\right\}^K\right]$$

がなりたち，$1/\Phi_n^{-1}\left[\left\{\Phi_n\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}^K\right]$ は $|x|$ の増加，連続関数であるから，Lemma 2 と注意 2 により，$y=y(x)$ による球体 $\{x \mid |x| \leqq r_0\}$ の像は球体 $\left\{y \mid |y| \leqq 1/\Phi_n^{-1}\left[\left\{\Phi_n\left(\frac{1}{r_0}\right)\right\}^K\right]\right\}$ を含む。

§6. 定理 2 の証明の概略．

$|\alpha-\beta| \geqq \frac{1}{\lambda_n}$ の場合と，$0<|\alpha-\beta|<\frac{1}{\lambda_n}$ $(\leqq \frac{1}{4}$，Lemma 1 による）でかつ $|\alpha+\beta| \leqq 1$ の場合には，平面の場合の Lehto-Virtanen [4] の証明とほぼ同様に進められるので省略する。残る $0<|\alpha-\beta|<\frac{1}{\lambda_n}$ $\left(\leqq \frac{1}{4}\right)$ で $|\alpha+\beta|>1$ の場合は，球環

$$B=\left\{x \,\middle|\, \frac{|\alpha-\beta|}{2}<\left|x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|<\frac{1}{4}\right\}$$

を考える。これは単位球体外 $|x|>1$ にはみ出すこともありうるので，$y(x)$ を $|x|>1$ まで延長した K-qc map $y^*(x)=y(x)$ $(|x| \leqq 1)$，$=y\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\Big/\left|y\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right|^2$ $(x>1)$ を定義しておく。B の補集合の非有界成分 $C_1(B)$ は球体 $\{x \mid |x| \leqq \frac{1}{4}\}$ を含むから，Lemma 2 および注意 3 により，ring $y^*(B)$ の非有界な補集合成分 $C_1(y^*(B))$ は一球体 $\{y \mid |y| \leqq \rho_0\}$（ここに，$\rho_0=1/\Phi_n^{-1}\left[\{\Phi_n(4)\}^K\right]$）を含む。それ故 ring $y^*(B)$

に対して定理1が適用できて mod $\gamma^*(B)$ が上から評価され、その途中で Lemma 1 が用いられて所期の結果がえられる。

文献

[1] F. W. Gehring, Rings and quasiconformal mappings in space, Trans. Amer. Math. Soc., 103 (1962).

[2] K. Ikoma, An estimate for the modulus of the Grötzsch ring in n-space, Bull. Yamagata Univ. Nat. Sci., 6 (1967).

[3] < 〃 >, A distortion theorem in K-quasiconformal mappings of the n-ball, Tohoku Math. J., 28 (1976).

[4] O. Lehto und K.I. Virtanen, Quasikonforme Abbildungen, Springer, 1965, 269 pp.

[5] A. Mori, On an absolute constant in the theory of quasi-conformal mappings, J. Math. Soc. Jap., 8 (1956).

[6] G.D. Mostow, Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 34 (1968).

[7] J. Väisälä, Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings, Lecture Notes in Math., 229, Springer, 1971, 144 pp.