数理解析研究所講究録
第365巻 1979年 1-18

Equivariant stable homotopy groups of spheres with involutions

阪市大 理学部　荒木捷朗

involution をもつ球面の equivariant stable homotopy groups の研究は，1967年頃 Bredon [4，5] によりある程度系統的に行なわれたのであるが，その後，Landweber [7] による補足的研究があるものの，あまり研究されていないように思われる．その理由はいろいろ考えられるが，Bredon の記号のわかり難さ，一応 13 stem まで部分的に extension を除いてかなり調べてあるように見えるのに，具体的な結果は若干の例を除いて殆んど記述されてなく，従って Bredon の論文 [4，5] を follow することが困難であることがあげられよう．

筆者は，τ-cohomology [2] の立場からこの計算を試み，入江幸右衛門氏の協力を得て，extension までこめて 13 stem までの一応の計算を得た．その計算の量はかなりぼう大

であり，又，結果は部分的に誤りがあるかも知れないが，その計算方法等についてこゝに報告したい．

1. 初歩的性質.

Atiyah, Landweber による次の記号を用いる．

$\mathbb{R}^{p,q}$: $\mathbb{R}^{p+q}$ を $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$ と分解して $\tau(x, y) = (-x, y)$ なる involution を与えた空間.

$B^{p,q}$: $\mathbb{R}^{p,q}$ の unit ball.

$S^{p,q} = \partial B^{p,q}$.

$\Sigma^{p,q} = B^{p,q}/S^{p,q}$.

τ-spectrum [2]

$$S\mathbb{R} = \{\Sigma^{n,n},\ n \geq 0;\ \varepsilon_n : \Sigma^{1,1} \wedge \Sigma^{n,n} \approx_\tau \Sigma^{n+1,n+1}\}$$

を用い，基点をもつ有限 τ-複体 X の (p,q)-th <u>stable τ-homotopy group</u>

$$\pi^S_{p,q}(X) = \widetilde{S\mathbb{R}}_{p,q}(X) = \varinjlim_n [\Sigma^{n+p,n+q}, \Sigma^{n,n}X]^\tau$$

と (p,q)-th <u>stable τ-cohomotopy group</u>

$$\pi_S^{p,q}(X) = \widetilde{S\mathbb{R}}^{p,q}(X) = \varinjlim_n [\Sigma^{n-p,n-q}X, \Sigma^{n,n}]^\tau$$

とが定義される．

特に

$$\pi^S_{p,q} = \pi^S_{p,q}(\Sigma^{0,0})$$

が，こゝでの計算の対象になる．

2.

定義より

$$\pi_{p,q}^{S} = \pi_{S}^{-p,-q}(\Sigma^{0,0}) = SR^{-p,-q}(pt)$$

であるから，τ-cohomology theory [2] の一般論が利用出来る．特に，involution を忘れる

forgetful homomorphism $\psi : \pi_{p,q}^{S} \longrightarrow \pi_{p+q}^{S}$

と，不動点集合への制限による

fixed-point homomorphism $\phi : \pi_{p,q}^{S} \longrightarrow \pi_{q}^{S}$

が定義される．これ等を含む完全列については後述する．

τ-spectrum SR は $(-1,-1)$-connected であるから，[2]，Prop.5.4，より

(1.1) $\qquad \phi : \pi_{p,q}^{S} \approx \pi_{q}^{S} \qquad$ for $p+q<0$.

この同型により，$p+q<0$ のとき $\pi_{p,q}^{S}$ は普通の stable homotopy groups π_{q}^{S} に帰着され，この意味で決定されたものとみなす（q が大きいとき π_{q}^{S} は決っていないのであるが）．

$\pi_{p,q}^{S}$ の計算は，$p+q\ (\geq 0)$ の値により小さい方から次々に決めて行くが，上の同型 (1.1) に象徴されるように，あるいくつかの巡回群とある普通の homotopy 群との直和の形で決定されることが多い．$p+q$ を $\pi_{p,q}^{S}$ の <u>stable stem</u> とよぶ．

2. forgetful exact sequences.

[2]，§5 を参照．τ-cofibration $S_{+}^{1,0} \subset B_{+}^{1,0} \to \Sigma^{1,0}$ の

stable τ-cohomotopy 群の完全列において，$\{1\}$ への制限による同型 $\pi_S^{p,q}(S_+^{1,0}) \approx \pi_S^{p+q}$ を用いると，forgetful homomorphism ψ を含む完全列

$$\cdots \to \pi_{p+q}^S \xrightarrow{\delta^*} \pi_{p,q}^S \xrightarrow{\chi} \pi_{p-1,q}^S \xrightarrow{\psi} \pi_{p+q-1}^S \xrightarrow{\delta^*} \pi_{p,q-1}^S \to \cdots$$

が得られる．（準同型 $\chi : \pi_{p,q}^S \to \pi_{p-1,q}^S$ は包含 $i : \Sigma^{0,0} \subset \Sigma^{1,0}$ により誘導される）．これは $\pi_{p,q}^S$ を計算するための第1の基本的手段になる．forgetful exact sequences とよぶ．

例．$\pi_4^S = \pi_5^S \approx 0$ であるから，上の完全列より

$$\chi : \pi_{5-i,i}^S \approx \pi_{4-i,i}^S .$$

これより，4-stems $\{\pi_{p,q}^S,\ p+q=4\}$ がわかれば 5-stems は群としては直ちにわかる．（実際にはこれだけで充分ではなく，生成元の構成等 他の考察も必要とされるが）．

3. fixed-point exact sequences.

$$\lambda_{p,q}^S = \varinjlim_{k,\ell} [\Sigma^{p+k,q+\ell}/\Sigma^{0,q+\ell}, \Sigma^{k,\ell}]^\tau$$
$$= \varinjlim_{n} [\Sigma^{n+p,n+q}/\Sigma^{0,n+q}, \Sigma^{n,n}]^\tau$$

は restricted equivariant homotopy groups と呼ばれている（Levine [8]，Landweber [7]）．これを用いると，τ-cofibration $\Sigma^{0,n+q} \to \Sigma^{n+p,n+q} \to \Sigma^{n+p,n+q}/\Sigma^{0,n+q}$ の τ-cohomotopy 完全列の colimit として，fixed-point homomorphism

ϕを含む完全列

$$\cdots \longrightarrow \lambda^S_{p,q} \longrightarrow \pi^S_{p,q} \xrightarrow{\phi} \pi^S_q \xrightarrow{\partial_p} \lambda^S_{p,q-1} \longrightarrow \cdots$$

が得られる．これを fixed-point exact sequences とよび，$\pi^S_{p,q}$ を計算するための第2の基本手段になる．

$\lambda^S_{p,q}$ を決めて，それにより上の完全列から $\pi^S_{p,q}$ を計算せよということになるが，$\lambda^S_{p,q}$ はいろいろな解釈をもつ群で，又，後述（§7）するように，この完全列はかなり多くの所で分解し，若干の所を除けば $\lambda^S_{p,q}$ を決めると直ちに $\pi^S_{p,q}$ が決る．除外した部分は forgetful exact sequences で計算されることが多い。

$\lambda^S_{p,q}$ と他の stable τ-cohomotopy 群との関係であるが，τ-同相 $\Sigma^{n+p-r,n+q+1}(S^{r,0}_+) \approx_\tau \Sigma^{n+p,n+q}/\Sigma^{n+p-r,n+q}$ により

$$\pi^{r-p,-q-1}_S(S^{r,0}_+) = \varinjlim_n [\Sigma^{n+p,n+q}/\Sigma^{n+p-r,n+q}, \Sigma^{n,n}]^\tau.$$

よって，射影 $\Sigma^{n+p,n+q}/\Sigma^{0,n+q} \longrightarrow \Sigma^{n+p,n+q}/\Sigma^{n+p-r,n+q}$ は準同型写像

$$g^{(r)}: \pi^{r-p,-q-1}_S(S^{r,0}_+) \longrightarrow \lambda^S_{p,q}$$

を誘導する．一方，τ-写像 $S^{r+1,0}_+ \longrightarrow S^{r+1,0}/S^{1,0} = \Sigma^{1,0}(S^{r,0}_+)$ は準同型

$$\xi_{r+1,r}: \pi^{r-p,-q-1}_S(S^{r,0}_+) \longrightarrow \pi^{r+1-p,-q-1}_S(S^{r+1,0}_+)$$

を誘導し，可換図式

$$\begin{tikzcd}
\pi_S^{r-p,-q-1}(S_+^{r,0}) \arrow[d, "\xi_{r+1,r}"] \arrow[dr, "g^{(r)}"] & \\
\pi_S^{r+1-p,-q-1}(S_+^{r+1,0}) \arrow[r, "g^{(r+1)}"'] & \lambda_{p,q}^S
\end{tikzcd}$$

が成立ち，準同型

$$g : \varinjlim_r \{\pi_S^{r-p,-q-1}(S_+^{r,0}),\ \xi_{r+1,r}\} \longrightarrow \lambda_{p,q}^S$$

が誘導される．

τ-cofibration の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{0,n+q} \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^{n+p,n+q} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Sigma^{n+p,n+q}/\Sigma^{0,n+q} \arrow[d] \\
\Sigma^{n+p-r,n+q} \arrow[r] & \Sigma^{n+p,n+q} \arrow[r] & \Sigma^{n+p,n+q}/\Sigma^{n+p-r,n+q}
\end{tikzcd}$$

より，完全列の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_S^{r-p,-q-1}(S_+^{r,0}) \arrow[r] \arrow[d, "g^{(\lambda)}"] & \pi_{p,q}^S \arrow[r, "\chi^r"] \arrow[d, equal] & \pi_{p-r,q}^S \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \pi_S^{r-p,-q}(S_+^{r,0}) \arrow[r] \arrow[d, "g^{(r)}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \lambda_{p,q}^S \arrow[r] & \pi_{p,q}^S \arrow[r, "\phi"] & \pi_q^S \arrow[r] & \lambda_{p,q-1}^S \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

を得る．ここで，r について colimit をとり，$\varinjlim_p(\pi_{p,q}^S, \chi) = \pi_q^S$ ([2], §4) より可換図式

$$\begin{tikzcd}
\cdots \varinjlim_r \pi_S^{r-p,-q-1}(S_+^{r,0}) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \pi_{p,q}^S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, equal] & \pi_q^S \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varinjlim_r \pi_S^{r-p,-q}(S_+^{r,0}) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & {} \\
\cdots \arrow[r] \lambda_{p,q}^S & \pi_{p,q}^S \arrow[r, "\phi"] & \pi_q^S \arrow[r] & \lambda_{p,q-1}^S \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

が得られる．よって

Prop. 3.1. $g: \varinjlim_r \{\pi_S^{r-p,-q-1}(S_+^{r,0}),\ \xi_{r+1,r}\} \approx \lambda_{p,q}^S$，同型．

τ-cofibration $S_+^{1,0} \to S_+^{r+1,0} \to S^{r+1,0}/S^{1,0} = \Sigma^{1,0}(S_+^{r,0})$ の τ-cohomotopy 完全列をしらべて，

$$\xi_{r+1,r}: \pi_S^{r-p,-q-1}(S_+^{r,0}) \approx \pi_S^{r+1-p,-q-1}(S_+^{r+1,0}) \quad \text{for } r \geqq p+q+2.$$

よって

Prop. 3.2. $g^{(r)}: \pi_S^{r-p,-q-1}(S_+^{r,0}) \approx \lambda_{p,q}^S$ for $r \geqq p+q+2$.

この同型により，$\pi_S^{r-p,-q-1}(S_+^{r,0})$ を $p+q \leq r-2$ の範囲で計算すれば，$\lambda_{p,q}^S$ が $p+q \leq r-2$ の範囲で求まる．よって，$\pi_S^{p,q}(S_+^{r,0})$ を r について次々に計算して行けばよいことがわかる．

4. Bredon-Landweber の方法.

Bredon [5] は次の群を考察した．

$$\pi_n(r,q;t) = \varinjlim_k [\Sigma^{r,n+k+t-r}/\Sigma^{q,n+k+t-r},\ \Sigma^{t,k}]^\tau$$

すると，

$$\pi_{p+q}(n+p,n+p-r;n) = \varinjlim_k [\Sigma^{n+p,q+k}/\Sigma^{n+p-r,q+k},\ \Sigma^{n,k}]^\tau$$

となり

$$\varinjlim_n \pi_{p+q}(n+p,n+p-r;n) = \varinjlim_n [\Sigma^{n+p,n+q}/\Sigma^{n+p-r,n+q},\ \Sigma^{n,n}]^\tau.$$

よって

Lemma 4.1 $\quad \pi_S^{r-p,-q-1}(S_+^{r,0}) \approx \varinjlim_n \pi_{p+q}(n+p,\ n+p-r;\ n)$.

これが Bredon の考察した群と我々が計算する群との関係である。

所で Landweber [7] はある種の bundle つきのコボルディズム群 $\Omega_n^{r,s}$ を定義し，同型

$$\pi_n(r,q;t) \approx \Omega_n^{r-t,r-q}$$

を示した．これと上の Lema 4.1 とより

Prop. 4.2. $\quad \pi_S^{r-p,-q-1}(S_+^{r,0}) \approx \Omega_{p+q}^{p,r}$，同型．

$$\lambda_{p,q}^S \approx \Omega_{p+q}^{p} = \varinjlim_r \Omega_{p+q}^{p,r}.\ \text{同型}.$$

更に，Landweber [7] は，Pontrjagin-Thom 構成と t-正則近似を利用して，同型

(4.3) $\qquad \Omega_{p+q}^{p,r} \approx \pi_q^S(P^{r-p-1}/P^{-p-1}) \quad$ for $p \leq 0$

を示した．但し，$P^{-1}=\phi$，$P^{r-1}/P^{-1}=P_+^{r-1}$．

Stunted 射影空間の homotopy 群は Stiefel 多様体の homotopy 群と密接に関係する．P^{r-p-1}/P^{-p-1}，$p\leq 0$，は $(-p-1)$-連結であるから，

$$\pi_q^S(P^{r-p-1}/P^{-p-1}) \approx \pi_q^S(P^{r-p-1}/P^{-p-1}) \quad \text{for } q \leq -2p-2.$$

又，実 Stiefel 多様体の cell 構造より

$$\pi_q(P^{r-p-1}/P^{-p-1}) = \pi_q(V_{r-p,r}) \quad \text{for } q \le -2p-1.$$

よって

<u>Prop. 4.4.</u> $\pi_S^{r-p,-q-1}(S_+^{r,0}) \approx \pi_{-p+(p+q)}(V_{-p+r,r})$

for $p \le 0$ and $p+q \le r-2$.

上の同型の右辺は実 Stiefel 多様体の meta-stable range の homotopy 群とよばれるもので，Hoo-Mahowald [6] によって $r \le 13$ に対して計算されている。よって，この同型と James 周期性とを利用して，$\lambda_{p,q}^S$，$p+q \le 13$，は群としては [6] からわかる。

Bredon [5] は Landweber [7] と異なるやり方で上の同型（Prop. 4.4）に相当するものを得，これを利用して $\pi_{p,q}^S$，$p+q \le 13$，のかなりの部分が Hoo-Mahowald [6] を利用して求められる（extension に若干問題がのこるが）としているのである。

しかし，Hoo-Mahowald [6] の結果を利用すると，$\lambda_{p,q}^S$ の元をて-homotopy 群の元としてどのように理解するかがわかりにくくなり，従って extension を決めるのに困難となる筈である。我々は [6] を利用せずに $\pi_S^{p,q}(S_+^{r,0})$ を直接に計算して $\pi_{p,q}^S$ を求める。現在，$\lambda_{p,q}^S$，$p+q \le 13$，は，一ヶ所を除いて計算出来たが，その計算結果は [6] と若干くいち

がいがある。いずれが誤りなのであろうか？

5. $\pi_S^{p,q}(S_+^{r,0})$ の基本的性質

$S^{r,0}$ は，一般の τ-cohomology の forgetful spectral sequence 又は MR-理論と関係して重要な空間で，既に過去にいろいろしらべた対象である．$\pi_S^{p,q}(S_+^{r,0})$ は基本的周期性同型をもつ．

$$\mu : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

を直交積とする．これは τ-写像

$$\mu : \mathbb{R}^{r,0} \times \mathbb{R}^{0,n} \xrightarrow[\tau]{} \mathbb{R}^{n,0}$$

とみなされ，τ-同相

$$\omega : \mathbb{R}^{r,0} \times \mathbb{R}^{0,n} \approx_\tau \mathbb{R}^{r,0} \times \mathbb{R}^{n,0}$$

$$(\omega(x,y) = (x, \mu(x,y))$$

を与える．よって τ-同相

$$\omega : S_+^{r,0} \wedge \Sigma^{0,n} \approx_\tau S_+^{r,0} \wedge \Sigma^{n,0}$$

が誘導され，　周期 $(n,-n)$ の周期性同型

$$\omega^* : \pi_S^{p,q}(S_+^{r,0}) \approx \pi_S^{p+n,q-n}(S_+^{r,0})$$

が得られる．

r を固定したとき，このような直交積をもつ n の最小値は $a_r = 2^{\varphi(r-1)}$ である．よって，周期性同型

(5.1) $\qquad \omega_r^* : \pi_S^{p,q}(S_+^{r,0}) \approx \pi_S^{p+a_r,q-a_r}(S_+^{r,0})$

が存在する．同型 (5.1) を Prop. 4.4 の同型により実 Stiefel 多様体の meta-stable range における homotopy 群の周期性同型になおしたものが James 周期性である．

$\pi_S^{0,0}(S_+^{r,0}) \ni 1$．$\omega_r^* 1 = \omega_r \in \pi_S^{a_r, -a_r}(S_+^{r,0})$ とおく．ω_r は環 $\pi_S^{*,*}(S_+^{r,0})$ の乗法について可逆元であり，$\pi_S^{*,*}(S_+^{r,0})$ は $\mathbb{Z}[\omega_r, \omega_r^{-1}]$-代数になる．

一般に ω_r は一意的には決らないが，直交積を正規化し，正規化直交積には Clifford C_{r-1}-加群が対応するという関係で ω_r には既約な C_{r-1}-加群が対応してまる．$r \not\equiv 0 \pmod 4$ のとき，既約 C_{r-1}-加群は同値性を除きただ一つ ([3]) であるから，このとき ω_r は $\pi_{0,0}^S$ ($\approx \mathbb{Z}[\rho]/(\rho^2-1)$, [2]) の可逆元 $\{\pm 1, \pm\rho\}$ 倍を除き一意的に定まることがわかる．又，$r \equiv 0 \pmod 4$ のとき，既約 C_{r-1}-加群の同値類は二つあるが，一方は他方から C_{r-1} のある自己同型で誘導されている．このことより，$a_r : S^{r,0} \to S^{r,0}$ ($(x_1, \ldots, x_r) \mapsto (-x_1, x_2, \ldots, x_r)$) とおくとき，一方を ω_r とすると他方は $\bar{\omega}_r = a_r^* \omega_r$ の形で（やはり $\{\pm 1, \pm\rho\}$ 倍を除いて）定まる．

τ-cofibration $S_+^{r,0} \subset B_+^{r,0} \to \Sigma^{r,0}$ の stable τ-cohomotopy 完全列の結合準同型を

$$\delta_r^* : \pi_S^{p,q}(S_+^{r,0}) \longrightarrow \pi_{r-p,-q-1}^S$$

とする．

$$\delta_r^+ \omega_r \in \pi^S_{r-a_r,\, a_{r-1}}\,,\qquad \psi(\delta_r^+\omega_r) \in \pi^S_{r-1}$$

となるが，これ等とJ-準同型$J:\pi_{r-1}(O)\to\pi^S_{r-1}$との関係は次の命題で与えられる．

Prop. 5.2 $\psi(\delta_r^+\omega_r)$ は $(\mathrm{Im}\,J)\cap\pi^S_{r-1}$ の生成元．

勿論，r の値によっては $\psi(\delta_r^+\omega_r)=0$ のこともあるが，一般に $\delta_r^+\omega_r \neq 0$．この証明は，$\omega_r$ に対応する直交積をで写像として $\mu_r: S^{r,0}\times(B^{0,a_r},S^{0,a_r})\to(B^{a_r,0},S^{a_r,0})$ とするとき，$\delta_r^+\omega_r$ は μ_r の equivariant Hopf 構成で与えられることを見ればよい．するとJ-準同型もHopf構成で与えられるから，対応関係：$\omega_r \Leftrightarrow$ 既約 C_{r-1}-加群 $\Leftrightarrow$ 既約 graded C_r-加群 $\Leftrightarrow$ $KO(S^r)$ の生成元([3])，を見れば上の命題が証明される．

包含 $\eta_{r,r+1}: S^{r,0}< S^{r+1,0}$ の誘導する写像について，ω_r を一つ選んでおくとき，

$$\eta^+_{r,r+1}\omega_{r+1}=\begin{cases}\omega_r\,, & a_r=a_{r+1}\text{ のとき},\\ \omega_r^2\,, & a_{r+1}=2a_r,\ r\not\equiv 0 \pmod 4,\\ \omega_r\bar{\omega}_r\,, & r\equiv 0 \pmod 4\end{cases}$$

となるように ω_{r+1} が選べる．このことは，r について recursive に $\pi_S^{*,*}(S^{r,0}_+)$ を計算するのに重要な関係である．

$\delta_r^+\omega_r$ は $\mathrm{Im}\,J$ の生成元の equivariant 化であるが，その

他にも種々の元，特にHopf写像のequivariant化が必要になる．同じHopf写像のstable類に相異なるequivariant化が行なわれ，これにはClifford代数の種々のinvolutionが利用される。又，$p+q>7$ のstemsでは，Toda bracketのequivariant化が若干利用される．

6. 準同型 θ.

$$\pi_q^S = \varinjlim_n [\Sigma^{q+n}, \Sigma^n] = \varinjlim_n [\Sigma^{q+2n}, \Sigma^{2n}],$$

$$\pi_{p,q}^S = \varinjlim_n [\Sigma^{p+n,q+n}, \Sigma^{n,n}]^\tau = \varinjlim_n [\Sigma^{p+2n,q+2n}, \Sigma^{2n,2n}]$$

と右辺であらわすと，準同型：$[\Sigma^{q+2n}, \Sigma^{2n}] \to [\Sigma^{2n,q+2n}, \Sigma^{2n,2n}]$, $[f] \mapsto [1\wedge f]$，はcolimitと可換で，準同型

$$\theta : \pi_q^S \longrightarrow \pi_{0,q}^S$$

を誘導する．

Prop. 6.1. $\psi\circ\theta = id$, $\phi\circ\theta = id$.

Cor. 6.2. $\pi_{0,q}^S \approx \pi_q^S \oplus \mathrm{Ker}[\psi : \pi_{0,q}^S \to \pi_q^S]$.

forgetful exact sequenceにProp. 6.1を適用して，

Cor. 6.3. $0 \longrightarrow \pi_{1,q}^S \xrightarrow{\chi} \pi_{0,q}^S \underset{\theta}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} \pi_q^S \to 0$

はsplit short exact sequenceで，

$$\pi_{1,q}^S = \mathrm{Ker}[\psi : \pi_{0,q}^S \to \pi_q^S].$$

$n \geqq 0$ に対して

$$\theta_n = \chi^n \circ \theta : \pi_q^S \to \pi_{-n,q}^S$$

とおく.

<u>Cor. 6.4.</u> $\phi \circ \theta_n = id$ $(\psi \circ \theta_n = 0$ for $n > 0)$.

<u>Cor. 6.5.</u> $\pi_{-n,q}^S = \pi_q^S \oplus \mathrm{Ker}[\phi : \pi_{n,q}^S \to \pi_q^S]$, $n \geqq 0$.

7. External squaring operation (Bredon 構成)

involution をもった 2n-sphere $(\Sigma^n \wedge \Sigma^n, \tau)$, $\tau(x \wedge y) = (y \wedge x)$, を考える. 45° 回転により, τ-同 相

$$\alpha : \Sigma^{n,n} \approx_\tau (\Sigma^n \wedge \Sigma^n, \tau)$$

が得られる.

$\pi_p^S = \varinjlim_n [\Sigma^{2n+p}, \Sigma^{2n}] \ni x = [f]$, $f : \Sigma^{2n+p} \to \Sigma^{2n}$, に対し $[\alpha^{-1} \circ (f \wedge f) \circ \alpha] \in [\Sigma^{2n+p,2n+p}, \Sigma^{2n,2n}]^\tau$ と対応させる. これは colimit と可換で 写像

$$\text{(7.1)} \qquad Sq : \pi_p^S \to \pi_{p,p}^S, \quad x = [f] \to [\alpha^{-1} \circ (f \wedge f) \circ \alpha],$$

を定める. Bredon [5] は, $\pi_{p,q}^S$ の計算にこの構成を数ヶ所で利用している. これは, stable equivariant cohomotopy を普通の stable cohomotopy の equivariant cohomology theory とみる立場から, 一種の external squaring operation とみな

せるものである．その基本的性質：

Prop. 7.1. $\psi\circ Sq(x) = x^2$, $\phi\circ Sq(x) = x$.

$$Sq(x+y) = Sq(x) + Sq(y) + \theta(xy)\cdot\delta_1^{1}\omega_1^{1-p}$$

（但し．$x, y \in \pi_p^S$）．

Cor. 7.2. $\chi^r\circ Sq : \pi_p^S \to \pi_{p-r,p}^S$ は単同型 for $r>0$.

$\phi\circ\chi^r\circ Sq = id$, $r>0$, であるから．$\chi^r\circ Sq$ は fixed-point exact sequences を split させる．

Cor. 7.3. $p<q$ に対し

$$0 \longrightarrow \lambda_{p,q}^S \longrightarrow \pi_{p,q}^S \underset{\chi^{q-p}\circ Sq}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} \pi_q^S \to 0$$

は split short 完全列で．

(7.4) $\pi_{p,q}^S \approx \lambda_{p,q}^S \oplus \pi_q^S$ for $p<q$.

特に，$p=0,\ q>0$ の所を考察する．

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \lambda_{0,q}^S & \longrightarrow & \pi_{0,q}^S & \underset{\theta,\ \chi^q\circ Sq}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} & \pi_q^S & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow\psi & & & \\ & & & \pi_q^S & & & \end{array}$$

上の水平完全列に対し，θ, $\chi^q\circ Sq$ は二つの splitting を与え，$\psi\circ\theta = id$；$\psi\circ(\chi^q\circ Sq) = 0$ である．これより

$\pi_{0,q}^S$ は $\pi_q^S \oplus \pi_q^S$ を直和因子にもつ（一つは θ-image として，他は $\chi^q \circ Sq$-image）。且つ，$\phi \circ (\theta - \chi^q \circ Sq) = 0$ であるから，像の制限により準同型

$$\hat{\theta} = \theta - \chi^q \circ Sq : \pi_q^S \longrightarrow \lambda_{0,q}^S$$

が定まり，

$$\tilde{\psi} \circ \hat{\theta} = id \qquad (\tilde{\psi} = \psi \mid \lambda_{0,q}^S)$$

Landweber [7] の同型（cf., p.8）より

$$\lambda_{0,q}^S = \pi_q^S(P_+^\infty).$$

これより，split 全射

$$(7.5) \qquad \lambda_{0,q}^S = \pi_q^S(P_+^\infty) \underset{\hat{\theta}}{\overset{\tilde{\psi}}{\rightleftarrows}} \pi_q^S \longrightarrow 0$$

が得られる．これは $Z/2$ に対する Kahn-Priddy の定理に外ならない．（この注意は南春男氏による）．

(7.5) は $\pi_{0,q}^S$ の計算に利用される。

8. 結果の表．

fixed-point exact sequence より，直ちに同型

$$(8.1) \qquad \pi_{p,q}^S \approx \lambda_{p,q}^S \qquad \text{for} \quad q < -1$$

が得られる．これと (7.4) とより，p<q 又は q<-1 のときは $\lambda_{p,q}^S$ がわかれば $\pi_{p,q}^S$ は直ちにわかる．$\lambda_{p,q}^S$，

$p+q \leq 13$，の表は，Prop. 3.2，Prop. 4.4 の同型を通じ，周期性同型を利用して Hoo-Mahowald [6] の meta-stable range の実 Stiefel 多様体の homotopy 群の表から作ることも出来る．その意味で $\lambda^S_{p,q}$ の表は省略する．

$\lambda^S_{p,q}$ であらわせない $\pi^S_{p,q}$ の群としての表を下記する。

$\pi^S_{p,q}$，$0 \leq p+q \leq 13$，$-1 \leq q \leq p$，の表

$p+q$ \ q	-1	0	1	2	3	4	5	6
0	0	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$						
1	0	$\mathbb{Z}$						
2	0	$\mathbb{Z}$	$(\mathbb{Z}/2)^2$					
3	$\mathbb{Z}/12$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/24$					
4	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2$				
5	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2$				
6	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/8+\mathbb{Z}/24$			
7	$\mathbb{Z}/2+\mathbb{Z}/120$	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2)^2$	$\mathbb{Z}/240$	0	$\mathbb{Z}/4+\mathbb{Z}/12+\mathbb{Z}/480$			
8	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2)^4$	$(\mathbb{Z}/2)^3$	0	$\mathbb{Z}/4+\mathbb{Z}/24$	$(\mathbb{Z}/2)^4$		
9	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}+(\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^6$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2+\mathbb{Z}/24$	$(\mathbb{Z}/2)^2$		
10	0	$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/3$	$(\mathbb{Z}/2)^3$	$(\mathbb{Z}/2)^2+\mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}/24$	$\mathbb{Z}/3$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	
11	$\mathbb{Z}/252$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2+\mathbb{Z}/8+\mathbb{Z}/63$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/3+\mathbb{Z}/8+\mathbb{Z}/504$	0	$\mathbb{Z}/8+\mathbb{Z}/63$	
12	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/3+\mathbb{Z}/8$	0	0	$(\mathbb{Z}/2)^2$
13	$\mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2+\mathbb{Z}/3$	0	$(\mathbb{Z}/3)^2+\mathbb{Z}/8$	0	$\mathbb{Z}/3$	$(\mathbb{Z}/2)^2$

文献.

[1] S. Araki, Forgetful spectral sequences, Osaka J. Math., 16 (1979), 173-199.

[2] S. Araki and M. Murayama, τ-cohomology theories, Japan. J. Math., 4 (1978), 363-416.

[3] M. F. Atiyah, R. Bott and A. Shapiro, Clifford modules, Topology 3, Suppl. 1 (1966), 81-120.

[4] G. E. Bredon, Equivariant stable stems, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 269-273.

[5] G. E. Bredon, Equivariant homotopy, Proc. of Conference on Transformation groups, New Orleans, 1967, Springer-Verlag (1968), 281-292.

[6] C. S. Hoo and M. E. Mahowald, Some homotopy groups of Stiefel manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., 71 (1965), 661-667.

[7] P. S. Landweber, On equivariant maps between spheres with involutions, Ann. of Math., 89 (1969), 125-137.

[8] J. Levine, Spaces with involutions and bundles over P^n, Amer. J. Math., 85 (1963), 516-540.