数理解析研究所講究録
第365巻 1979年 80-88

Cohomology spheres と cohomology complex projective spaces の S^1 orbit spaces の cohomology

東大 理学部　桝田 幹也

§0 Introduction

一般に top. space X に compact Lie group G が作用しているとする。このとき、$X_G = EG \times_G X$ とすると $H^*(X_G;\mathbb{Z})$ は群作用の様子を比較的よく表しているが、十分とは言えない。ここでは、$H^*(X/G;\mathbb{Z})$ がどの程度作用の様子を表しているかを、$G=S^1$ で、$X \underset{\mathbb{Z}}{\simeq} S^n$ 又は $X \underset{\mathbb{Z}}{\simeq} \mathbb{C}P^n$ の場合について調べる。ただし $X \underset{\mathbb{Z}}{\simeq} Y$ とは $H^*(X;\mathbb{Z}) \cong H^*(Y;\mathbb{Z})$ (ringとして同型)のこと。

以下、§1, §2, において、X は compact Hausdorff $\dim_{\mathbb{Z}} X < \infty$ (i.e. $\dim_{\mathbb{Z}} X = m \overset{def}{\Leftrightarrow} {}^\forall U \subset X$ open $H^s_c(U;\mathbb{Z})=0$ for ${}^\forall s > m$) で異なった isotropy type は有限個の non-trivial effective S^1-action をもつとする。

§1. Cohomology spheres as S^1-orbit spaces of cohomology

以下 $X \underset{\mathbb{Z}}{\sim} S^n$ とする。

素数 p に対して、次のような filtration を考える。

$$(*)\begin{cases} X \supsetneqq X^{\mathbb{Z}_{p^{r_1}}} \supsetneqq \cdots\cdots \supsetneqq X^{\mathbb{Z}_{p^{r_k}}} \supsetneqq X^{S^1} \\ \text{ただし、} \\ X^{\mathbb{Z}_{p^{r_j+1}}} = \cdots\cdots = X^{\mathbb{Z}_{p^{r_{j+1}}}} \quad (0 \leq j < k) \ (r_0 = 0 \text{とする}) \end{cases}$$

Smith の Th. より、

$X^{\mathbb{Z}_{p^{r_j}}} \underset{\mathbb{Z}_p}{\sim} S^{d_j}$ ただし $d_j \equiv n \pmod 2$

$X^{S^1} \underset{\mathbb{Z}}{\sim} S^{n'}$ ただし $n' \equiv n \pmod 2$

注、$X^{S^1} = \phi$ のときは、$n' = -1$ と考える。

Theorem 1 (Conner-Floyd)

$$\tilde{H}^q(X/S^1 ; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n'+3,\ n'+5,\ \cdots, n-1 \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

(証明略)

すなわち、additive には、$H^*(X/S^1 ; \mathbb{Z})$ は、X^{S^1} によって決定される。しかし、一般に、$X^{S^1} = \phi$ のときは、orbit structure の様子を少し反映して、ring structure は異なる。

Theorem 2

- $X^{S^1} \neq \phi$ のとき、cup product は trivial
- $X^{S^1} = \phi$ のとき (故に $n' = -1$, d_j, n は奇数)

$X^{\mathbb{Z}_p} \neq \phi$ なる素数 p に対して、(*) の filtration を考え、

$$m_p(q) = \begin{cases} r_k & 0 \le 2q \le d_k \\ r_j & d_{j+1} \le 2q \le d_j \quad (1 \le j < k) \\ 0 & d_1 < 2q \end{cases}$$

と定義する。 このとき

$\gamma_q \in H^{2q}(X/S^1 ; \mathbb{Z})$ を generator とすると,

$$\gamma_1 \cup \gamma_q = (\prod_p p^{m_p(0) - m_p(q)})\ \gamma_{q+1} \quad となる。$$

注. $X = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ において,

$z \in S^1 \subset \mathbb{C}$ の作用を,

$z \cdot (z_1, \cdots, z_n) = (z^{a_1} z_1, \cdots, z^{a_n} z_n)$ (a_j $(1 \le j \le n)$ は positive integer) と定義した場合は, Kawasaki [3] によって計算されている。

<Th. 2 の証明 の outline>

- $X^{S^1} \neq \phi$ の場合　省略
- $X^{S^1} = \phi$ の場合.　$X_{S^1} \xrightarrow{\pi} X/S^1$ とする。

$X^{S^1} = \phi$ より　$H^s(X/S^1 ; \mathbb{Q}) \underset{\pi^*}{\cong} H^s(X_{S^1} ; \mathbb{Q})$

Th. 1 より　$H^*(X/S^1 ; \mathbb{Z})$ は torsion free だから,

$$H^s(X/S^1 ; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^s(X_{S^1} ; \mathbb{Z}) \text{ injection}$$

一方, $s < n$ に対しては, $X_{S^1} \xrightarrow{p} BS^1$ の Serre spectral seq. より,　$H^s(BS^1 ; \mathbb{Z}) \underset{p^*}{\cong} H^s(X_{S^1} ; \mathbb{Z})$　$(s < n)$

したがって, degree $< n$ においては $H^*(X_{S^1} ; \mathbb{Z})$ の cup product は、よくわかっているから、p:素数に対して、

$$\pi^*: H^{2q}(X/S^1 ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2q}(X_{S^1} ; \mathbb{Z}) \quad (2q<n)$$
$$\gamma_q \longmapsto u_q p^{l_p(q)} \alpha^q \quad \text{ただし } (u_q, p)=1$$
$$\alpha \in H^2(X_{S^1} ; \mathbb{Z}) \text{ generator}$$

としたとき、$l_p(q)$ を求めればよい。

・$X^{\mathbb{Z}_p}=\phi$ なる素数 p の場合. $X_{S^1} \xrightarrow{\pi} X/S^1$ の $\mathbb{Z}_p$ 係数の Leray spectral seq. より $\pi^*: H^*(X/S^1 ; \mathbb{Z}_p) \cong H^*(X_{S^1} ; \mathbb{Z}_p)$ $\therefore l_p(q)=0$ for $\forall q$

・$X^{\mathbb{Z}_p} \neq \phi$ なる素数 p の場合. Λ_p を、$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}-(p)$ による商環とする。ただし、$(p) \subset \mathbb{Z}$ は、p により生成された ideal.

$\pi: X_{S^1} \longrightarrow X/S^1$ の Λ_p 係数の Leray spectral seq を考える。

Lemma 3. $\pi: X_{S^1} \longrightarrow X/S^1$ の Λ_p 係数の Leray spectral seq. において.

$$E_2^{s,t} = \begin{cases} t=0 \text{ のとき.} & H^s(X/S^1 : \Lambda_p) \\ t: \text{even} >0 \text{ のとき.} & \begin{cases} \mathbb{Z}_{p^{m_p(q)}} & \text{if } s=2q \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \end{cases}$$

Theorem 2 より、$H^s(X/S^1 : \Lambda_p)=0$ if $s=$odd だから、この spectral seq. は、collapse している。故に $E_2^{s,t} = E_\infty^{s,t}$ for $\forall s, t$. (証明略)

ところで、

$$\begin{cases} H^{2q}(X_{S^1} : \Lambda_p) = \mathcal{F}^{0,2q} \supset \mathcal{F}^{1,2q-1} \supset \cdots\cdots \supset \mathcal{F}^{2q,0} \supset 0 \\ \qquad \pi^*: H^{2q}(X/S^1 : \Lambda_p) \to H^{2q}(X_{S^1} : \Lambda_p), \quad H^{2q}(X/S^1 : \Lambda_p) \xrightarrow{\text{onto}} \mathcal{F}^{2q,0} \\ \mathcal{F}^{s,t}/\mathcal{F}^{s+1,t-1} \simeq E_\infty^{s,t} \quad (s+t=2q) \end{cases}$$

であるから、Lemma 3 より、$l_p(q)=\sum_{j=0}^{q-1} m_p(j)$、したがって、$\gamma_h \cup \gamma_q = v p^x \gamma_{q+h}$ $(v,p)=1$ とおくと、両辺に π^* を施して、p の指数を比べることによって、$x = l_p(h)+l_p(q)-l_p(q+h)$ が得られる。とくに、$h=1$ のときは、$x=m_p(0)-m_p(q)$、これを、すべての素数 p について、行うことによって求める結果が、得られる。　　q. e. d.

注1. X : smooth manifold で、smooth な non-trivial S^1 作用があるとする。$X \underset{\mathbb{Z}}{\simeq} S^n$ のとき、$\mathbb{Z}_m \subset S^1$ に対して、$H^*(X/\mathbb{Z}_m;\mathbb{Z})$ を、Conner-Floyd の方法と、ほぼ同様の方法で求めることができる。一方、$X^{S^1}=\phi$ のとき、isotropy group をすべて含むような $\mathbb{Z}_m\subset S^1$ に対しては、$X/\mathbb{Z}_m \to X/S^1$ は S^1-bundle になる。したがって、これの Gysin exact seq. を書くことにより、$H^*(X/S^1;\mathbb{Z})$ の cup product を求めることができる。

注2. X : smooth manifold で、smooth な non-trivial S^1 作用があるとする。$X \underset{\mathbb{Z}}{\simeq} S^n$ のとき、$\mathbb{Z}_m \subset S^1$ に対して、$p: X/\mathbb{Z}_m \to X/S^1$ (proj.) とすると、$p^*: H^q(X/S^1;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^q(X/\mathbb{Z}_m;\mathbb{Z})$ onto for $q<n$ が示される。したがって、$H^*(X/\mathbb{Z}_m;\mathbb{Z})$ の ring structure がわかる。特に、$X^{S^1}\neq\phi$ のときは、$H^*(X/\mathbb{Z}_m;\mathbb{Z})$ の cup product は trivial. (cf. Kawasaki [3])

§2. Cohomology complex projective spaces の S^1-orbit spaces の cohomology

以下 $X \underset{L}{\sim} \mathbb{C}P^n$ とする。(但し $L = \mathbb{Z}_p$ (p:素数), $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)

Bredon の Th. より、

$$F = X^{S^1} = \bigsqcup_{i=1}^{l} F_i \ \text{(disjoint union)} \quad F_i \underset{L}{\sim} \mathbb{C}P^{n_i} \quad (1 \leq i \leq l)$$

$$\sum_{i=1}^{l} (n_i + 1) = n+1.$$

Theorem. 5.

$$\tilde{H}^s(X/S^1 ; L) = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{q-1} l_j - \min(n+1, q+1)\right) L & \text{if } s = 2q+1, (q \geq 1) \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

但し、$l_j = \#\{ i \mid n_i \geq j \}$

すなわち、$H^*(X/S^1 ; L)$ は、X^{S^1}によってのみ、決定される。

<証明の outline>

まず、$L = \mathbb{Q}$ のとき証明する。$X_{S^1} \xrightarrow{\pi} X/S^1$ の $\mathbb{Q}$ 係数の Leray spectral seq. を考える。

$$E_2^{s,t} = \begin{cases} t = 0 \text{ のとき} & H^s(X/S^1 ; \mathbb{Q}) \\ t : \text{even} > 0 \text{ のとき} & H^s(F : \mathbb{Q}) \\ \text{その他} & 0 \end{cases}$$

$\therefore \ H^{2q}(X/S^1 : \mathbb{Q}) = E_2^{2q,0} = E_\infty^{2q,0}$. 以下これが 0 を示す。

Prop. 6. $F_{S^1} \xrightarrow{i} X_{S^1}$ (inclusion) とすると、

$i^* : H^*(X_{S^1} ; L) \longrightarrow H^*(F_{S^1} ; L) = H^*(F ; L) \otimes H^*(BS^1 ; L)$. 今、

$x \in H^{2q}(X_{S^1} ; L)$ $(q \neq 0)$ に対して、$i^* x \in H^{2q}(F ; L) \otimes H^0(BS^1 ; L)$

ならば、$x = 0$. (証明略)

$$\begin{tikzcd} F_{S^1} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_{S^1} \arrow[d, "\pi"] \\ F \arrow[r] & X/S^1 \end{tikzcd}$$

π, π' の $\mathbb{Q}$係数 Leray spectral seq. において、それぞれの filtration は、

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{2q}(X_{S^1}:\mathbb{Q}) = \mathcal{F}^{0,2q} & \supset & \mathcal{F}^{1,2q-1} & \supset & \cdots\cdots & \supset & \mathcal{F}^{2q,0} = E_\infty^{2q,0} & \supset & 0 \\ \downarrow \iota^* & & & & & & \downarrow & & \\ H^{2q}(F_{S^1}:\mathbb{Q}) = {}'\mathcal{F}^{0,2q} & \supset & {}'\mathcal{F}^{1,2q-1} & \supset & \cdots\cdots & \supset & {}'\mathcal{F}^{2q,0} = H^{2q}(F:\mathbb{Q})\otimes H^0(BS^1:\mathbb{Q}) & & \end{array}$$

したがって、Prop 6 より、$E_\infty^{2q,0} = 0$ $\therefore H^{2q}(X/S^1:\mathbb{Q}) = 0$.

一方

$$\begin{array}{lcl} & & E_2^{2q+1,0} \quad (q \neq 0) \\ & & \quad \| \\ l_{q-1}\mathbb{Q} = E_2^{2q-2,2} = E_3^{2q-2,2} & \xrightarrow{d_3} & E_3^{2q+1,0} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \cup & & \quad \downarrow \\ \qquad\qquad E_4^{2q-2,2} = E_\infty^{2q-2,2} & & E_4^{2q+1,0} \\ & & \quad \| \\ l_{q-2}\mathbb{Q} = E_2^{2q-4,4} = \cdots = E_5^{2q-4,4} & \xrightarrow{d_5} & E_5^{2q+1,0} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \cup & & \quad \downarrow \\ \qquad\qquad E_6^{2q-4,4} = E_\infty^{2q-4,4} & & \quad \vdots \\ & & \quad \downarrow \\ l_0\mathbb{Q} = E_2^{0,2q} = \cdots = E_{2q+1}^{0,2q} & \xrightarrow{d_{2q+1}} & E_{2q+1}^{2q+1,0} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \cup & & \quad \downarrow \\ \qquad\qquad E_{2q+2}^{0,2q} = E_\infty^{0,2q} & & E_{2q+2}^{2q+1,0} = E_\infty^{2q+1,0} = 0. \end{array}$$

$E_\infty^{2q,0} = 0$ と $H^{2q}(X_{S^1}:\mathbb{Q}) = \min(q+1,\ n+1)\,\mathbb{Q}$ より、

$\dim_{\mathbb{Q}}(E_\infty^{2q-2,2} + E_\infty^{2q-4,4} + \cdots + E_\infty^{0,2q}) = \min(q+1,\ n+1)$ よって、

上の図より、$\dim_{\mathbb{Q}} E_2^{2q+1,0} = \sum_{j=0}^{q-1} l_j - \min(q+1,\ n+1)$ したがって、$L = \mathbb{Q}$ のときは証明された。

$L=\mathbb{Z}_p$のとき．

$X \underset{\mathbb{Z}_p}{\sim} \mathbb{C}P^n \Rightarrow X \underset{\mathbb{Q}}{\sim} \mathbb{C}P^n$ だから．$H^*(X/S^1 ; \mathbb{Z})$ の free part の個数は．得られている。したがって．あと．$\tilde{H}^{ev}(X/S^1 ; \mathbb{Z}_p)=0$ を示せばよい。このため．次のような filtration を考える。

$X=X_0 \supsetneqq X_1 \supsetneqq \cdots\cdots \supsetneqq X_k$ 但し．X_{j+1} は．X_j の S^1 action を effective にしたとき．$X_j^{\mathbb{Z}_p}$ の component のうち．F の component であるもの を．除いたもの．X_kは．S^1 action を effective にしたとき．$X_k^{\mathbb{Z}_p}$の component は．F の component ばかりからなるとする。今．X_k の S^1 action を effective にしておく。$X_k^{\mathbb{Z}_p}=X_k^{S^1}$ だから．$(X_k)_{S^1} \longrightarrow X_k/S^1$ の $\mathbb{Z}_p$ 係数 Leray spectral seq. は．$\mathbb{Q}$ 係数の場合と同じで．同様の議論が成立つ．特に $\tilde{H}^{ev}(X_k/S^1 ; \mathbb{Z}_p)=0$

Lemma 7.　　$H^{ev}(X_j/S^1, X_{j+1}/S^1 ; \mathbb{Z}_p)=0$　　$(0 \leq j < k)$

証明には．X_jの S^1 action を effective にとっておいて．$(X_j - X_{j+1})_{S^1} \longrightarrow X_j - X_{j+1}/S^1$ の compact support の $\mathbb{Z}_p$-Leray spectral seq と Prop 6．を用いる。

Lemma 7 より．triple の exact seq. を使って．$\tilde{H}^{ev}(X/S^1 ; \mathbb{Z}_p)=0$ が示される。　　　q. e. d.

参考文献

[1] A. Borel et. al. 'Seminar on Transformation Groups' Ann. of Math. Studies No. 46. Princeton (1960)

[2] W.Y. Hsiang 'Cohomology Theory of Topological Transformation Groups' Springer (1975)

[3]. T. Kawasaki 'Cohomology of twisted projective spaces and lens complexes.' Math. Ann 206 243-248 (1973)