数理解析研究所講究録
第365巻 1979年 95-104

S^1作用の固定点集合の有理ホモトピー

岡山大 理　吉田朋好

XをS^1作用をもつ単連結有限CW複体とし、Fを固定点集合の一つの連結成分とする。Fも単連結有限CW複体であると仮定する。$x_0 \in F$とし、XとFの有理ホモトピー$\pi_*(X, x_0) \otimes Q$と$\pi_*(F, x_0) \otimes Q$の次元の関係を調べるのが本稿の目的である。以下、Xは有理ホモトピー型有限（$\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k(X) \otimes Q$が有限次元（$Q$上））と仮定する。このような空間は、球面、Lie群の商空間等、通例、変換群のよく考えられる空間を大体含む。G. E. Bredonは[2]において、上のような条件のもとに、$\pi_*(F) \otimes Q$の次元と$\pi_*(X) \otimes Q$の次元との関係及びWhitehead積の関係等を調べている。Bredonの議論は$\pi_*(F) \otimes Q$の元から幾何学的に$\pi_*(X) \otimes Q$の元を構成することにより、両者の比較をするものでかなり巧妙なテクニックを用いる。一方Alldayは[ ]に

おいて Sullivan の有理ホモトピー理論を用いて、Bredon と同様の結果を導いている。ただ、Allday の方法は、代数的に大変複雑な構成を行っているわりには、結果は Bredon の結果からあまり進んでいないと思われる。ここでは、ΩX と ΩF のコホモロジーを局所化定理により比較することで幾分見通しよく Bredon の結果の改良を行うことができることを報告する。

ΩX と ΩF を $x_0 (\in F)$ に基点をもつ X, F のループ空間とする。ΩX は自然に S^1 作用をもち、その固定点集合は ΩF となる。一般に S^1-空間 Y に対し $Y_G = ES^1 \times_{S^1} Y$、$H_G^*(Y) = H^*(ES^1 \times_{S^1} Y)$ とおく（ES^1 は自由 S^1-作用をもつ contractible space）。BS^1 を S^1 の分類空間 $t \in H^2(BS^1, Q)$ を生成元とする。$H^*(BS^1, Q) \cong Q[t]$（多項式環）であり $H_G^*(Y) \otimes Q$ は $H^*(BS^1, Q)$-加群である。次の局所化定理が成り立つ。

<u>定理 1.</u> 包含写像により誘導される準同型写像

$$H_G^*(\Omega X, Q)[t^{-1}] \xrightarrow{\sim} H_G^*(\Omega F, Q)[t^{-1}]$$

は同型写像である。

一般に ΩX は無限に多くの次元において、自明でないコホモロジー群をもつので、上の局所化定理は通常の局所化定理から直ちには出ない。この局所化定理により $\pi_*(X)\otimes Q$ と $\pi_*(F)\otimes Q$ の次元の比較ができて、次の結果を得る。

<u>定理2.</u> X, F を上のような空間とする。このとき $j=0, 1, 2, \cdots$ に対し、

$$\sum_{k\geq 0} \dim_Q \pi_{j+2k}(F)\otimes Q \leqq \sum_{k\geq 0} \dim_Q \pi_{j+2k}(X)\otimes Q$$

が成り立つ。

Bredon [2] では上の不等式の左辺から $\sum_{k\geq 1}$ を除いた形の不等式、Allday [1] では、上の不等式の $j=0, 1$ の場合が証明されている。

定理1の証明.

PX を $x_0 \in F$ に基点をもつ X の path space とする。PX は自然に S^1-空間となり、$\Omega X \longrightarrow PX \longrightarrow X$ は S^1 equivariant な fibration となる。次の図式を考える。

$$
(A)\quad
\begin{array}{ccc}
EG\times_G(\Omega X) & \longrightarrow & EG\times_G(PX)\\
\downarrow & & \downarrow\\
BS^1 = BG & \longrightarrow & EG\times_G X
\end{array}
$$

ここで $BG = EG\times_G\{x_0\}$ とみなす。この図式に Eilenberg-Moore の Spectral seq. を適用する。

$$
\mathrm{Tor}_{H_G^*(X)}(H^*(BG),\ H^*(BG)) \Longrightarrow H_G^*(\Omega X)
$$

(PX は equivariant に可縮だから $H_G^*(PX) = H^*(BG)$)。

同様に次の fibre square を考える。

$$
(B)\quad
\begin{array}{ccc}
EG\times_G(\Omega F) & \longrightarrow & EG\times_G(PF)\\
\downarrow & & \downarrow\\
BG & \longrightarrow & EG\times_G F
\end{array}
$$

これから spectral seq.

$$
\mathrm{Tor}_{H_G^*(F)}(H^*(BG),\ H^*(BG)) \Longrightarrow H_G^*(\Omega F)
$$

を得る。(B) の fibre square から (A) の fibre square への包含写像は、Spectral seq. の間の

写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_{H_G^*(X)}(H^*(BG), H^*(BG)) & \Longrightarrow & H_G^*(\Omega X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Tor}_{H_G^*(F)}(H^*(BG), H^*(BG)) & \Longrightarrow & H_G^*(\Omega F) \end{array}$$

を induce する。これらを ideal $(t) \subset H^*(BG)$ で局所化して、$R_0 = H^*(BG)[t^{-1}]$ とおけば、

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_{H_G^*(X)[t^{-1}]}(R_0, R_0) & \Longrightarrow & H_G^*(\Omega X)[t^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Tor}_{H_G^*(F)[t^{-1}]}(R_0, R_0) & \Longrightarrow & H_G^*(\Omega F)[t^{-1}] \end{array}$$

となる。$\mathbb{F} \subset X$ を X の固定点集合の全体とし、$\mathbb{F} = F \cup F_1' \cup \cdots \cup F_k'$ と連結成分に分解する。このとき通常の局所化定理から

$$H_G^*(X)[t^{-1}] \cong H^*(F) \otimes R_0 \dotplus H^*(F_1') \otimes R_0 \dotplus \cdots \dotplus H^*(F_k') \otimes R_0$$

となる。$H^*(F_1') \otimes R_0 \dotplus \cdots \dotplus H^*(F_k') \otimes R_0$ の部分は、$H_G^*(x_0) \otimes R_0$ $(x_0 \in F)$ に trivial に働くから、

$$\mathrm{Tor}_{H_G^*(X)[t^{-1}]}(R_0, R_0) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Tor}_{H_G^*(F)[t^{-1}]}(R_0, R_0)$$

となる。これから上の2つの Spectral seq. の E_2 での同型が得られ、定理1が証明された。

定理2 の証明

$\mathcal{M}(\Omega X)$ を ΩX の minimal model とする。ΩX は H-空間であるから

$$\mathcal{M}(\Omega X) \equiv \{ S(x_1, x_2, \cdots, x_k) \ , \ d=0 \}$$

とあらわされる。ここに $S(x_1, \cdots, x_k)$ は deg. が偶数の $\{x_i\}$ から生成される多項式環と、deg. が奇数の $\{x_i\}$ から生成される外積多元環のテンソル積をあらわす。$\deg x_1 \leqq \deg x_2 \leqq \cdots \leqq \deg x_k$ と仮定しておく。各 x_i は $\deg x_i - 1$ 次元の X の有理ホモトピーの基底の元を与え、$\sum \dim_{\mathbb{Q}} \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$ の仮定から、上の $\{x_i\}$ は有限個である。又 $\mathcal{M}(\Omega X_G)$ を $\Omega X_G = EG \times_G \Omega X$ の minimal model とするとき それは、

$$\mathcal{M}(\Omega X_G) \equiv \left\{ \begin{array}{l} S(x_1, \cdots, x_k) \otimes \mathbb{Q}[t] , \\ \qquad dx_i = f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, t) \\ \qquad dt = 0 \end{array} \right\}$$

の形で与えられる。ここに $\deg t = 2$, f_i は $(\deg x_i + 1)$ 次

の多項式で $f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0) = 0$ となるものである。
fibration $\Omega X \longrightarrow (\Omega X)_G \longrightarrow BG$ には, minimal model の準同型写像

$$\wedge(x_1, \cdots, x_k) \xleftarrow[\text{projection}]{} \wedge(x_1, \cdots, x_k) \otimes \mathbb{Q}[t] \xleftarrow[\text{inclusion}]{} \mathbb{Q}[t]$$

が対応する。

同様に ΩF の minimal model は

$$\mathcal{M}(\Omega F) = \wedge(y_1, y_2, \cdots), \quad d = 0$$
$$\deg y_1 \leqq \deg y_2 \leqq \cdots$$

で与えられ,

$$\mathcal{M}((\Omega F)_G) = \wedge(y_1, y_2, \cdots) \otimes \mathbb{Q}[t], \quad d = 0$$

となり, fibration $\Omega F \longrightarrow (\Omega F)_G \longrightarrow BG$ には minimal model の準同型写像

$$\wedge(y_1, y_2, \cdots) \xleftarrow[\text{projection}]{} \wedge(y_1, y_2, \cdots) \otimes \mathbb{Q}[t] \xleftarrow[\text{inclusion}]{} \mathbb{Q}[t]$$

が対応する。

$\overline{S\langle x_1,\cdots,x_n\rangle} = \{a \in S\langle x_1,\cdots,x_n\rangle \mid \deg a > 0\}$ とし，$\overline{\mathcal{M}_X} = \overline{S\langle x_1,\cdots,x_n\rangle} \otimes Q[t]$ とする。又，$\overline{S\langle y_1,\cdots\rangle} = \{b \in S\langle y_1,\cdots\rangle \mid \deg b > 0\}$ とし，$\overline{\mathcal{M}_F} = \overline{S\langle y_1,\cdots\rangle} \otimes Q[t]$ とおく。$\overline{\mathcal{M}_X} \subset \mathcal{M}((\Omega X)_G)$，$\overline{\mathcal{M}_F} \subset \mathcal{M}((\Omega F)_G)$ でこれらは $Q[t]$-submodule であり，包含写像から induce される準同型写像 $\overline{\mathcal{M}_X} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}_F}$ がある。（ΩX は固定点をもつことから $a \in \overline{\mathcal{M}_X}$ に対し $da \in \overline{\mathcal{M}_X}$ となる）。ここで

$$Q_X = \overline{\mathcal{M}_X} \,/\, \overline{\mathcal{M}_X}\cdot\overline{\mathcal{M}_X}$$

$$Q_F = \overline{\mathcal{M}_F} \,/\, \overline{\mathcal{M}_F}\cdot\overline{\mathcal{M}_F}$$

とおけば，Q_X，Q_F はともに $Q[t]$-module で包含写像から induce される準同型写像 $i^*: Q_X \longrightarrow Q_F$ がある。又，$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ に対応する元 $\langle \bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n\rangle$ が Q_X の $Q[t]$ 上の生成元となり，$\langle y_1,\cdots\rangle$ に対応する元 $\langle \bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots\rangle$ が Q_F の $Q[t]$ 上の生成元となる。

補題　i^* の (t) による局所化

$$i^*_{t^{-1}}: Q_X[t^{-1}] \longrightarrow Q_F[t^{-1}]$$

は上への写像となる。

この補題は minimal model の定義と、定理1から得られる。

この補題により $\ell = \langle \bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots \rangle$ の個数 $\leqq k$ は直ちにわかる。

$$i_*(\bar{x}_1) = \lambda_1^1 \bar{y}_1 + \cdots + \lambda_\ell^1 \bar{y}_\ell$$

$$\vdots$$

$$i_*(\bar{x}_k) = \lambda_1^k \bar{y}_1 + \cdots + \lambda_\ell^k \bar{y}_\ell$$

$$\lambda_j^i \in Q[t]$$

とすれば、行列 $\Lambda_1 = (\lambda_s^r)$ の階数 $= \ell$ となる。
Λ_1 の ℓ 次小行列 Λ_1' で $\det \Lambda_1' \neq 0$ となるものをとり、$\Lambda_1' = \begin{bmatrix} \lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_\ell^{i_1} \\ \vdots \\ \lambda_1^{i_\ell} \cdots \lambda_\ell^{i_\ell} \end{bmatrix}$ とする。

$\lambda_1^{r_1}$ $(i_1 \leq r_1 \leq i_\ell)$ で $\lambda_1^{r_1} \neq 0$, $(\Lambda_1')_1^{r_1}$ (Λ_1' の $\lambda_1^{r_1}$ の余因子) の行列式 $\neq 0$ となるものをとり

$$\bar{y}_1 \longmapsto \bar{x}_{r_1}$$

と対応づける。 $(\Lambda_1')_1^{r_1} = \begin{bmatrix} \lambda_2^{i_1} & \cdots & \lambda_\ell^{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_2^{i_{\ell-1}} & & \lambda_\ell^{i_{\ell-1}} \end{bmatrix}$

とおいて、同様のことを行い $\bar{y}_2 \longrightarrow \bar{x}_{r_2}$ と対応

させる。これをくり返して、一対一対応 $(\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_\ell) \mapsto (\bar{x}_{r_1}, \cdots, \bar{x}_{r_\ell})$ をつくる。このとき $i^* \bar{x}_{r_j}$ は $t^{s_j}\bar{y}_j$ $(s_j \geq 0)$ という項を含むから $\deg \bar{x}_{r_j} - \deg \bar{y}_j =$ 偶数 (≥ 0) となる。この対応から定理2の不等式が得られる。

References

[1] C. Allday, On the rational homotopy of fixed point sets of torus actions, Topology 17.

[2] G.E. Bredon, Homotopical properties of fixed point sets of circle group actions, I. Am. J. Math. 91