数理解析研究所講究録
第 366 巻 1979 年 14-29

Linear Extremal Problems

茨城大 理　林 寅樹広

次のように記号を定めておく：

D ：ある Riemann 面上の subdomain

u ：D 上の実調和函数

$d\alpha$ ：D 上にコンパクトな台を持つ複素測度

$\mathcal{G}$ ：$=\{g : D$ 上正則で $|ge^{-u}|\leq 1$ on $D\}$

本講では

$$(1)\qquad \left|\int G\,d\alpha\right| = \sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\int g\,d\alpha\right|$$

を満す函数 $G\in\mathcal{G}$ (extremal 函数という) の一意性について考察する．G が extremal 函数なら $e^{i\theta}G$ もそうであるから，$\int G\,d\alpha\geqq 0$ となる extremal 函数が一意に定まるかどうかを論ずればよい．更に (1) の値がゼロのときは，$\mathcal{G}$ に属する函数はすべて extremal となるから，この場合は除外して考えるこ

とにする．すなわち

(2) $\int G\,d\alpha > 0$

を満すとする．

Nを Riemann 面R上の集合として，各点 $p\in N$ のまわりに局所座標 $U=\{|z|<1\}$ がとれて，$U\setminus N$ 上の有界正則函数（resp., 有界調和函数）が U まで正則（resp., 調和）に延長されるとき $N\in N_{AB}$（resp., $N\in N_{HB}$）と書くことにする．これはNが局所的に analytic capacity (resp., logarizmic capacity) ゼロの集合であるといってもいいでしょう．

$\mathcal{D}$ が平面領域のときは次の事実が知られています．

<u>定理</u>（Hejhal [5]，Gamelin [3]） $\mathcal{D}$ が有界平面領域とする．測度 $d\alpha$ の台を含むコンパクト集合Kがあって，$\mathcal{D}\setminus K$ の連結成分を $V_1, \dots V_t$ とするとき，各成分について

$$\partial V_j \cap \partial \mathcal{D} \notin N_{AB}\setminus N_{HB}$$

が成り立つならば，(1)，(2) を満す extremal 函数は一意である．

Hejhal の例によりこの定理は無条件には一般の Riemann 面に拡張されないことが知られている．以下では上の定理が成立するような Riemann 面について考察する．

なおDの種数が有限のときは吹田先生等（[6]）によって別な手法によっても研究されております．

§1 Gamelinによる証明法について　ここではGamelin[2, 3]に従ってextremal函数の一意性についての十分条件を補題として与えます．

まずD上の有界連続函数から線型空間を

$B = \{ge^{-u}:\ g$ はDで正則，ge^{-u} はD上有界$\}$

で定義します．更に

$$\Lambda(h) = \int h e^{u} d\alpha \qquad (h \in B)$$

とおけば，ΛはB上の線型汎函数を定義します．明らかに，$G \in \mathcal{G}$ が(1)と(2)を満すということは $H = Ge^{-u} \in B$ が

(3)　$|H| \leq 1$ on D,　$\Lambda(H) = \|\Lambda\| > 0$

を満すことと同値になっています．よって(3)を満す函数 $H \in B$ の一意性を見ればよい．

そこでDのStone-Čechコンパクト化 $\beta(D)$ を考え，$\beta(D)$ の閉集合で

(4)　$\|h\|_{\beta(D)} = \|h\|_{\Gamma}$　$(\forall h \in B)$

を満すものを考えます．ここでノルム $\|\ \|_E$ は集合E上のsup-normを表わすものとします．（例えば $\Gamma = \beta(D) \setminus D$ とすると $|h|$ $(h \in B)$ はD上で有界なsubharmonic函数であ

るから，最大値の原理により (4) が成立する．しかし実際にはこれよりも少し小さくΓを取る必要があるので，正確なΓの形は後で決める）．このときΓ上に台をもつ測度$d\mu$で

$$(5) \qquad \|d\mu\| = \|\Lambda\|$$
$$\Lambda(h) = \int h\, d\mu \qquad (h \in B)$$

を満すものが存在する．今 $H \in B$ が (3) を満せば，不等式

$$\|\Lambda\| = \int H\, d\mu \leq \int |H|\, |d\mu| \leq \|\mu\|$$

は等式になる．よって

$$H = |d\mu| / d\mu \qquad \text{a.e. on } \operatorname{supp}(d\mu)$$

が成り立つ．$S = \operatorname{supp}(d\mu)$ とおくと，これは H が S 上一意に定まることを意味する．よって $H' \in B$ も (3) を満せば，$H - H' = 0$ on S となる．これより集合 S が次の性質をもてば extremal 函数 G の一意性が言えることになる：

(*) $h \in B$ が $h = 0$ on S ならば $h = 0$ on D.

さてはじめに述べた十分条件とは次のように述べられます．

<u>補題 1</u> 記号は上の如くとして下記 3 つの性質 a), b), c) を満すような集合 $L \subset \beta(D)$ と $A \subset D$ があれば集合 S は (*) を満す．

a) 各点 $a \in A$ に対し，$|f(a)| > \|f\|_L$ となるような D 上の有界な正則函数 f がある;

b) 各点 $a \in A$ に対する B 上の線型汎函数 $h \longmapsto h(a)$ はノルム $\| \ \|_{SUL}$ に関して有界である．すなわち定数 C_a があって $|h(a)| \leq C_a \|h\|_{SUL}$ $(h \in B)$．

c) A の閉包 $\overline{A}$ は D で discrete でない．

<u>証明</u> $h \in B$ が S 上でゼロとする．$a \in A$ ならば a) により D 上の有界正則函数 f で，$f(a) = 1 > \|f\|_L$ となるものがある．よって

$$|h(a)| = |(f^n h)(a)| \leq C_a \|f^n h\|_{SUL} = C_a \|f^n h\|_L$$
$$\leq C_a (\|f\|_L)^n \|h\|_L .$$

$\|f\|_L < 1$ であるから $n \to \infty$ とすれば $h(a) = 0$ でなくてはならないことがわかる．よって，$g = he^u$ は A 上ゼロとなっていて，g は D 上正則であるから c) により g は D 上恒等的にゼロ．よって $h = 0$ on D．（証終）

ここで前述 Hejhal - Gamelin の定理の証明を述べておく．

<u>Hejhal - Gamelin の定理の証明</u> 定理の記号に従ってコンパクト集合 K と $D \backslash K$ の連結成分 $V_1, \cdots, V_t$ を考える．更に，$N_j = \partial V_j \cap \partial D$ とおく．条件より $N_j \in N_{AB}$ ならば $N_j \in N_{HB}$ である．よって必要ならば番号を付け改めて，$N_j \in N_{HB}$ $(1 \leq j \leq k)$，$N_j \notin N_{AB}$ $(k < j \leq t)$ としてよい．ここで自然な連続写像 $\rho : \rho(D) \longrightarrow \overline{D}$ を考える．subharmonic 函数 $|h|$（但

$h\in B$）は定数でない限り $\bigcup_{j=1}^{k} N_j$ 上で最大値をとらないので

$$\Gamma = \rho^{-1}(\bigcup_{j>k} N_j)$$

とおくと，Γ は (4) を満す閉集合である．前述 (5) のように Γ 上の測度 $d\mu$ をとり，$S = supp(d\mu)$ とおく．補題1において，$L = K$ とすれば性質 a), b) を満す点 a の集合 A が D に集積点をもつことを示せばよい．そこで，$|\mu|(\rho^{-1}(N_{j_0}))>0$ となる j_0, $k<j_0<t$，を一つ固定して考える．$E = K\cup S$ とおいて，仮に点 $a\in V_{j_0}$ に対して汎函数 $h\longmapsto h(a)$ $(h\in B)$ がノルム $\|\ \|_E$ に関して非有界だったとする．然らば，その核 $\{h\in B : h(a)=0\}$ は $\overline{B|E}$ で dense である．ここで，$B|E$ は B の元を集合 E に制限して得られる函数の全体を表わし，バーはその E 上での uniform closure を表わす．従って，任意の元 $h\in\overline{B|E}$ に対して，列 $h_n\in B$ があって，$h_n(a)=0$, $\|h_n - h\|_E \to 0$ と出来る．このとき，$h_n/(z-a)\in B$ かつ

$$\left\| \frac{h_n}{z-a} - \frac{h}{z-a} \right\|_E \to 0$$

となるから，$h/(z-a)\in B$．従ってこれを繰り返せば，

$$h/(z-a)^n \in \overline{B|E} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

となることがわかる．Runge の定理により，a にのみ極をもつ有理函数列 g_n があって，

$$g_n \rightrightarrows 0 \ \text{ on } N_{j_0}, \qquad g_n \rightrightarrows 1 \ \text{ on } K\cup(\bigcup_{j\neq j_0} N_j)$$

とできる．$\rightrightarrows$ は一様収束を表わす．よって任意の元 $h\in B$

に対して,

$$\int_{\Gamma\setminus g^{-1}(N_{j_0})} h\,d\mu = \lim_n \int g_n h\,d\mu = \lim_n \int_K g_n h\,e^u\,d\alpha$$
$$= \int_K h\,e^u\,d\alpha = \int_\Gamma h\,d\mu$$

が成り立つことになる．よって，$|\mu|(\Gamma\setminus g^{-1}(N_{j_0}))\geqq\|\lambda\|$ でなくてはならないが，$|\mu|(g^{-1}(N_{j_0}))>0$，$\|\mu\|=\|\lambda\|$ であったからこれは矛盾である．従って，$a\in V_{j_0}$ ならば補題1のb)が成り立っていなくてはならない．また $N_{j_0}\neq N_{AB}$ であったから，V_{j_0} の中には性質a)を満す点もありそれは開集合をなす．よって V_{j_0} の中の点でa), b)を満す点は D の中に集積点をもつ．（証終）

§2 <u>Riemann面への拡張</u>　R を Riemann面として，R 上の有理型函数で無限遠で有界なもの全体を $M^\infty(R)$ と書くことにする（R が closed な Riemann面のときは $M^\infty(R)$ は R 上の有理函数の全体）．$f\in M^\infty(R)$ は極があったとしても高々有限個である．ここで，次の3つの性質を考えます．

(6)　$M^\infty(R)$ は R を weakly に分離する (i.e., $a,b\in R$ が異なる点ならば $(g/f)(a)\neq(g/f)(b)$ となる函数 $f,g\in M^\infty(R)$ がある.)

(7)　R は $M^\infty(R)$-maximal である (i.e., R を subdomain

として含むようなRiemann面R'があったとしても，$R' \supsetneqq R$ならば$M^{\infty}(R)$の元でR'まで有理型に拡張出来ないものがある．）

(8) 任意の点$a \in R$に対してaに極をもつような元$f \in M^{\infty}(R)$がある．

<u>主定理</u>　Riemann面Rが性質(6)，(7)，(8)を満すとする．$D \notin O_{AB}$がRのsubdomainで，Dに含まれるコンパクト集合Kに測度$d\alpha$が台をもち，$D \setminus K$の連結成分を$V_1, \cdots V_t$とするとき$\partial V_j \cap \partial D \notin N_{AB} \setminus N_{HB}$ $(j=1, \cdots, t)$が成立するならば(1)，(2)を満すextremal函数$G \in \mathcal{G}$は唯一つしかない．

この定理で，∂V_j，∂DはRの中での境界を表わす．従ってDのideal boundaryにある部分についての仮定は表面上含まれていないことに注意する．定理の証明にはやはり補題1を使うのであるが，平面領域の場合のようにすぐには証明が出来ない．次の節でそのための準備をする．

§3　<u>maximal ideal space $\mathfrak{M}(D)$</u>　ここではとくにことわらない限りDは一般のRiemann面とする．D上の有界な正則函数の全体を$H^{\infty}(D)$で表わす．sup-norm $\| \ \|_D$により$H^{\infty}(D)$

は可換な Banach 環となる．その maximal ideal space を $\mathfrak{M}(D)$ で表わすことにする．集合的には，$\mathfrak{M}(D)$ は $H^\infty(D)$ 上の線型汎函数 φ で，

$$\varphi(fg) = \varphi(f)\,\varphi(g) \qquad (f, g \in H^\infty(D))$$

を満すもの全体と同一視される．また，φ は必然的に有界な線型汎函数となり，そのノルムは 1 である．更に weak* 位相により $\mathfrak{M}(D)$ はコンパクト Hausdorff 空間となっている．各点 $z \in D$ に対して線型汎函数 φ_z を

$$\varphi_z(f) = f(z) \qquad (f \in H^\infty(D))$$

により定義すると，$\iota : z \to \varphi_z$ は D から $\mathfrak{M}(D)$ への連続な写像となっている．

<u>補題2</u>　$D \notin O_{AB}$ とする．各 $f \in M^\infty(D)$ は $\mathfrak{M}(D)$ から Riemann 球面 $\mathbb{C}^*$ への連続函数 $\hat{f}$ を定義し，次の性質をもつように出来る．

i)　$f(z) = \hat{f}(\varphi_z)$　$(z \in D)$

ii)　g も $M^\infty(R)$ の元とするとき，$\widehat{fg}(\varphi) = \hat{f}(\varphi)\,\hat{g}(\varphi)$.

（但，右辺は $0 \cdot \infty$ や $0 \cdot \infty$ という形の積でないとき）

<u>補題3</u>　D を Riemann 面 R の subdomain で，$M^\infty(R)$ が R を weakly に分離すれば，$M^\infty(D)$ も D を weakly に分離する．

<u>補題4</u>　R が性質 (6) と (8) を満す Riemann 面で，D を R の subdomain とする．このとき $M^\infty(D)$ は D の点を分離する (i.e., $a, b \in D$ $(a \neq b)$ ならば $f(a) \neq f(b)$ となる $f \in M^\infty(D)$ がある)．しかも，D も性質 (8) を満す．

更に，$D \notin O_{AB}$ ならば各点 $a \in D$ に対して a にのみ一位の極をもつ函数 $f \in M^\infty(D)$ が存在し，$\iota: D \to \mathfrak{M}(D)$ は中への位相写像で，像 $\iota(D)$ は $\mathfrak{M}(D)$ の開集合となる．

以上3つの補題の証明はここでは省略させていただきますが，いずれも初等的な方法で証明出来ます．次の定理は，Runge の定理にあたるものです．

<u>補題5</u>　$D \notin O_{AB}$ を Riemann 面とする．$\mathfrak{F}$ を $M^\infty(D)$ の subalgebra で $H^\infty(D)$ を含むものとし，P を D の点の集合で $a \in P$ である函数 $f \in \mathfrak{F}$ が極をもつような点 a の全体とする．$\mathfrak{M}(D)$ の閉集合 E で，$E \cap P = \phi$ となるものとする．$\{\hat{f} : f \in \mathfrak{F}\}$ の E 上での uniform closure を $\mathfrak{F}_E$ で表わすことにすると，次のことがいえる：

a) Banach 環 $\mathfrak{F}_E$ の maximal ideal space $\mathfrak{M}(\mathfrak{F}_E)$ は

$$\{\varphi \in \mathfrak{M}(D) : |\hat{f}(\varphi)| \leq \|\hat{f}\|_E \text{ for } \forall f \in \mathfrak{F}\}$$

と同一視される．

b) 更に，$\iota : D \to m(D)$ が中への位相写像で，$\iota(D)$ が $m(D)$ の開集合になっていると仮定すると，V が $\iota(D)\setminus E$ の連結成分ならば，$V \subseteq m(\mathcal{F}_E)$ または $V \cap m(\mathcal{F}_E) = \phi$ が成立つ．

上の補題で b) は $\mathcal{F} = H^\infty(D)$ のとき Gamelin によって証明されている．この一般化された形でも証明は同様に出来る．a) の証明は容易である．

<u>補題 6</u>　R を (6) と (8) を満す Riemann 面とし，$D \notin O_{AB}$ を R の subdomain とする．E が D の閉部分集合のとき，$H^\infty(D\setminus E)$ の元がすべて D まで正則に延長出来るための必要十分条件は $E \in N_{AB}$ となることである．

<u>証明</u>　十分性は明らかである．必要性を示すために，$E \notin N_{AB}$ と仮定する．E のある点 a のまわりの局所座標があって $U \cap E$ は analytic capacity ゼロでない．補題4により，点 a にのみ1位の極をもつ函数 $f \in M^\infty(D)$ がある．必要ならば，はじめから U を十分小さく取っておいて，f は U 上で 1:1 でしかも $f(U) \cap f(D\setminus U) = \phi$ となっているものとしてよい．h を $f(E\cap U)$ を除いたところで有界正則な Riemann 球

面$\mathbb{C}^*$上の函数とする（非定数）．このとき，$h\circ f\in H^\infty(D\setminus E)$となるが，$h\circ f$はE上まで正則には延長出来ない（証終）．

<u>補題7</u>　Rは(6)，(7)，(8)を満すものとする．$D\notin O_{AB}$をRのsubdomainで，KをDのコンパクト集合，Vを$D\setminus K$の連結成分の一つとする．このとき，VがR内で相対コンパクトでかつ$\partial V\cap\partial D\in N_{AB}$となるための必要十分条件は

(9)　$$|f(a)|\leq\|f\|_K\qquad({}^\forall f\in H^\infty(D))$$

が成立つことである．

<u>証明</u>　必要であることは明らか．(9)が成り立つとする．Riemann面Dの$H^\infty(D)$に関するRoydenのresolution $\tilde{D}$を考える（cf. [6]）．このとき自然な解析写像$\tau: D\to\tilde{D}$は補題4によって1:1になる．各$f\in M^\infty(D)$に対しては，$gf\in H^\infty(D)$となるような函数$g\in H^\infty(D)$ $(g\neq 0)$があるので，$f=(gf)/g$は$\tilde{D}$上の有理型函数に拡張される．また，各$f\in H^\infty(R)$は，複素数αを適当に選べば$1/(f-\alpha)\in M^\infty(D)$となるように出来るので，f自身が$\tilde{D}$上の有理型函数$\tilde{f}$として表現出来る．[7; Proposition 1]により，解析写像$\tilde{\tau}:\tilde{D}\to R$があり，今の作り方から，$\tilde{f}=f\circ\tilde{\tau}$ $(f\in H^\infty(R))$となっている．$H^\infty(\tilde{D})$は$\tilde{D}$をweaklyに分離するので，$\tilde{\tau}$は

$\tilde{D}$上でも1:1である．ところで，[7; Theorem 1]によれば，$\tau(V)$は$\tilde{D}$で相対コンパクトになる．よって $V=\tilde{\tau}\circ\tau(V)$ はRで相対コンパクトである．しかも，$H^\infty(\tau(D))$の元はすべて$\tilde{D}$へ正則に延長されるので，$H^\infty(D)$の元はすべて$\partial V\cap\partial D$上へ正則に延長される．よって前補題により$\partial V\cap\partial D\in N_{AB}$となる．（証終）

§4 <u>主定理の証明</u> 以上の準備のもとに，主定理は平面領域の場合とほとんど同様に証明されます．まず，$\beta(D)$をDのStone-Čechのコンパクト化とする．Rの1点コンパクト化をR^*で表わすと，自然な連続写像$\rho:\beta(D)\longrightarrow R^*$が定義される．$D\setminus K$の連結成分$V_j$のうち，$V_j$がRで相対コンパクトで，$\partial V_j\cap\partial D\in N_{HB}$となるものを$V_1,\cdots,V_k$とし，残りを$V_{k+1},\cdots,V_t$となるように番号をつける．そこで，

$$\Gamma=\beta(D)\setminus\left(D\cup\rho^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{k}(\partial V_j\cap\partial D)\right)\right)$$

とおくと，Γは(4)を満す閉集合である．よってΓ上の測度$d\mu$で(5)を満すものがある．$S=\mathrm{supp}(d\mu)$，$L=K$として補題1を成り立たせる集合$A\ (\subset D)$があることを示せばよい．まず，各V_j $(k<j\leq t)$より1点ずつa_jを取れば，少なく1点a_jに対しては，線型汎函数$h\longmapsto h(a_j)$がノルム$\|\ \|_{S\cup K}$に関して有界である．仮りに，このどれもが非有界な汎函数

であるとしてみよう．$\mathcal{F}$を$M^\infty(D)$の元で$P=\{a_{k+1},\cdots,a_t\}$を除いては極をもたないもの全体とする．点a_jにおいてのみ1位の極をもつ元$f_j\in M^\infty(D)$を取ると，前と同様にして，$\overline{B|(K\cup S)}$はf_jを乗じても$\overline{B|(K\cup S)}$に含まれることが示めせる．よって$\mathcal{F}$の元を乗じても$\overline{B|(K\cup S)}$の元は$\overline{B|(K\cup S)}$に含まれる．補題5により，$\mathcal{M}(\mathcal{F}_{K\cup S})$の中でKとSは交わらない開集合で分離される．よってShilov の idempotent Theorem により，$\mathcal{F}$の元での列g_nで$g_n\rightrightarrows 0$ on K，$g_n\rightrightarrows 1$ on S となるものがある．このとき，任意の$h\in B$に対して，

$$\int h\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_S g_n h\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_K g_n h e^u d\alpha=0$$

となり，(2)に反する．よって，どれかの線型汎函数$h\mapsto h(a_j)$ $(k<j\leq t)$はいつもノルム$\|\ \|_{S\cup K}$に対して有界である．一方$k<j\leq t$ならば，補題7により

$$|f(a_j)|>\|f\|_K \quad \text{for some } f\in H^\infty(D)$$

となるような点$a_j\in V_j$がある．よって補題1のa), b)を満足するような点aは$\bigcup_{j>t}V_j$の中から取れて，それらはD内に集積点をもつ．（証終）

§5 <u>その他の結果と今後の問題</u>　Gamelin [2, 3] に述べ

られている "Pick-Nevanlinna" 型の extremal problem についての extremal 函数の一意性定理は，平面領域の場合と同様に一般化される（cf. [3; Theorem 4.1]）．また，$R \notin O_{AB}$ で，R が (6), (7), (8) を満していて，コンパクト集合 K を $D \setminus K$ が連結となるようにとれれば，extremal 函数 G に対して，$Ge^{-u-i{*}u}$ は D の analytic な境界へは正則に延長されることも示せる．この場合条件 $R \notin O_{AB}$ が不用かどうか不明である．また，主定理においても，条件 $D \notin O_{AB}$ は不用であるかも知れない．これには次の予想が正しければよい：

「Riemann 面 R が (6), (7), (8) を満せば，R は closed であるか，または $R \notin O_{AB}$ となる」

最後に本稿は筆者 [4] に含まれている結果の一部によっている．結果は更に改良されていることを付け加えておきます．

References

1. T.W. Gamelin, Uniform Algebras, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
2. ____________ , Extremal problems in arbitrary domains, Michigan Math. J. 20 (1973), 3-11.
3. ____________ , Extremal problems in arbitrary domains, II, Michigan Math. J. 21 (1974), 297-307.
4. M. Hayashi, Hardy classes on Riemann surfaces, thesis at

Univ. of California, Los Angeles, 1979.

5. D.A. Hejhal, Linear extremal problems for analytic functions, Acta Math. 128 (1972), 91-122.

6. J.A. Jenkins and N. Suita, On the Pick-Nevanlinna problem, Kodai Math. J. 2 (1979), 82-102.

7. H.L. Royden, Algebras of bounded analytic functions on Riemann surfaces, Acta Math. 114 (1965), 113-142.