数理解析研究所講究録
第 366 巻 1979 年 63-70

Adapted Cones とその応用

大阪市立大　理　　池上輝男

1. 背景.

M.V. Keldych は 1941 年に「R^n の有界領域 D の正則境界点 x に対して, D で調和, $\overline{D}$ で連続, 非負, x でのみ 0 をとる関数の存在」を示し, これを使って stable points の特徴づけや, 次の generalized Dirichlet solution H_f の特徴づけを行なった [10].

定理 A. D の境界 ∂D 上の有界連続実関数の全体 $\mathbb{C}(\partial D)$ から D で調和な関数の全体 H(D) への mapping $\mathcal{L}$ が

1) $\mathcal{L}_{f+g} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g$; $f \geq 0$ ならば $\mathcal{L}_f \geq 0$;

2) f が $u \in \mathcal{F} = \mathbb{C}(\overline{D}) \cap H(D)$ の ∂D への制限であれば

$$\mathcal{L}_f = u$$

をみたせば $\mathcal{L}_f = H_f$ (H_f は Perron-Wiener-Brelot の方法による Dirichlet 解)

1961 年に H. Bauer は Choquet 境界の理論と Dirichlet 問題を抽象的に展開して次の結果を得た [1]

<u>定理 B.</u> $x\in\overline{D}$, $\mathcal{M}_x=\{\mu;\ \overline{D}$ 上の Borel measure, $\mu(v)\le v(x)\ \forall v\in\mathcal{S}\}$

$Ch_{\mathcal{S}}\overline{D}=\{x\in\overline{D};\ \mathcal{M}_x=\{\varepsilon_x\}\}$ とおくと

$$Ch_{\mathcal{S}}\overline{D}=D_{reg}$$ (Dの正則境界点の全体)

ただし, $\mathcal{S}$ はDで優調和, $\overline{D}$ に連続的に延長される関数の全体

その後 これらの結果を調和空間に対して拡張する研究がなされた. 大ざっぱに言って axiom of domination をみたすP型 Brelot 空間では定理A, B共に成り立つ. 前者は M. Brelot [7] により, 後者は N. Boboc - A. Cornea [4] によって示されている. しかし heat equation の解を調和関数とする Bauer 空間では両定理とも一般には成り立たない [11].

以下では この問題が Bauer 空間の必ずしも relatively compact でない open set に対して どの様な形で定理化されるかを述べる. 定理Bに関しては Bliedtner-Hausen の結果 (後述3) が一般的な完全解答であろうと思われる. 定理Aについては relatively compact の場合の J. Lukeš (後述4) の結果を一般化する. そしてこれが本論の主目的である. 何れの場合でも相対コンパクト性を仮定しないので compact の外での関数の挙動を制限する条件が必要となる. それには adapted cone を考えることが適切であろう.

2. Adapted cones.

adapted cone の概念は moment problem を扱うため G. Choquet [8] により導入され, Mokobodzki-Sibony により系統的に展開された [13].

X を可算基をもつ局所コンパクト Hausdorff 空間とする. convex cone $P \subset \mathbb{C}(X)$ は次の条件をみたすとき <u>adapted</u> と呼ばれる:

1) $\forall x \in X \ \exists p \in P \ ; \ p(x) > 0$

2) $\forall p \in P \ \exists q \in P$ s.t. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \subset X$ compact, $p < \varepsilon q$ on $X \setminus K$

<u>Example</u> X を strong Bauer space [2] とする. X 上の連続な potentials の全体 P は adapted cone であるが正の調和関数の全体は必ずしも adapted でない.

adapted cone P に対して $P^+ = \{p \in P \ ; \ p \geq 0\}$ とおく. P^+ は

$$\forall x, y \in X, \ x \neq y, \ \forall \lambda \geq 0 \ \exists p \in P^+ \quad p(x) \neq \lambda p(y)$$

をみたすとき, linearly separating, また

$$p_1, p_2 \in P^+ \Rightarrow \inf(p_1, p_2) \in P^+$$

のとき inf-stable であるという.

以下 P^+ は linearly separating, inf-stable と仮定する.

adapted cone が有力である理由の一つは 次の近似定理が成り立つことにあると思われる:

<u>近似定理.[13]</u> P を adapted cone, $f \in \mathbb{C}_P(X) = \{f \in \mathbb{C}(X) ; \exists p \in P \ |f| \leq p\}$ とする. このとき次の性質をもつ $p_0 \in P^+$ が存在する:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_1, p_2 \in \mathrm{P}^+ \quad |f - (p_1 - p_2)| < \varepsilon p_0 \quad \text{on } X.$$

X上の正の measure μ で P の関数がすべて μ-integrable であるものの全体を $\mathcal{M}$ とし，$\mathcal{M}$ に次の順序を入れる：

$$\mu \prec \nu \iff \mu(p) \leq \nu(p) \quad \forall p \in \mathrm{P}$$

$x \in X$ に対して $\mathcal{M}_x = \{\mu \in \mathcal{M};\ \mu \prec \varepsilon_x\}$ とおくとき $\{x \in X;\ \mathcal{M}_x = \{\varepsilon_x\}\}$ を Choquet boundary といって $Ch_{\mathrm{P}}(X)$ とかく．

X上の下半連続関数 v は次の条件をみたすとき P-concave という．

1) $\exists p \in \mathrm{P}$: $v \geq -p$

2) $x \in X$, $\mu \in \mathcal{M}_x \Rightarrow \mu(v) \leq v(x)$.

P-concave な関数の全体を $\hat{\mathrm{P}}$ で表わすとき

$$H(\mathrm{P}) = \hat{\mathrm{P}} \cap (-\hat{\mathrm{P}})$$

とおき，$H(\mathrm{P})$ の関数を P-affine という．

adapted cone P は

「すべての $x \in X$ に対して $\mathcal{M}_x$ は順序 $\prec$ に関して唯一つの minimal μ_x をもつ」

とき simplicial という．

次の定理は Bliedtner-Hansen [3] による．

定理 1　次の (1), (2) は同値である

(1) P は simplicial,

(2) $-u, v \in \underline{P}, \quad u \le v \Rightarrow \exists h \in H(\underline{P}) : \quad u \le h \le v$

このとき，$p \in \underline{P}$ に対して

$$\mu_x(p) = \sup\{h(x) ; h \in H(\underline{P}), h \le p\}.$$

従って $\mu_x(\underline{P})$ は x の関数として X で下半連続である．

3. Bliedtner-Hansen の結果．

X を $\mathfrak{P}$- harmonic space [9]，$\underline{P}$ を X 上の連続な potentials の全体，U を X の open subset とする．

$$S(U) := \{s \in \mathbb{C}_{\underline{P}}(\overline{U}) ; \quad s \text{ は } U \text{ 上優調和}\}$$

は adapted cone であり，$S^+(U)$ は linearly separating, inf-stable.

Bliedtner-Hansen [3] は essential balayage を使って次の定理を証明した．これは定理 B の拡張に対する解答である．

定理 2.

(1) $S(U)$ は simplicial cone である，

(2) 次の (i), (ii) は同値である．

(i) $\mu_x = \varepsilon_x^{\complement U} \qquad \forall x \in \overline{U}$

(ii) $\varepsilon_x^{\complement U}(\partial U \setminus U_{reg}) = 0 \quad \forall x \in U$

従って (ii) $\Rightarrow$ $Ch_{S(U)}(\overline{U}) = U_{reg}$.

4. J. Lukeš の結果．

J. Lukeš [12] は U が relatively compact のとき次の結果

を得た．（定理 A でのべた $\mathcal{L}$ を Keldych operator と呼ぶ）

<u>定理（Lukeš）</u>　次の (i), (ii), (iii) は同値である：

(i) $\partial U \setminus ch_{S(U)}(\overline{U})$ は negligible，すなわち

$$\varepsilon_x^{CU}(\partial U \setminus ch_{S(U)}(\overline{U})) = 0 \qquad \forall x \in U,$$

(ii) $\mathcal{L}$ が Keldych operator ならば $\mathcal{L}_f = H_f \quad \forall f \in \mathbb{C}(\partial U)$,

(iii) $\partial U \setminus U_{reg}$ は negligible.

吾々の目標はこの定理を U が必ずしも relatively compact でない場合に拡張することである．

5．J. Lukeš の結果の拡張．

まず normalized $\underbrace{\text{solution}}_{\text{Dirichlet}}$ に関する注意から始める．

f を ∂U 上の実関数（$\pm\infty$ をとる事を許す）とするとき

$$\overline{H}_f^0(a) = \inf\left\{ v(a);\ \begin{array}{l} \text{hyperharmonic on } U,\ \text{下に有界}, \\ \underline{\lim}\, v \geq f \text{ on } \partial U,\ X\text{のある compact set の外で } v \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\underline{H}_f^0 = -\overline{H}_{(-f)}^0$$

と定義する．$\underline{H}_f^0 = \overline{H}_f^0$ であり，かつこれが調和のとき H_f^0 とかき normalized solution と呼ぶ．又このとき f を resolutive という．このとき容易に次の事がわかる

$$\overline{H}_f^0(a) = \inf\left\{ v(a);\ \begin{array}{l} \text{hyperharmonic on } U,\ \underline{\lim}\, v \geq f \text{ on } \partial U \\ \exists p \in P : v \geq -p \end{array} \right\}$$

（右辺は [14] で考察された $\overline{H}_f^U$ である）

$f\in \mathbb{C}_p(\partial U)$ は resolutive [14]，特に $f\in\mathbb{C}_0(\partial U)$（compact support をもつ $\mathbb{C}(\partial U)$ の関数）は resolutive．従って，$a\in U$ に対して ∂U 上に Borel measure λ_a が存在して

$$\lambda_a(f)=H_f^0(a) \qquad \forall f\in\mathbb{C}_p(\partial U).$$

λ_a は ε_a^{CU} に他ならない．

$$\lim_{a\to x} H_f^0(a)=f(x) \qquad \forall f\in\mathbb{C}_p(\partial U)$$

をみたす $x\in\partial U$ を regular といい，regular boundary points の全体を U_{reg} で表わす．

吾々の目的のために Keldych operator $\mathcal{L}$ の定義を次の様に modify する：$\mathcal{L}$ は次の 1), 2) をみたす $\mathbb{C}_p(\partial U)$ から U で調和な関数の空間の中への写像である

1) $\mathcal{L}$ は linear, positive

2) $s\in S(U) \Rightarrow \mathcal{L}s\le s$ on U.

明らかに $f\to H_f^0$ は Keldych operator である．Keldych operator がこの normalized solution 以外にないための必要十分条件が irregular boundary points の集合が negligible である，すなわち axiom of polarity がみたされることであることが示される．従って結論的に云えば adapted cones を考えることにより定理 A，定理 B 共に axiom of domination の下で必ずしも relatively compact でない open set に対しても成り立つ．

文　　　献

[1] H. Bauer: Šilovscher Rand und Dirichletschen Problem, A.I.F. Grenoble 11 (1961)

[2] H. Bauer: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie (Lecture Notes in Math. 22) (1966)

[3] J. Blidtner-W. Hansen: Simplicial cones in potential theory, Inven. math., 29 (1975)

[4] N. Boboc-A. Cornea: Cône des fonctions continues sur un espace compact, C.R. Acad. Sc. Paris 261 (1965)

[5] N. Boboc-A. Cornea: Convex cones of lower semi-continuous functions on compact spaces, Rev. Roum. Math. pures et appl. 12 (1967)

[6] M. Brelot: Lectures on potential theory, Tata Inst. of Fund. Reser. (1960)

[7] M. Brelot: Sur un théorème de polongement fontionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet, J. D'analyse Math. 8 (1960-61)

[8] G. Choquet: Le problème des moments, Sém. Choquet 1 (1961-62)

[9] C. Constantinescu-A. Cornea: Pentential theory on harmonic spaces, Grundlehren der math. Wiss. 158 (1972)

[10] M.V. Keldych: On the solvability and stability of Dirichlet problem, Uspehi Math. Nauk 8 (1941) (Amer. Math. Soc. Translation II, Ser. 51 (1966))

[11] J. Köhn-M. Sieveking: Reguläre und extremale Randpunkt in der Potential-theorie, Rev. Roum. Math. pures et appl. 12 (1967)

[12] J. Lukeš: Théorème de Keldych dans la théorie axiomatique de Bauer des fonctions harmoniques, Czechoslovak M.J. 24 (1974)

[13] G. Mokobodzki-D. Sibony: Cône adaptés de fonctions continues et theorie du potentiel, Sém. Choquet 6 (1966-67)

[14] H. Watanabe: Simplexes and Dirichlet problem on locally compact spaces, Hiroshima M.J. 6 (1976)