数理解析研究所講究録
第 366 巻 1979 年 71-82

閉集合の上の一様近似について

姫路工業大学　阪井 章

$\mathbb{C}^n$（または複素多様体X）の部分集合Sの上で与えられた連続関数を，Sの上で（あるいはSのある定まった近傍で）正則な関数によつて，Sの上で一様に近似する問題を考える。線型解析の問題として見れば，一様収束の位相の入った連続関数の空間を$C(S)$とするとき，$A\subset B\subset C(S)$をみたす閉部分空間A，Bについて，$A=B$となるための条件を求めることが一様収束の問題であるということができる．ここでは主として，$C(S)$とその部分空間が一致する条件を求める問題を扱う．初めにSがコンパクト集合の場合について，古典的な結果と比較しながら述べ，つぎにSが領域Gの閉部分集合である場合について述べる．簡単のため，用いる関数や多様体は，断らない限り，無限回微分可能であるものとする．またSは$\mathbb{C}^n$の部分集合である場合だけを述べる．

—— コンパクト集合の場合 ——

1. 以下 K はつねにコンパクト集合を表わすものとする. $C(K)$ の閉部分環 A が 1 を含み, K の点を分離するとき, A を K 上の関数環という. K は自然な写像によって A の極大イデアル空間 $\mathcal{M}(A)$ に埋め込まれるが, とくに $\mathcal{M}(A)=K$ である場合, K は A に関するある種の凸性をみたしているといえる(たとえば, K の上の多項式の一様極限全体を $P(K)$ とすれば, $\mathcal{M}(P(K))=K$ は K の多項式凸性を表わしている).

K の近傍で正則な関数の K 上への制限の全体を $H_0(K)$, K のある定まった近傍で正則な関数の K 上への制限全体を $H_0(K,U)$ とし, これらの $C(K)$ での閉包をそれぞれ $H(K)$, $H(K,U)$ とする. また, K の内点 K° で正則な $C(K)$ の関数全体を $A(K)$ で表わす. 明らかに

$$P(K)=H(K,\mathbb{C}^n)\subset H(K,U)\subset H(K)\subset A(K)\subset C(K)$$

であって, これらはすべて K 上の関数環である. ($n>1$ の場合, $K^\circ=\phi$ であっても, K が解析構造を含み得るので, $A(K)$ と $C(K)$ の中間に位する重要な関数環があるが, ここでは述べない.)

2. $n=1$ の場合, 古典的な

Weierstrass の定理 $K\subset\mathbb{R}^1 \Rightarrow P(K)=C(K)$

の一般化として

Laurentiev の定理 $\mathbb{C}^1 \setminus K$ が連結，$K^\circ = \phi \Rightarrow P(K) = C(K)$

がある．これは

Mergelyan の定理 $\mathbb{C}^1 \setminus K$ が連結 $\Rightarrow P(K) = A(K)$．

の特別の場合である．そこで $A(K)$ とその部分空間の間の関係をしらべる問題を Merglyan 型と呼ぶことにしよう．上の条件 ;[$\mathbb{C}^1 \setminus K$ が連結] は [$\mathcal{M}(P(K)) = K$] とかくことができる．R が開いたリーマン面で，$K \subset R$ の場合には，$P(K)$ の代りに $H(K, R)$ を考えることにすると，Merglyan の定理の拡張として

Bishop の定理：$\mathcal{M}(H(K, R)) = K \Rightarrow H(K, R) = A(K)$

がある．これは Bishop の局所化定理と呼ばれる定理によって，Mergelyan の定理に帰着して証明される．その局所化定理の証明は，Cauchy transform の方法か，$\bar{\partial}$ 問題の方法かのいづれかによる（いづれの場合も，Behnke-Stein 核を用いる）．

3. $n > 1$ の場合，Mergelyan 型の問題は主として，$A(K)$ と $H(K)$ の間の関係の問題が残されている．$H(K)$ の関数を，より広い範囲で正則な関数によって近似する問題が解決され，多変数関数論において基本的に重要な役割を果したことは，よく知られている．$A(K)$ の問題は，この 20年間で 2つの方向

で大きな進歩をみた．1つは，Kが有界領域Gの閉包の場合に$A(\bar{G})$と$H(\bar{G})$に関するもので，主なものとして，

Henkin－Lieb－Kerzmanの定理（1969）：Gが滑らかな境界をもつ強擬凸領域であるとき，$H(\bar{G})=A(\bar{G})$

および

Petrosyanの定理（1970）：Gが退化しない解析的多面体領域であるとき，$H(\bar{G})=A(\bar{G})$

がある．いずれも，積分核の評価がその証明の基礎である．

もう1つは，Wermerの研究（1964）に端を発するもので，Kが「うすい集合」の場合の$H(K)$と$C(K)$に関するものである．以下これについて少し詳しく述べる．

4．$n>1$の場合，$H(K)=C(K)$が成立するためには，Kが解析構造を全く含まないことが必要である．Mを$\mathbb{C}^n$（またはX）の実部分多様体とする．Xの複素構造をJとして，任意の$p\in M$に対して$T_p(M)\cap JT_p(M)=\{0\}$であるとき，Mはtotally realな部分多様体であるという．$\mathbb{C}^n$の実部分空間$\mathbb{R}^k$のすべての部分多様体はtotally realである．したがって，

Weierstrassの定理：$K\subset\mathbb{R}^n\Rightarrow P(K)=C(K)$

の一般化として次の定理が考えられる．

定理 A　M が totally real な部分多様体のとき，$K \subset M$ に対して $H(K) = C(K)$．（さらに，K が多項式凸のときは $P(K) = C(K)$）．

この定理は M が実解析的な場合は Wells (1966)，M が十分滑らかな場合は Hörmander − Wermer (1968)，Nirenberg − Wells (1969) によって，また M が C^1 級のときは Harvey − Wells (1972) によって証明された．

さて，$\mathbb{C}^n$（または X）の部分集合 T に対して，条件

(☆)　T の近傍 U と，U で強多重劣調和な非負値関数 ρ があって，$T = \{ z \in U ; \rho(z) = 0 \}$．

を考える．totally real な部分多様体は条件 (☆) をみたす．また逆に，M が (☆) をみたす実部分多様であるとき，M は totally real であることが知られる．そこで (☆) をみたす集合 T を totally real set という．ρ を T の定義関数という．例として $T = \{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 ; y = v = 0,\ xu = 0 \}$ を考えると，T は定義関数 $\rho(z) = y^2 + v^2 + (xu)^2$ をもつ totally real set である（多様体ではない）．

定理 A の一般化として，次の定理が成立する．

定理 1. T が totally real set であるとき，$K \subset T$ に対して

$$H(K) = C(K)$$

(Osaka J. Math., 15 (1978))

定理 1 はもう少し一般の命題に帰着させて証明する.

δ は K の近傍 U で連続な非負値関数とする.

$\exists \eta > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists G_\varepsilon$ (正則凸開集合);

$$\{z : \mathrm{dist}(z, K) < \varepsilon\} \subset G_\varepsilon \subset \{z : \delta(z) < \eta\varepsilon\}$$

が成立するとき，K は δ-凸であるということにする. 以下 K にのみ依存する定数はすべて C で表わす.

補助定理 K は δ-凸であるとする. $F \in C^\infty(U)$ が

$$(\#) \qquad |\bar\partial F(z)| \leq C \cdot \delta(z)^{n+1}, \qquad z \in U$$

をみたすならば，$F|_K \in H(K)$.

(証明) $\omega = \bar\partial F$ とおく. $\bar\partial\omega = 0$ であるから，Hörmander の定理により，G_ε で $\bar\partial u_\varepsilon = \omega$, $\|u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} \leq C\|\omega\|_{L^2(G_\varepsilon)}$ をみたす u_ε がある. 定理の仮定から，$\|u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} < C \cdot \varepsilon^{n+1}$ である. $z \in K$ に対して

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(z)| &\leq c_0 \{\varepsilon^{-n} \|u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon)} + \varepsilon \sup_{G_\varepsilon} |\omega|\} \\ &< C \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

となる. $F_\varepsilon = F - u_\varepsilon$ とおくと，F_ε は G_ε で正則で

$$\|F_\varepsilon - F\|_K \doteq \|u_\varepsilon\|_K < C \cdot \varepsilon$$

(証明終)

Mがtotally realな部分多様体のときは，Kを含むMの有限またはコンパクトな部分多様体M_1をとって，$\delta(z)=\mathrm{dist}(z, M_1)$とおけば，$\delta(z)^2$は$M_1$の近傍で強多重劣調和で，$M_1$は$\delta$-凸であることが示される．Tがtotally real setのときには，定義関数ρが不等式$\rho(z) \geq c\cdot \mathrm{dist}(z, T)^2$をみたしているとは限らないので，この場合は$|\mathrm{grad}\,\rho(z)|^2$がTの近傍で強多重劣調和であるという事実を用いて，$\delta(z)=|\mathrm{grad}\,\rho(z)|$とおけば，Kは$\delta$-凸であることが知られる．

定理1を証明するためには，任意の$f \in C^\infty(U)$に対して，$f|_K \in H(K)$を示せばよい．このfに対して，T上ではfと一致し，補助定理の条件(#)をみたす関数$F \in C^\infty(U)$を構成することができればよい．このFは

$$(1) \qquad F(z) = f(z) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \sum_{\nu_1 \cdots \nu_k} g_{\nu_1 \cdots \nu_k} \frac{\partial \rho}{\partial z_{\nu_1}} \cdots \frac{\partial \rho}{\partial z_{\nu_k}}$$

の形で定義する．こゝに$g_{\nu_1 \cdots \nu_k}$は

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\nu_1 \cdots \nu_{n+1}} \frac{\partial g_{\nu_1 \cdots \nu_{n+1}}}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial \rho}{\partial z_{\nu_1}} \cdots \frac{\partial \rho}{\partial z_{n+1}}$$

が成り立つように作ることができる．(ρの強多重劣調和性を用いる)．T上では$d\rho=0$であるから，(1)によりT上では$F=f$である．(#)は(2)から導かれる．

―― コンパクトでない場合 ――

5. $n=1$ の場合，古典的な結果として

Carleman の定理 $H(\mathbb{R}^1, \mathbb{C}^1) = C(\mathbb{R}^1)$

がある．これを $n>1$ の場合に拡張したものとして，

定理 B. M は $\mathbb{C}^n$ の領域 G の totally real な閉部分多様体であるとする．M の正則凸な近傍 B があって

$$H(M, B) = C(M).$$

がある．これは Nunemacher (Math. Ann. 224 (1976)) によって，Henkin 核を用いて証明された．一般の totally real set のときは，定義関数 ρ に対する前述の不等式の不成立から，Henkin 核を用いることができない．定理 1 の方法と，もとの Carleman の証明を拡張した方法とによって，次の

定理 2. T は $\mathbb{C}^n$ の領域 G の閉部分集合で，totally real set であるとする．T の正則凸な近傍 B があって

$$H(T, B) = C(T).$$

を得る．証明の概略を述べる．T の定義関数 ρ は近傍 U で

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \xi_j \bar{\xi}_k \geq |\xi|^2, \qquad \xi \in \mathbb{C}^n$$

をみたしていると仮定してよい. $\sigma \in C^\infty(G)$ は $\sigma : G \to \mathbb{R}$ が proper なものとする. $\tilde{\lambda}(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ を

$\hat{\lambda}(t) = 1 \ (t \leq 0)$, $0 < \hat{\lambda}(t) < 1 \ (0 < t < 1)$, $\hat{\lambda}(t) = 1 \ (t \geq 1)$

をみたすようにとり. 自然数 m に対して

$$\lambda_m(z) = \hat{\lambda}(\sigma(z) - m), \quad z \in G$$

とおく. また,

$$G_m = \{z \in G : \sigma(z) < m\}, \quad T_m = T \cap \bar{G}_m$$

とする. 非増加数列 $\{r_\nu\}$ に対して, 'swelling function'

$$S_m(z) = \frac{1}{3} \sum_{\nu=1}^{m} 2^{-\nu} r_{\nu+4} \lambda_\nu(z)$$

を考える. r_ν を十分小さくとると, 次のことが成り立つ.

1°). $\rho_m = \rho(z) - S_m(z)$ は U で強多重劣調和である.

2°) $B_m = \{z \in U ; \rho_m(z) < 0\}$ とおくと, $\bar{B}_m \subset U$.

3°) $B = \bigcup_m B_m$ は T の正則凸な近傍である.

4°) $\sigma_m(z) = \rho_m(z) + 2^{-m-2} r_{m+4} \{1 - \lambda_{m+4}(z)\}^2$ とおくと, σ_m は U で強多重劣調和である.

5°) $K_m = \{z \in \bar{G}_{m+4} ; \rho_m(z) \leq 0\}$ とおくと

$$K_m = \bar{B}_m \cup T_{m+4} = \{z \in U ; \sigma_m(z) \leq 0\}.$$

6°) $W_m = \{z \in U ; \sigma_m(z) < 2^{-m-2} r_{m+4}\}$ とおくと $\bar{W}_m \subset U$, かつ $\bar{B}_{m+1} \subset W_m$.

これらのことから K_m 上の近似定理

7°) $H(K_m) = H(K_m, W_m)$

が成り立つ．また定理 1 から $T_0 = T \cap \overline{G_5}$ として

8°) $H(T_0, W_1) = C(T_0)$

が得られる．

4 で述べた $\delta(z)$ として

$$\delta_m(z) = \lambda_{m+1}(z) \rho_m(z) + \{1 - \lambda_{m+1}(z)\} \sum_j \left| \frac{\partial \rho}{\partial z_j} \right|^2$$

を考えると，

9°) K_m は δ_m-凸である．

また定理 1 の証明中に定義した $F(z)$ を用いると．この場合も F は (#) をみたす．従って，補助定理により，

10°) f が $W_m \cap G_{m+3}$ で正則ならば $f|_{K_{m+1}} \in H(K_{m+1}, W_{m+1})$

が得られる．

さて定理 2 の証明を述べる．$f \in C^\infty(U)$，$\varepsilon > 0$ とする．$\varepsilon = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu$ をみたす正数 ε_ν を選ぶ．8°) により W_1 で正則な関数 f_1 があって．

$$\| f_1 - f \|_{T_0} < \varepsilon_1$$

つぎに $g_1 = \lambda_4 f_1 + (1 - \lambda_4) f$ とおくと，g_1 は $W_1 \cap G_4$ で正則

であるから，10°) から W_2 で正則な関数 f_2 があって，

$$\|f_2 - f_1\|_{B_2} = \|f_2 - g_1\|_{B^2} < \varepsilon_2$$

$$\|f_2 - f\|_{T_6} \leq \|f_2 - g_1\|_{T_6} + \|g_1 - f\|_{T_6} < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 .$$

これをくり返して，関数列 $\{f_m\}$ を．

i) f_m は B_m で正則

ii) $\|f_m - f_{m-1}\|_{B_m} < \varepsilon_m$

iii) $\|f_m - f\|_{T_{m+4}} < \sum_1^m \varepsilon_\nu .$

をみたすように選ぶことができる．

$$f_\varepsilon(z) = f_1(z) + \sum_1^\infty \{f_{\nu+1}(z) - f_\nu(z)\}$$

は B で広義一様収束するから f_ε は B で正則で

$$\|f_\varepsilon - f\|_T < \varepsilon . \qquad \text{(証明終)}$$

—— 1つの応用 ——

6. 定理1の応用を1つ述べる．G は $\mathbb{C}^n$ の強擬凸領域とする（∂G は滑らかでなくてもよい）．h は $\bar{G}$ の近傍で正則で $K = \{z \in \bar{G} : h = 0\}$ は ∂G に含まれるものとし，K の近傍で $dh \neq 0$ をみたすとする．また $\bar{G} \setminus K$ は単連結であるとする．これらの仮定のもとで，K が $A(\bar{G})$ の peak set であり，しかも $A(\bar{G})|K$ が閉じていることが関数環の理論から知られる．このとき，K は totally real set である．何故なら，

$$X = \{z \,;\, h(z) = 0,\ dh(z) \neq 0\}.$$

とするとXは複素多様体である．Gは強多重劣調和関数 σ によって $G=\{z:\sigma(z)<0\}$ と表わされるものとして，X上で $\rho(z)=\sigma(z)|_X$ を考えれば，Kは ρ を定義関数とするX上の totally real set である．Xが複素部分多様体であるから K は $\mathbb{C}^n$ の totally real set になる．定理1から次の定義が得られる．

定理．上のG，Kに対して，Kは $A(\bar{G})$ の peak interpolation set である．すなわち，任意の $f\in C(K)$ に対して

$$g(z)=f(z)\quad(z\in K),\quad |g(z)|<\|f\|_K\quad(z\in\bar{G}\setminus K)$$

をみたす $g\in A(\bar{G})$ が存在する．