数理解析研究所講究録
第367巻 1979年 1-33

無限個の粒子の運動

学習院大学理学部　伊藤清

1. 序言　可算無限個の粒子が $\mathbb{R}^r$ の中で独立な Brown 運動をしていると仮定し，粒子に番号をつけて，この運動全体を

$$B_t^1(\omega),\ B_t^2(\omega),\ B_t^3(\omega),\ \cdots$$

であらわす。時点 t における粒子の配置状態は所謂 counting measure

$$N_t(A,\omega) = \#\{i : B_t^i(\omega) \in A\},\quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$$

で表現される。

個々の i に対し，$B_t^i(\omega)$ の見本過程

$$B^i(\omega) = \{B_t(\omega),\ t \in [0,\infty)\}$$

を考えると，これは連続関数の空間 $C = C([0,\infty) \to \mathbb{R}^r)$ の中を動く確率変数である．したがって $B^1(\omega), B^2(\omega), \cdots$ は独立な C-値確率変数列となり，その counting measure

$$\mathbb{N}(\Lambda,\omega) = \#\{i : B^i(\omega) \in \Lambda\},\quad \Lambda \in \mathcal{B}(C)$$

が考えられる。

写像 $\pi_t : C \to \mathbb{R}^r$ を

$$\pi_t(x) = x(t) \quad \text{(evaluation map)}$$

で定義すると，$N_t(A,\omega)$ と $\mathbb{N}(\Lambda,\omega)$ との関係は

$$N_t(A,\omega) = \mathbb{N}(\pi_t^{-1}A,\omega) \qquad \text{(像測度)}$$

で与えられる。したがって counting measure の時間的変動

$$\{N_t,\ t \in [0,\infty)\}$$

を考察するには，たゞ一つの counting measure $\mathbb{N}$ を研究すれば十分である。本稿で論ずる問題はもつと複雑であるが，その考究方法の基本は上記の考え方である。

2. Poisson random measures. $S = (S, \mathcal{S})$ を標準 Borel 空間とし，m を S の上の σ-有限測度とする。確率変数族

$$M(A,\omega), \quad A \in \mathcal{S}, \quad \omega \in (\Omega, \mathcal{F}, P)$$

が下の3条件をみたすとき，平均測度 m の Poisson random measure という．

(p.1) 殆んどすべての ω に対し，$M(A,\omega)$ は $A \in \mathcal{S}$ について σ-有限測度である。

(p.2) すべての $A \in \mathcal{S}$ に対し，$M(A,\omega)$ は平均 $m(A)$ の Poisson 分布に従う．($m(A) = 0, \infty$ のときには，$M(A,\omega)$ は殆んどすべての ω に対し 0, ∞ に等しいと約束する。)

(p. 3)　$A_1, A_2, \cdots, A_n$ が互に素なときには，$M(A_1, \omega)$, $M(A_2, \omega)$, $\cdots$ $M(A_n, \omega)$ は独立である。

Poisson random measure は Poisson 配置ともよばれる。その基本的性質については，拙著'確率論（岩波基礎数学講座）'に詳しく述べてあるから，参照されたい。

2. 1.　counting measure としての表現（詳細は上掲書参照）．

定義から"Poisson random measure は法則同等を除いて，その平均測度で一意に定まる"ことは明らかである。任意の σ 有限測度 m に対して，m を平均測度とする Poisson random measure を構成するには，適当な確率変数列の counting measure として表現する。その方法はつぎのようである。

$m(S) < \infty$ の場合。平均 $m(S)$ の Poisson 分布に従う確率変数 $N(\omega)$ とこれと独立な，しかも互に独立な S-値確率変数 $X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots$ を

$$P\{X_n(\omega) \in A\} = \frac{m(A)}{m(S)}, \quad n=1, 2, 3, \cdots$$

となるようにとる．

$$M(A, \omega) = \#\{i \leqq N(\omega) : X_i(\omega) \in A\}$$

とおくと，平均測度 m の Poisson random measure が得られる。M は $X_1, X_2, \cdots$ の counting measure ではなく，後者を $N(\omega)$ でうちきった有限列の counting measure である。

$m(S) = \infty$ の場合。 S を

$$S = \sum_n S_n \text{ (直和)}, \quad 0 < m(S_n) < \infty \quad (n=1,2,\cdots)$$

の形にかき,

$$N_n, \ X_{n1}, \ X_{n2}, \cdots \qquad (n=1,2,\cdots)$$

を下のように定める。

(a) N_n は平均 $m(S_n)$ の Poisson 分布に従う

(b) $P\{X_{ni} \in A\} = \dfrac{m(A \cap S_n)}{m(S_n)}$

(c) $N_n, X_{ni}, \ n, i=1,2,\cdots,$ は独立.

このとき

$$X_{ni}, \ i \leqq N_n, \ n=1,2,\cdots$$

の counting measure:

$$M(A,\omega) = \sum_n \# \{ i \leqq N_n(\omega) : X_{ni}(\omega) \in A \}$$

は平均測度 m の Poisson random measure である。

2.2. 像測度 $S=(S,\mathcal{S})$, $T=(T,\mathcal{T})$ を標準Borel空間とし, $\pi : S \to T$ を可測 $\mathcal{S}/\mathcal{T}$ とする。M が平均測度 m の Poisson random measure で, $n = m\pi^{-1}$ (像測度) が σ 有限ならば, M の π による像測度 $M\pi^{-1}$:

$$(M\pi^{-1})(B) = M(\pi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{T}$$

は n を平均測度とする T 上の Poisson random measure である。

以上は拙著(前掲)に述べてあるが, こゝで新しい結果とし

て，上記像測度の逆の問題を考えよう。

2.3. *lifting* 上の 2.2 の条件をみたす S, T, $\pi : S \to T$, m, $n = m\pi^{-1}$ が与えられているとし，N を T の上の平均測度 n の Poisson random measure とする．このとき必要ならば基礎の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を拡張して，その上に平均測度 m の S 上の Poisson random measure M を構成し，

$$N = M\pi^{-1}$$

とすることができる．この M を N の π による *lifting* という．M の構成法はつぎのようである。

m が確率測度のときには，(S, m) は確率空間，$\pi(s)$ $(s \in S)$ はその上の T-値確率変数とみなされる。S が標準 Borel 空間であるから，$\pi(s) = t$ という条件の下における確率測度 p_t を S 上に定義して

$$m(A) = \int_T p_t(A)\, n(dt), \quad A \in \mathcal{S} \qquad (1)$$

とすることができる(条件付確率法則)。$p_t(A)$ は A に関しては S 上の確率測度，t に関しては Borel 可測である。m が有限測度のときにも，m のかわりに $m(\cdot)/m(S)$ を考えて，上の $p_t(A)$ が得られる。n が σ 有限のときには，T を有限測度の部分に直和分解して，$T = \sum_n T_n$ とかき，これに対応して S を直和分解して $S = \sum_n S_n$ $(S_n = \pi^{-1}(T_n))$

とし，各々の S_n, T_n の上で $p_t(A)$ を定めて，これをつなぎ合せて，全体の S, T の上で $p_t(A)$ が得られ，上の等式 (1) がなりたつ。この事実を考慮すれば，lifting M の存在をいうには，つぎの定理を証明すればよい。

定理 1.（lifting の構成定理） $S=(S, \mathcal{S})$，$T=(T, \mathcal{T})$ を標準 Borel 空間とし，$p_t(A)$ は $t \in T$ に関し $\mathcal{T}$-可測，$A \in \mathcal{S}$ に関して S の上の確率測度とする。N を T の上の Poisson random measure とし，その平均測度を n とする．基礎の確率空間を拡張して，

$$N = \sum_n \delta_{t_n} \quad (\text{これは } N \text{ が } \{t_n\} \text{ の counting measure の意})$$

の条件の下では，それぞれ $\{p_{t_n}\}$ に従う独立な S-値確率変数 $\{X_n\}$ をとり，その counting measure を M とすると，M は (1) で定まる m を平均測度とする Poisson random measure である。

証明の概略 $n(T) < \infty$ の場合だけを考える。（一般の場合も同様である。）独立な確率変数

$$Y_1, Y_2, \cdots, \nu$$

をとり，ν は平均値 $n(T)$ の Poisson 分布に，Y_n はすべて

$$q(B) = n(B)/n(T), \quad B \in \mathcal{T}$$

に従うとする。N は $Y_i, i \leqq \nu$ の counting measure として

表現できる。この表現は

$$N = \sum_{i \leq \nu} \delta_{Y_i}$$

ともかけるから，$X_1, X_2, \cdots$ を ν には独立にとり，かつ

$$P\{X_i \in A_i,\ i=1,2,\cdots \mid Y_1, Y_2, \cdots\} = \prod_i P_{Y_i}(A_i)$$

となるように定めると，定理の M は $X_i,\ i \leq \nu$ の counting measure となる。明らかに

$$\begin{aligned} P\{X_i \in A_i,\ i=1,2,\cdots,n\} &= E\{\prod_{i=1}^{n} P_{Y_i}(A_i)\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} E(P_{Y_i}(A_i)) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \int_T p_t(A_i)\, q(dt) \end{aligned}$$

$$\int_T p_t(A)\, q(dt) = \frac{1}{n(T)} \int_T p_t(A)\, n(dt) = \frac{m(A)}{n(T)} = \frac{m(A)}{m(S)}$$

$$\left(m(S) = \int_T p_t(S)\, n(dt) = \int_T n(dt) = n(T) \text{ に注意} \right)$$

となるから，

$$P\{X_i \in A_i,\ i=1,2,\cdots,n\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{m(A_i)}{m(S)} \text{。}$$

これから，$X_1, X_2, \cdots$ が独立で，各々が $m(\cdot)/m(S)$ に従うことがわかる。ν は $X_1, X_2, \cdots$ に独立で，平均測度 m の Poisson 分布に従うから，定理の M 即ち $X_i,\ i \leq \nu$ の counting measure は平均測度 m の Poisson random measure となる。∎

<u>3. 無限個の粒子の運動</u> (lifting の例). N を $\mathbb{R}^r$ 上の Poisson random measure とし、その平均測度 n が $\mathbb{R}^r$ 上の Lebesgue 測度に等しいとする。さて

$$N = \sum_n \delta_{a_n} \quad (= \{a_n\} \text{ の counting measure})$$

のとき、$a_1, a_2, \cdots$ から r 次元の Brown 運動を独立に出発させると、可算個の運動のランダムな系が得られる。前節 2.3 の lifting の構成定理により、この系の counting measure M は

$$C = C([0,\infty) \to \mathbb{R}^r)$$

の上の Poisson random measure となり、その平均測度は

$$m(\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^r} n(da) P_a(\Lambda) \quad (n \text{ は } r \text{ 次元 Lebesgue 測度})$$

で与えられる。こゝで P_a は $a \in \mathbb{R}^r$ から出発する r 次元 Brown 運動の道を支配する法則である。

さてこの粒子系の時点 t における配置状態 N_t は第1節にのべたように

$$N_t = M\pi_t^{-1} \quad (\pi_t : \text{evaluation map})$$

で与えられるから、前節 2.1 により、N_t も ($\mathbb{R}^r$ 上の) Poisson random measure である。その平均測度 n_t は

$$n_t(A) = m(\pi_t^{-1}A)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^r} n(da)\, P_a(\pi_t^{-1} A)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^r} n(da)\, p_t(a, A) \qquad (1)$$

で与えられる。こゝで $p_t(a, A)$ は Brown 運動の推移確率で

$$p_t(a, A) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|b-a|^2}{2t}} db \qquad (2)$$

Lebesgue 測度は Brown 運動の不変測度であるから，(1) により

$$n_t(A) = n(A)$$

が得られる。(あるいは (2) を用いて，(1) の最後の積分を計算してもよい。)

N_t と N は同じ平均測度をもつ Poisson random measure であるから，法則同等である。実は更に進んで

"$\{N_t, t \in [0, \infty)\}$ と $\{N_{t+s}, t \in [0, \infty)\}$ が法則同等"

即ち $\{N_t, t \in [0, \infty)\}$ が定常過程であることがいえる。N_t は測度の値をとる確率変数であるから，直接計算で上のことを証明するのは容易でないが，上に導入した C 上の Poisson random measure M を利用すると，下のような簡明な証明が得られる。

shift operator $\theta_s : C \to C$ を

$$(\theta_s \xi)(t) = \xi(t+s)$$

で定義し，

$$M_s = M\theta_s^{-1}$$

とおくと，前節2.1により，M_sもCの上のPoisson random measureとなり，平均測度m_sは下に示すようにmと一致する。

$$m_s(\Lambda) = m(\theta_s^{-1}\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^r} n(da)\, P_a(\theta_s^{-1}\Lambda)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^r} n(da) \int_{\mathbb{R}^r} p_s(a, db)\, P_b(\Lambda) \quad (\text{Markov性})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^r} n(db) P_b(\Lambda) \quad (n\text{の不変性})$$

$$= m(\Lambda)。$$

結局M_sとMとは同じ平均測度をもつPoisson random measureであるから，法則同等である。

さて

$$\pi_{t+s}\xi = \xi(t+s) = (\theta_s\xi)(t) = \pi_t(\theta_s\xi)$$

に注意すると，$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$に対し

$$N_{t+s}(A) = M(\pi_{t+s}^{-1}A) = M(\theta_s^{-1}\pi_t^{-1}A)$$
$$= M_s(\pi_t^{-1}A)$$

即ち

$$N_{t+s} = M_s\pi_t^{-1}$$

が得られる。したがって

$$(N_{t+s},\ t\in[0,\infty)) = (M_s\pi_t^{-1},\ t\in[0,\infty))。$$

また N_t の定義により

$$(N_t,\ t\in[0,\infty)) = (M\pi_t^{-1},\ t\in[0,\infty)).$$

であるから，M から $(N_t,\ t\in[0,\infty))$ を得るのと全く同じ操作で M_s から $(N_{t+s},\ t\in[0,\infty))$ が得られる。既に M と M_s とが法則同等であることを示したから，$(N_t,\ t\in[0,\infty))$ と $(N_{t+s},\ t\in[0,\infty))$ とも法則同等である。したがって $\{N_t\}$ は定常過程である。

以上の議論は，Brown運動を一般のMarkov過程で，Brown運動の不変測度(即ち Lebesgue 測度)をこのMarkov過程の不変測度で置きかえても，そのまゝ適用する。こゝでMarkov過程の道の空間が標準Borel空間である必要があるが，通常のMarkov過程の道の空間は（Eを状態空間とするとき）

$$C([0,\infty)\to E) \quad \text{または} \quad D([0,\infty)\to E)$$

で，しかも E は Polish space となっているから，Skorohod の定理により上記の関数空数も Polish space となり，勿論標準Borel空間である。

もし n をMarkov過程の不変測度にしないと，$\{N_t\}$ の定常性は得られないが，M や N_t が Poisson random measure となることは変らない.

また M が Poisson random measure となる（したがって N_t も）だけならば，Markov過程であることも必要ではない。

4. Poisson random measure に対応する random functional.

再び一般の場合に戻り，M を標準 Borel 空間 $S=(S,\mathcal{S})$ の上の Poisson random measure とし，m をその平均測度とする。この M に対して random functional

$$M(f,\omega) = \int_S f(s)\, M(ds,\omega)$$

を考える。

$$E\left\{ \int_S |f(s)|\, M(ds,\omega) \right\} = \int_S |f(s)|\, m(ds)$$

に注意すると，

$$f \in L^1(S,m) \quad (= L^1 \text{ と略記})$$

のときには，$M(f,\omega)$ は殆んどすべての ω に対して定義できる。こゝで注意すべきは，この例外 ω 集合は f に関係する。

さて $\{M(f,\omega),\ f\in L^1\}$ がきまると，$m(A)<\infty$ のときには，

$$M(A,\omega) = M(1_A,\omega) \qquad \text{a.e.}\ (P)$$

であるから，$M(A,\omega)$ が殆んどすべての ω に対してきまる。この例外集合は A に関係するが，殆んどすべての ω に対して $M(A,\omega)$ が A について測度となっていることと，S が標準 Borel 空間であることから，結局 $M(A,\omega)$ が殆んどすべての ω（例外集合は A に無関係）に対してきまる。この意味で $\{M(f),\ f\in L^1\}$ を知ることと，$M=\{M(A),\ A\in\mathcal{S}\}$ を知ることとは同じことで，このような背景のもとで同じ

M を $M(f)$ にも用いたのである。

以後 $M(f)$ の性質を論ずるにあたっては，'殆んどすべての ω に対して' という言葉は省略する。

定理 4.1.

(i) $f \to M(f)$ は $L^1(S, m)$ から $L^1(\Omega, P)$ の中への線形作用素で，$\|M(f)\|_{L^1(\Omega,P)} \leqq \|f\|_{L^1(S,m)}$ （以後この両辺を $\|M(f)\|_1$，$\|f\|_1$ であらわす。）

(ii) $E(e^{iM(f)}) = \exp\{\int_S (e^{if(s)} - 1)\, m(ds)\}$,

(iii) $\mathrm{Supp}(f_k)$，$k=1,2,\cdots,n$ が互に素であれば，$M(f_k)$，$k=1,2,\cdots,n$ は独立。

証明 (i) は明らか．(ii) を示すには，まず f が単純関数

$$\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{E_i} \qquad (m(E_i) < \infty,\ \{E_i\} \text{ は互に素})$$

のときを考える。実際このときには

$$M(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i M(E_i)$$

に注意すれば，(ii) の等式が得られる。一般の $f \in L^1 = L^1(S,m)$ は単純関数列で $\|\ \|_1$ 近似できることと，

$$|e^{ia} - e^{ib}| \leqq |a - b|$$

に注意すれば，(ii) が $f \in L^1$ に対して成立つことがわかる。(ii) において

$$f = \sum_{k=1}^{n} z_k f_k \qquad (z_k \text{ は実パラメーター})$$

とおいて見ればよい。▮

f が単純関数のとき

$$\tilde{M}(f,\omega) = M(f,\omega) - m(f) \qquad \left(m(f) = \int_S f\,dm \right)$$

とおくと、 $f \to \tilde{M}(f) \in L^2(\Omega, P)$ は線形で、しかも

$$\|\tilde{M}(f)\|^2_{L^2(\Omega,P)} = \int_S |f|^2\,dm = \|f\|^2_{L^2(S,m)}$$

である。これから $f \in L^2 = L^2(S, m)$ に対して $\tilde{M}(f) \in L^2(\Omega, P)$ を拡張定義して、 $f \to \tilde{M}(f)$ を線形かつノルム不変にすることができる。とくに $f \in L^1 \cap L^2$ のときには

$$\tilde{M}(f) = M(f) - m(f)$$

がなりたつが、 $f \in L^2 \setminus L^1$ のときには左辺は意味をもつが右辺は意味がなく、 $f \in L^1 \setminus L^2$ のときにはこの逆である。

定理 4.2

(i) $f \to \tilde{M}(f)$ は $L^2(S, m)$ から $L^2(\Omega, P)$ の中への線形、ノルム不変な作用素である。

(ii) $E(e^{i\tilde{M}(f)}) = \exp\left\{ \int_S (e^{if(s)} - 1 - if(s))\, m(ds) \right\}$。

(iii) $\mathrm{Supp}(f_k)$, $k = 1, 2, \cdots, n$ が互に素ならば、

$\tilde{M}(f_k)$, $k = 1, 2, \cdots, n$ は独立。

証明 (i) は既に示した。(ii), (iii) は前定理の (ii), (iii) と同様の考えで証明できる。▮

$$C_M(f) = E(e^{iM(f)}), \quad f \in L^1 = L^1(S, m)$$

$$C_{\tilde{M}}(f) = E(e^{i\tilde{M}(f)}), \quad f \in L^2 = L^2(S, m)$$

をそれぞれ M, $\tilde{M}$ の特性汎関数 (characteristic functional) という。実際 $C_M(f)$ を知ると,

$$E(e^{i\sum_{k=1}^{n} z_k M(f_k)}) = C_M(\sum_{k=1}^{n} z_k f_k)$$

$$(z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{R})$$

により, $M(f_1), M(f_2), \cdots, M(f_n)$ の結合分布がわかるから, $C_M(f)$ は $\{M(f), f \in L^2\}$ の確率法則をきめる。これが $C_M(f)$ を M の特性汎関数とよぶ所以である。$C_{\tilde{M}}(f)$ についても同様である。

5. Gauss random measures. $S = (S, \mathcal{S})$ を標準Borel空間, m をその上の σ 有限測度とする。確率変数の系

$$X(A), \quad m(A) < \infty$$

がつぎの3条件をみたすとき, 分散測度 m の Gauss random measure という。

(g.1) $X(A)$ は平均 0, 分散 $m(A)$ の Gauss 分布に従う。

(g.2) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が互に素であれば, $X(A_1), X(A_2), \cdots X(A_n)$ は独立で, 更に $\sum_{k=1}^{n} m(A_k) < \infty$ ならば,

$$X(\bigcup_k A_k) = \sum_k X(A_k).$$

この条件から, $\{X(A), m(A) < \infty\}$ は Gauss系 (任意の有限結

合分布が Gauss 分布）をなすこと，その平均は 0 で，分散行列は

$$E(X(A)X(B)) = m(A \cap B)$$

で与えられることがわかる。

$$m(A \cap B) = \int_S 1_A(s)\, 1_B(s)\, m(ds)$$

により，$m(A \cap B)$ は (A, B) に関し正定符号であるから，Gauss 系の存在定理により，つぎの定理を得る。

定理 5.1　S 上の任意の σ 有限測度 m に対し，分散測度 m の Gauss 系が存在し，法則同等を除いて一意である。

（この定理は $S = (S, \mathcal{B})$ が標準でなくても，m が σ 有限でなくても成立する。）

Poisson random measure の場合と同様に Gauss random measure X に対応する random functional を

$$X(f) = \int_S f(s)\, dX(s) \quad (\text{Wiener integral})$$

で定義すると，つぎの定理がなりたつ。

定理 5.2.

(i)　$f \to X(f)$ は $L^2(S, m)$ から $L^2(\Omega, P)$ の中への線形かつノルム不変な作用素である。

(ii)　$X(f)$ は平均 0，分散 $\|f\|_2$ $(= \|f\|_{L^2(S,m)})$ の Gauss 分布に従う。もっと一般に $\{X(f),\ f \in L^2 (= L^2(S, m))\}$ は平均 0,

分散行列：

$$E(X(f)X(g)) = (f,g)_2 \left(= (f,g)_{L^2} = \int_S fg\,dm\right), \quad f, g \in L^2$$

の Gauss 系をなす。

(iii) $f_1, f_2, \cdots, f_n$ が L^2 の中で直交すれば，$X(f_1), X(f_2), \cdots X(f_n)$ は独立．（$\mathrm{Supp}(f_k)$, $k=1,2,\cdots,n$ が互に素であれば，当然この仮定がなりたつ。）

(iv) $E(e^{iX(f)}) = e^{-\frac{1}{2}\|f\|_2^2}$.

証明は Wiener integral の定義から明らかである。▌

$$C_X(f) = E(e^{iX(f)})$$

を X の特性汎関数という。$C_X(f)$ が $\{X(f)\}$ の有限結合分布を定めることは，前節の C_M, $C_{\bar{M}}$ と同様である。

註 定義の (8.2) は殆んどすべての ω に対し成立するのであり，しかもその例外 ω 集合は $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に関係する。したがって，殆んどすべての ω に対し $X(A,\omega)$ が A の実数値加法的集合関数となっているわけではない。これは $X(A,\omega)$ を A ごとに P 測度 0 の点で修正しても，なりたつとはいえない。この点 Poisson random measure の場合と異なる。

6. Poisson random measure に関する中心極限定理. M_λ, $\lambda > 0$ を $S=(S,\mathcal{B})$ の上の Poisson random measure の系と

し，各々の平均測度を $\lambda\cdot m$ とする。ここで M_λ, $\lambda>0$ はそれぞれ異なる確率空間の上で定義されていると考えてもよい。また別に分散測度 m の Gauss random measure X を考える。

<u>定理 6</u>（中心極限定理）　確率変数の系

$$\left\{ X_\lambda(A) = \frac{M_\lambda(A) - \lambda\cdot m(A)}{\sqrt{\lambda}},\quad m(A)<\infty \right\}$$

は，$\lambda\to\infty$ のとき，

$$\{ X(A),\ m(A)<\infty \}$$

に法則収束する。この意味は前者の任意の有限結合分布が後者の対応する有限結合分布に収束することである。

<u>証明</u>　第4節で定義した $\tilde{M}$ を用いて

$$X_\lambda(f) = \frac{\tilde{M}_\lambda(f)}{\sqrt{\lambda}},\quad f\in L^2 = L^2(S,m)$$

とおくと，$m(A)<\infty$ のときには

$$X_\lambda(A) = X_\lambda(1_A).$$

定理の結論は，任意の $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対し

$$E\left(e^{i\sum_{k=1}^n z_k X_\lambda(A_k)}\right) \to E\left(e^{i\sum_{k=1}^n z_k X(A_k)}\right)\quad(\lambda\to\infty)$$

$$z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{R}$$

がなりたつことである。これを示すには，上の注意により

$$E(e^{i\sum_{k=1}^{n} z_k X_\lambda(f_k)}) \longrightarrow E(e^{i\sum_{k=1}^{n} z_k X(f_k)}) \quad (\lambda \to \infty)$$

$$z_k \in \mathbb{R}, \quad f_k \in L^2$$

をいえば，十分である。そのためには

$$E(e^{iX_\lambda(f)}) \longrightarrow E(e^{iX(f)}) \quad (\lambda \to \infty), \quad f \in L^2$$

を示して，$f = \sum_{k=1}^{n} z_k f_k$ とおけばよい。

定理 4.2 の (ii) を用いて

$$E(e^{iX_\lambda(f)}) = E(e^{i\frac{\tilde{M}_\lambda(f)}{\sqrt{\lambda}}})$$

$$= E(e^{i\tilde{M}_\lambda(\frac{f}{\sqrt{\lambda}})})$$

$$= \exp\left\{\int_S (e^{i\frac{f(s)}{\sqrt{\lambda}}} - 1 - i\frac{f(s)}{\sqrt{\lambda}})\lambda\, m(ds)\right\}$$

$$\left|(e^{i\frac{f(s)}{\sqrt{\lambda}}} - 1 - i\frac{f(s)}{\sqrt{\lambda}})\lambda\right| \leqq \frac{1}{2}\frac{f(s)^2}{\lambda}\cdot\lambda = \frac{1}{2}f(s)^2$$

$$(e^{i\frac{f(s)}{\sqrt{\lambda}}} - 1 - i\frac{f(s)}{\sqrt{\lambda}})\lambda \longrightarrow -\frac{1}{2}f(s)^2 \quad (\lambda \to \infty)$$

$$\int_S f(s)^2 m(ds) = \|f\|_2^2 < \infty$$

であるから，dominated convergence theorem により，$\lambda \to \infty$ として

$$E(e^{iX_\lambda(f)}) \longrightarrow \exp\{-\tfrac{1}{2}\|f\|_2^2\} = E(e^{iX(f)}) \quad (\text{定理 } 5.2(\text{iv})).$$

これで定理 6 の証明は終った。■

$M^1, M^2, \cdots$ が独立で，どれも平均測度 m の S 上の Poisson random measure とすると，

$$M_n = \sum_{k=1}^n M^k$$

は平均測度 $n \cdot m$ の S 上の Poisson random measure となる。上の定理で $\lambda = 1, 2, \cdots$ とおくと

$$\frac{M_n - EM_n}{\sqrt{n}} = \frac{M_n - n \cdot m}{\sqrt{n}} \longrightarrow X \quad (\text{法則収束})$$

が得られる。これが上の定理を中心極限定理とよぶ所以である。

7. 無限粒子の運動の極限　再び Poisson random measure で配置された粒子の独立な運動の系を考えよう。3節の末尾に注意したように、この粒子の運動は Markov 過程（状態空間は E）とし、その推移確率を $p_t(a, db)$, a より出発する道の確率法則を P_a であらわす。N^λ $(\lambda > 0)$ を E の上の Poisson random measure とし、その平均測度は $\lambda \cdot m$ とする。こゝで m は上の Markov 過程の不変測度とする。したがって $\lambda \cdot m$ も不変測度となる。さて $N^\lambda = \sum_n \delta_{a_n}$ のときには、$a_1, a_2, \cdots$ から、それぞれ $P_{a_1}, P_{a_2}, \cdots$ に従う Markov 過程を独立に出発させて、可算個の運動のランダムな系を得る。この系の counting measure は道の空間：

$$D = D([0, \infty) \to E)$$

の上の Poisson random measure（M^λ であらわす）となり、その平均測度は

$$\lambda m \quad (\text{但し} \quad m(\Lambda) = \int_E n(da) P_a(\Lambda), \quad \Lambda \in \mathcal{B}(D))$$

で与えられる。拡散過程の場合には P_a は(したがって λm も M^λ も) $C = C([0,\infty) \to E)$ に集中している。第3節と同様に，粒子系の時点 t における配置状態 N_t^λ は

$$N_t^\lambda = M^\lambda \pi_t^{-1} \qquad (\pi_t \xi = \xi(t),\ \xi \in D)$$

で与えられ，λm の不変性により

$$\{N_t^\lambda,\ t \in [0,\infty)\}$$

は測度の値をとる定常過程である．とくに N_t^λ は $N_0^\lambda = N^\lambda$ と同じく λm を平均測度とする E上の Poisson random measure である。

さて $\{M^\lambda\}$ に前節の中心極限定理を適用すると，法則極限として，分散測度 m の D上の Gauss random measure X が得られる。$\theta_t : D \to D$ を shift operator $((\theta_s\xi)(t) = \xi(t+s))$ とすると，つぎの定理が得られる。

<u>定理 7.1</u> (m の shift 不変性)

(i) $m(\theta_s^{-1}\Lambda) = m(\Lambda)$, $\Lambda \in \mathcal{B}(D)$

(ii) $\int_D f(\theta_s \xi)\, m(d\xi) = \int_D f(\xi)\, m(d\xi)$, $f \in L^1(D, m)$ または $f \geqq 0$.

<u>証明</u>.

(i) $m(\theta_s^{-1}\Lambda) = \int_E n(da)\, P_a(\theta_s^{-1}\Lambda)$

$$= \int_E n(da) \int_E p_s(a, db)\, P_b(\Lambda) \qquad (\text{Markov 性})$$

$$= \int_E n(db)\, P_b(\Lambda) \qquad (n \text{ の不変性})$$

(ii) は (i) と積分の定義により明らか。∎

前節の中心極限定理により，$\lambda \to \infty$ のとき

$$X^\lambda(\cdot) = \frac{M^\lambda(\cdot) - EM^\lambda(\cdot)}{\sqrt{\lambda}} \longrightarrow X(\cdot) \quad (\text{法則収束})$$

がなりたつ。時点 t におけるこの粒子系の配置状態は上述したように，

$$N_t^\lambda = M^\lambda \pi_t^{-1}$$

であらわされるが，これを M^λ と同様に基準化して

$$Y_t^\lambda(\cdot) = \frac{N_t^\lambda(\cdot) - EN_t^\lambda(\cdot)}{\sqrt{\lambda}}$$

を考えると，上の $X^\lambda \to X$（法則収束）から，

$$Y_t^\lambda(\cdot) = X^\lambda(\pi_t^{-1}(\cdot)) \longrightarrow X(\pi_t^{-1}(\cdot)) \quad (\text{法則収束})$$

が得られる。この極限の確率過程

$$Y_t \equiv X\pi_t^{-1}, \qquad t \in [0, \infty)$$

を研究するのが，これからの目的である。

定理 7.2

(i) Y_t は E 上の分散測度 n の Gauss random measure である。

(ii) $\{Y_t, t \in [0, \infty)\}$ は定常 Gauss 過程である。

(iii) $Y_t(\varphi) = X(\varphi \circ \pi_t)$, $\varphi \in L^2(E, n)$ 。

(iv) $Y_t(\varphi)$ は平均値 0, 分散 $\|\varphi\|^2_{L^2(E,n)}$ の Gauss 分布に従う。

証明

(i) $Y_t = X\pi_t^{-1}$ により Gauss random measure であることは明らか。分散測度は

$$E(Y_t(A)^2) = E(X(\pi_t A)^2) = m(\pi_t^{-1}A) \cdot$$
$$= \int_E n(da)\, P_a(\pi_t^{-1}A)$$
$$= \int_E n(da)\, P_t(a, A) = n(A) \quad (n \text{ の不変性})$$

(ii) $\{N_t^\lambda, t \in [0, \infty)\}$ の定常性から $\{Y_t^\lambda, t \in [0, \infty)\}$ の定常性, それから $\{Y_t, t \in [0, \infty)\}$ の定常性がでる。また 3節の $\{N_t\}$ の定常性の証明と同じ方法で直接に証明してもよい。

(iii) $$Y_t(\varphi) = \int_E \varphi(a)\, Y_t(da) = \int_D \varphi(\pi_t \xi)\, X(d\xi) \quad (\because Y_t = X\pi_t^{-1})$$
$$= X(\varphi \circ \pi_t)$$

(iv) $Y_t(\varphi) = \int_E \varphi(a)\, Y_t(da)$ と Wiener integral の定義と(i)から明らか。▮

我々の最終の目的は $\{Y_t\}$ がある簡単な無限次元の確率微分方程式をみたすことを示すにある。それにはいくらかの準

備を必要とする。

<u>8. 無限測度空間 $(D, \mathcal{B}(D), m)$ の上の Markov 過程</u>　上に考察した推移確率 $p_t(a, db)$, 道の法則 P_a, 不変測度 n, n から導いた D 上の測度 m

$$m(\Lambda) = \int_E n(da)\, P_a(\Lambda)$$

を出発点とする。m は一般に無限測度であるから，$(D, \mathcal{B}(D), m)$ は確率空間ではなく，無限測度空間である。したがって，

$$\xi(t) = \pi_t \xi, \qquad \xi \in (D, \mathcal{B}(D), m)$$

は Markov 過程とはいえない。それにもかかわらず，これは Markov 過程と極めてよく似た性質をもっている。

まず普通の Markov 過程論にならって，増加 σ 加法族の系

$$\mathcal{B}_t(D) = \sigma[\xi(s), s \leqq t]$$

を考える。$A \in \mathcal{B}(E)$, $\Lambda \in \mathcal{B}_s(D)$ に対して

$$\begin{aligned} m\{\pi_{t+s}^{-1}(A) \cap \Lambda\} &= \int_E n(da)\, P_a(\pi_{t+s}^{-1}(A) \cap \Lambda) \\ &= \int_E n(da) \int_\Lambda p_t(\pi_s \xi, A)\, P_a(d\xi) \\ &= \int_\Lambda m(d\xi)\, p_t(\pi_s \xi, A) \end{aligned}$$

これは，$\xi(t) = \pi_t \xi$ が $(D, \mathcal{B}(D), m)$ の上で $\{p_t(a, db)\}$ を遷移確率をもつ Markov 過程であることを示している。

また同様な方法で，$\{\xi(t)\}$ が $(D, \mathcal{B}(D), m)$ の上の定常過程であることがわかる。とくに，すべての t に対し，

$$m(\pi_t^{-1}A) = \int_E n(da)\, P_a(\pi_t^{-1}A) = \int_E n(da)\, p_t(a, A) = n(A)$$

であるから，$\xi(t)$ の法則は n である。n は一般に無限測度であるから，確率法則とはいえないが，あえていえば，測度法則ともいうべきか。しかし上に述べたように推移確率 $\{p_t(a, db)\}$ はたしかに確率である。

つぎに $L^2(E, m)$ の上に推移半群 $\{p_t,\ t \in [0, \infty)\}$ を

$$(p_t \varphi)(a) = \int_E p_t(a, db)\, \varphi(b), \quad \varphi \in L^2(E, m)$$

で定義する。明らかに $p_t : L^2 \to L^2$ $(L^2 = L^2(E, n))$，線形で $\|p_t\| \leqq 1$ である．また $p_{t+s} = p_t p_s$ も $\{p_t(a, db)\}$ に関する Chapman-Kolmogorov の方程式により明らかである．更に吉田-Hille の連続条件

$$\| p_t \varphi - \varphi \|^2 \to 0$$

を仮定する。これは多くの場合になりたっている。さてこの半群の吉田-Hille の意味の生成作用素を $\mathcal{G}$ とすると，

$$p_t \varphi - \varphi = \int_0^t p_s \mathcal{G} \varphi\, ds, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{G}) \tag{1}$$

がなりたつ。

Stroock-Varadhan にならって，$\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ に対して

$$\eta_t(\varphi, \xi) = \varphi(\xi(t)) - \varphi(\xi(0)) - \int_0^t \mathcal{G}\varphi(\xi(s))\, ds, \quad \xi \in (D, \mathcal{B}(D), m)$$

を考えよう。$\{\xi(t)\}$ の Markov 性と同様にして

$$\int_\Lambda (\eta_{t+s}(\varphi,\xi) - \eta_s(\varphi,\xi))\, m(d\xi) = 0, \quad \Lambda \in \mathcal{B}_s(D)$$

が証明される. これは, φ をきめたとき $\{\eta_t(\varphi,\xi),\ t\in[0,\infty)\}$ が $(D, \mathcal{B}(D), m)$ の上で $\{\mathcal{B}_t(D),\ t\in[0,\infty)\}$ に関してマルチンゲールとなっていることを意味する。上のマルチンゲール等式の証明には (1) を利用する。

また $\eta_t(\varphi,\xi)$ が自乗可積分なことも容易にわかる. さらに

<u>定理 8.1.</u>

$$\int_D \eta_t(\varphi,\xi)^2\, m(d\xi) = -2t(\varphi, \mathcal{G}\varphi) \qquad (\text{内積は } L^2\equiv L^2(E,n) \text{ でとる})$$

<u>証明</u>. 左辺を $F(t)$ とかくと, マルチンゲール性により,

$$F(t+s) - F(s) = \int_D (\eta_{t+s}(\varphi,\xi) - \eta_s(\varphi,\xi))^2\, m(d\xi) \geqq 0$$

$$\begin{aligned}
&\eta_{t+s}(\varphi,\xi) - \eta_s(\varphi,\xi)\\
&\quad = \varphi(\xi(t+s)) - \varphi(\xi(s)) - \int_s^{t+s} \mathcal{G}\varphi(\xi(u))\,du\\
&\quad = \varphi(\theta_s\xi(t)) - \varphi(\theta_s\xi(0)) - \int_0^t \mathcal{G}\varphi(\theta_s\xi(u))\,du
\end{aligned}$$

したがって Markov 性により

$$\int_D (\eta_{t+s}(\varphi,\xi) - \eta_s(\varphi,\xi))^2\, m(d\xi) = \int_D (\eta_t(\varphi,\xi) - \eta_0(\varphi,\xi))^2\, m(d\xi)$$

$$= F(t) \qquad (\because \eta_0(\varphi, \xi) = 0)$$

したがって

$$F(t+s) = F(t) + F(s)$$

F は増加関数であるから

$$F(t) = ct \qquad (c\ ;\ \text{常数})$$

とかける。したがって c を求めるには

$$c = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{F(\Delta)}{\Delta}$$

とすればよい。

$$F(\Delta) = \int_D \eta_\Delta(\varphi, \xi)^2\, m(d\xi) + \varepsilon(\Delta)$$

Schwarz の定理を用いて

$$\varepsilon(\Delta) = o(\Delta)$$

が容易にわかる。故に

$$C = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_D \left(\varphi(\xi(\Delta)) - \varphi(\xi(0))\right)^2 m(d\xi)$$

$$= \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[\int_D \varphi(\xi(\Delta))^2\, m(d\xi) - 2\int_D \varphi(\xi(\Delta))\, \varphi(\xi(0)) + \int_D \varphi(\xi(0))^2 m(d\xi) \right]$$

Markov 性を用いて

$$= \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[2 \int_E \varphi(a)^2\, n(da) - 2 \int_E p_\Delta \varphi(a) \cdot \varphi(a)\, n(da) \right]$$

(1) を用いて

$$= \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[-2 \int_E \varphi(a) \int_0^\Delta p_s \mathcal{G} \varphi(a)\, n(da) \right] = -2(\varphi, \mathcal{G}\varphi)_0 \ \blacksquare$$

定理 8.2

$$\int_D \eta_t(\varphi,\xi)\eta_s(\psi,\xi)m(d\xi) = -(t\wedge s)\left[(\varphi,\mathcal{G}\psi)+(\mathcal{G}\varphi,\psi)\right]$$

証明　$\eta_t(\varphi,\xi)$ のマルチンゲール性を用いて

$$\int_D (\eta_t(\varphi,\xi)-\eta_s(\varphi,\xi))\eta_s(\varphi,\xi)\, m(d\xi) = 0 \qquad (t>s).$$

これから

$$\int_D \eta_t(\varphi,\xi)\eta_s(\varphi,\xi)\, m(d\xi) = -2(t\wedge s)(\varphi,\mathcal{G}\varphi)$$

がでる。一般の場合は，上の式で φ のかわりに $\varphi+\psi$，$\varphi-\psi$ とおいて辺々相減じ，両辺を 4 で割ればよい。（$\eta_t(\varphi,\xi)$ が φ について線形なることに注意せよ。）∎

9.　Y_t のみたす確率微分方程式　7節，8節の記号をそのまゝ踏襲する。

$$\begin{aligned}
& Y_t(\varphi) - Y_0(\varphi) \\
&= X(\varphi\circ\pi_t) - X(\varphi\circ\pi_0) \qquad (\text{定理 } 7.2\ (\text{iii})) \\
&= X(\varphi\circ\pi_t - \varphi\circ\pi_0) \\
&= \int_D (\varphi(\xi(t)) - \varphi(\xi(0)))\, X(d\xi) \\
&= \int_D \left(\eta_t(\varphi,\xi) + \int_0^t (\mathcal{G}\varphi)(\xi(s))\,ds\right) X(d\xi)
\end{aligned}$$

$$= \int_D \eta_t(\varphi, \xi)\, X(d\xi) + \int_0^t X(\mathcal{G}\varphi \circ \pi_s)\, ds$$

$$= \int_D \eta_t(\varphi, \xi)\, X(d\xi) + \int_0^t Y_s(\mathcal{G}\varphi)\, ds$$

上の第1項を $B_t(\varphi)$ とおくと，X が D 上の Gauss random measure で，その分散測度が m に等しいから，

$$E(B_t(\varphi)\, B_s(\psi)) = \int_D \eta_t(\varphi, \xi)\, \eta_s(\psi, \xi)\, m(d\xi)$$

定理 8.2 により $= -(t \wedge s)(\tilde{\mathcal{G}}\varphi, \psi)$ $\quad (\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} + \mathcal{G}^*)$

したがって $\{B_t(\varphi)\}_{t,\varphi}$ は上の分散関数をもつ平均 0 の Gauss系である。

こゝで $\tilde{\mathcal{G}}$ の定義を正確にいうと（内積は $L^2 = L^2(E, n)$ でとる）

$$\mathfrak{D}(\tilde{\mathcal{G}}) = \mathfrak{D}(\mathcal{G})$$

$$(\tilde{\mathcal{G}}\varphi, \psi) = (\mathcal{G}\varphi, \psi) + (\varphi, \mathcal{G}\psi) \qquad \psi \in \mathfrak{D}(\mathcal{G})$$

明らかに $\tilde{\mathcal{G}}$ は対称で，L^2 で稠密な線形空間 $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ で定義され

$$(\tilde{\mathcal{G}}\varphi, \varphi) = -\frac{1}{t} E(B_t(\varphi)^2) \leqq 0, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathcal{G}) \qquad (1)$$

である。これから $\tilde{\mathcal{G}}$ は自己共役作用素に自然な方法で拡張できる。

こゝで少し delicate な問題を考える。$B_t(\varphi)$ は t, φ をきめたとき，確率変数であるから，$B_t(\varphi, \omega)$ とかくべきである。定義から明らかに

$$B_t(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2) = c_1B_t(\varphi_1,\omega)+c_2B_t(\varphi_2,\omega) \quad \text{a.e.}(P)$$

であるが，この例外集合は $\varphi_1, \varphi_2, c_1, c_2$ に関係する。したがって，ωをきめたとき，$B_t(\varphi,\omega)$ は φ の線形汎関数というわけにはいかない（たとえP測度0の例外を許しても!!）。しかし個々の φ ごとにP零集合 $N=N(\varphi)$ の上で $B_t(\varphi,\omega)$ を修正して，$B_t(\varphi,\omega)$ がすべての ω に対して φ の線形汎関数とすることができる（regularization）。しかも適当な強いノルム（$\mathcal{D}(\mathcal{G})$ の上のHilbert形のノルム）に関して有界線形汎関数にすることもできる。

新らしいノルム（Hilbert形）

$$\rho(\varphi) = \{(\varphi,\varphi)-(\tilde{\mathcal{G}}\varphi,\varphi)\}^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

を $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ の上に考え，さらに ρ をHilbert-Schmidt形におさえるHilbert形ノルム g をとると，

$(\mathcal{D}(\mathcal{G}), g)$ の上の任意の完全正規直交系 $\{e_n\}$ に対し，

$$\sum_n \rho(e_n)^2 < \infty$$

となる。（可算な完全正規直交系があることは，EがPolish spaceであることからでる。）$\{e_n\}$ を固定して話をすすめる。

上述の(1),(2)式を用いて

$$E\{\sum_n B_t(e_n)^2\} = \sum_n E(B_t(e_n)^2) = \sum_n -t(\tilde{\mathcal{G}}e_n, e_n)$$
$$\leqq t\sum_n \rho(e_n)^2 < \infty,$$

したがって

$$\Omega_1 = \{ \sum_n B_t(e_n)^2 < \infty \} \text{ とおくと } P(\Omega_1) = 1$$

となる. $\varphi \in (\mathcal{D}(\mathcal{G}), \rho)$ を $\{e_n\}$ について直交展開して

$$\varphi = \sum_n c_n e_n, \qquad c_n = (\varphi, e_n)_\rho$$

とかき。 $\sum c_n^2 < \infty$ であるから

$$\begin{aligned} \tilde{B}_t(\varphi) &= \sum_n c_n B_t(e_n), \quad \omega \in \Omega_1 \\ &= 0, \quad \omega \in \Omega - \Omega_1 \end{aligned}$$

とおくと, $\tilde{B}_t(\varphi)$ は Ω の上で $\varphi_{\in(\mathcal{D}(\mathcal{G}),\rho)}$ に関し, 有界線形作用素となる. 即ち

$$\tilde{B}_t \in H \equiv (\mathcal{D}(\mathcal{G}), \rho) \text{ の dual space.}$$

この $\tilde{B}_t$ が B_t の regularization となることをいう。

再び上述の (1), (2) を用いて

$$\begin{aligned} E((B_t(\varphi) - \sum_{k=1}^n c_k B_t(e_k))^2) &= E((B_t(\varphi - \sum_{k=1}^n c_k e_k))^2) \\ = -t(\mathcal{G}(\varphi - \sum_{k=1}^n c_k e_k), \varphi - \sum_{k=1}^n c_k e_k) &= t\rho(\varphi - \sum_{k=1}^n c_k e_k)^2 \\ \leqq t\rho(\varphi - \sum_{k=1}^n c_n e_k)^2 &\longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

により, 固定した任意の φ に対して

$$B_t(\varphi) = \sum_n c_n B_t(e_k) = \tilde{B}_t(\varphi) \qquad \text{a.e.}(P)$$

となる。これで $\tilde{B}_t(\varphi)$ が $B_t(\varphi)$ の regularization であることがわかった。

以後 $\tilde{B}_t(\varphi)$ を $B_t(\varphi)$ とかくことにする。$L^2 = L^2(E, m)$ の元 ψ は $\mathcal{D}(\mathcal{G})(\subset L^2(E, m))$ の上の線形作用素 $\psi(\varphi) := (\psi, \varphi)$ を定め，これは $\| \ \|_{L^2}$ に関して有界であるから，勿論 $\mathcal{G}$ に関して有界であり，したがって ψ は H の元とみなすことができる。この意味で L^2 は H の中に埋めこむことができ，

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) \subset L^2 \hookrightarrow H$$

となる。勿論 $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ も L^2 も H の中で稠密である。さて $\tilde{\mathcal{G}}$ は L^2 の上の稠密に定義された対称作用素であるから，これを H の上の作用素とみなすことができる．即ち

$$(\tilde{\mathcal{G}} h)(\varphi) = h(\tilde{\mathcal{G}}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{G}).$$

$(h \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{G}})$ のときには上の埋めこみにより $(\tilde{\mathcal{G}}h)(\varphi) = h(\tilde{\mathcal{G}}\varphi) = (h, \tilde{\mathcal{G}}\varphi) = h(\tilde{\mathcal{G}}\varphi)$。) 同様に $\mathcal{G}^*$ を H の上に $(\mathcal{G}^* h)(\varphi) = h(\mathcal{G}\varphi)$ で定める。

$E(Y_t(\varphi)^2) = \|\varphi\|^2_{L^2} \leqq \rho(\varphi)^2$ ((2) により) を用いると，上と同様の議論で，Y_t の適当な regularization をとって，すべての ω に対し $Y_t \in H$ とすることができる。

さて本節の始めにのべた式

$$
\begin{aligned}
Y_t(\varphi) - Y_0(\varphi) &= \int_D \xi_t(\varphi, \xi) X(d\xi) + \int_0^t Y_s(\mathcal{G}\varphi)\, ds \\
&= B_t(\varphi) + \int_0^t Y_s(\mathcal{G}\varphi)\, ds \qquad (3) \\
&= B_t(\varphi) + \int_0^t (\mathcal{G}^* Y_s)(\varphi)\, ds
\end{aligned}
$$

Gauss 形

にもどろう。上に注意したように $\{B_t, t \in [0, \infty)\}$ は H 値確

率過程となり，$E(B_t(\varphi)B_s(\psi)) = -(t\wedge s)(\mathcal{G}\varphi, \psi)$ により，B_t が加法性（独立増分性）をもつことが証明される。更に拙著論文

Continuous additive $\mathcal{S}'$-processes, Vilnius Conference 1978

で用いた論法をつかって，適当な regularization を行って B_t が H 値 Wiener process（H 値確率過程で，時間的一様な独立増分をもち，道の連続な平均 0 の Gauss 過程）となることがわかる。（従って (3) により $\{Y_t\}$ も連続。）上の (3) から Y_t が確率微分方程式

$$dY_t = dB_t + \mathcal{G}^* Y_t \, dt \qquad (4)$$

をみたすことが証明される．

特に出発点とした Markov 過程が r 次元 Brown 運動のときには，n は Lebesgue measure，$\mathcal{G} = \frac{1}{2}\Delta$ となり，$E(B_t(\varphi)B_s(\psi)) = -(t\wedge s)(\Delta\varphi, \psi)$，$H$ は Schwartz の空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^r)$ をとっておけば十分である。(4) を Schwartz の意味の超関数 (distribution) の意味に，各 ω 毎に理解して，

$$\frac{\partial Y_t(x)}{\partial t} = \frac{d}{dt}B_t(x) + \frac{1}{2}\Delta_x Y_t(x) \qquad \text{（微分は distribution の意味にとる）}$$

とかくことができる。この非斉次熱方程式は ω ごとに distribution の意味でとける。その解で初期条件 $Y_0 = \mathbb{R}^r$ 上の white noise の時のものが，上に導入した Y_t である。