数理解析研究所講究録
第 367 巻 1979 年 50-93

非可逆過程と確率過程

東大　理学部　　久保 亮五

非平衡状態における物理的な過程を一般的な見方でとらえるための一つの枠組は，確率過程論である。歴史的に，非可逆過程の統計物理と，確率過程とは，深い関り合いをもつている。ブラウン運動からはじめて近年に至る流れの中から，いくつかの問題をひろつて見る。

§1 序[1)]

物理に限らず，自由度が非常に大きい系を観測し，記述し，そこに起る過程を理解するには，ミクロからマクロまで，相次ぐさまざまの段階がある。それぞれの段階は，ある粗さの眼鏡で見た像であり，そこにはその粗さに対応する法則がある。そのハイラーキをつかむことがわれわれの目的である。粗視化は情報の部分的な masking であるから，粗い記述には必然的に確率的な要素が含まれる。時間的な過程は確率過程としてとらえられる。マクロな体系の物理的過程は，一般に非可逆過程であり，その理論は非可逆過程の統計力学と称せられる。それは Boltzmann の気体分子運動論，Einstein のブラウン運動論以来，確率過程の数学とは深い因縁にある。近年，非可逆過程，多体系の統計力学は，ひじょうに進んだ。そこで発展されたさまざまの方法もまた，本来，確率過程論に関係があるのであるが，物理的な種々の近似などの数学的な意味はあまり明らかではない。本文では，そういう流れのなかにあるものを，確率過程論的な立場から筆者が自己流にどう把えているか，簡単に要約してみたい。数学としての体を成していないことは御容赦いただきたい。ここに述べられることのあるものは，数学的にキチンと定式化され，進んだ取扱いができる筈であろう。また，あるものはひょっとすれ

ば何か，新しく数学的な興味を喚ることもあるかもしれない。数学者，数理物理学者の御教示を乞う所以である。

粗視化の階段を一つ昇るとき，新しいレベルでの物理的過程は，それより下級の過程から生成される。それを一般的な意味で力とよべば，観測される過程 $X(t)$ は，その力によって駆動される。力のうちの一部分は何か統計的，確率的な性格をもつから，これを<u>ランダム力</u> $R(t)$ と呼ぶこととし，$X(t)$ の運動方程式を

$$\dot{X}(t) = F(X, R, t) \qquad (1.1)$$

とかこう。X も R も一般に多次元でよい。物理ではこの種の運動方程式を<u>Langevin eq.</u> という。これが微分方程式であることもあろうし，積分方程式であることもある。数学としては確率微分方程式（stochastic diff. eq.）あるいはその拡張である。

$X(t)$ の時間的発展を追う代りに，$X(t)$ が実現する値 X が構成する状態空間に腰を据えて，(1.1) によってその空間に惹起される流れを観察してもよい。対象とする系の集団を考え，その代表点の分布密度関数を $f(X, t)$ とすれば，

$$\frac{\partial}{\partial t} f(X, t) = -\frac{\partial}{\partial X} F(X, R, t) f(X, t) \equiv \Omega(t) f(X, t) \qquad (1.2)$$

が成立つ。(1.1) が微分方程式であれば，(1.2) はそれを特性方程式とする偏微分方程式であるが，distribution としての f じたいが，$R(t)$ によって生成される確率過程である。これは Stochastic Liouville eq.[2] と呼ぶべきものであり，それを生成する stochastic Liouville operator が Ω である。統計力学でおなじみのように，(1.1) と (1.2) はうらはらであり，量子力学の言葉を借りれば，前者は Heisenberg picture 後者は Schrödinger picture である。もちろん，(1.2) は数学的には厄介かもしれないが，(1.1) が非線型であっても，これは f について線型であるという利点がある。

$t=t_0$ で $X=X_0$ にあった系が，$R(t)$ のある見本 R' によって駆動され，時刻 t では X_t に達したとする。これを

$$X_t(X_0, t_0; R')$$

とかけば，遷移確率 $P(X_0 t_0 \to X, t)$ は，

$$P(X_0 t_0 \to X t) = \langle \delta(X - X_t(X_0, t_0; R')) \rangle_R \qquad (1.3)$$

である。こゝに $\langle \quad \rangle_R$ は $R(t)$ のすべての ensemble についての平均である。一方，$f(X, t_0) = \delta(X - X_0)$ という初期条件で (1.2) を解き，得られる確率過程 f を R について平均すれば (1.3) が求められるし，また必要なものはすべて，stochastic operator $\Omega(t)$ を含む種々の確率変数の平均値の

計算に帰着する。これは一つの有力な統一的方法である。

あるレベルに立って，$X(t)$ が力 $R(t)$ で駆動されると見るのは現象論である。R と F との性格から，X の性格を定めることは，そのレベルでの確率論的モデルとしてそこでの法則性を明らかにすることである。そのような確率論的モデルの例は物理学には数多いが，その典型は古典的，理想的なブラウン運動である。これを規準としてこゝから必要な方向への拡張，一般化を試みることは，確率過程論的にものごとを考える上にきわめて有効であろう。実際，意識すると否とに拘らず，多くの問題がそのようにして取扱われている。

§2. 理想的なブラウン運動とその一般化

液体媒質に浮ぶ比重が大きい物質でできた微粒子の熱運動は，理想的なブラウン運動[3)]（ちょっと工合が悪いが IBM と略記する）とみなされる。質量 m をもつ粒子の並進運動の速度 u（簡単のため1次元とする）の運動方程式を

$$m\dot{u}(t) = -m\gamma u(t) + R(t) \equiv F(t) \qquad (2.1)$$

とおく。$F(t)$ は媒質分子が粒子に作用する力，$-m\gamma u$ はそのうちの systematic part で粘性抵抗，$R(t)$ は残りのランダム力である。(2.1) が IBM を記述するためには次の

3条件が假定される。

条件 G： $R(t)$ は定常 Gauss 過程.

条件 W： $R(t)$ は white noise

条件 L： (2.1) で表わされているように, $u(t)$ は $R(t)$ について線型である。

この理想化の物理的な根拠は, ブラウン粒子が流体分子よりもずつと大きく,[4] したがつてその時間尺度 $\tau_2 = 1/\gamma$ が分子的時間 τ_c に比して遥かに長いこと, 極限として

$$\tau_c / \tau_2 \to 0$$

を想定することができること(条件 W), 中央極限定理により, 多数の分子の衝突の合成としての $R(t)$は一つの t について正規分布をもつばかりでなく確率過程として正規過程となること,(条件 G), また, γ = 一定は妥当な假定であることである。

white noise の一般的条件は, その特性汎関数が

$$\left\langle e^{i\int_{t_0}^{t} \xi(t') R(t') dt'} \right\rangle_R = \exp \int_{t_0}^{t} W[\xi(t')] dt' \quad (2.2)$$

ということである。 こゝに $W[\xi(t)]$ は $\xi(t)$ の汎関数である. が, 条件Gにより, いまの場合,

$$W[\xi] = -\pi I_R \xi^2 \quad (2.2')$$

すなわち,

$$\left\langle \left(\int_{t_1}^{t_2} R(t')\,dt' \right)^2 \right\rangle = 2\pi I_R (t_2 - t_1), \tag{2.3}$$

これを

$$\langle R(t_1) R(t_2) \rangle = 2\pi I_R \delta(t_2 - t_1) \tag{2.4}$$

とかき，あるいはフーリエ成分で

$$\langle R(\omega) R^*(\omega') \rangle = I_R \delta(\omega - \omega') \tag{2.5}$$

とかくのが物理での習慣である。

数学ではふつう Gaussian white noise の積分，すなわち

$$\dot{x}(t) = R(t) \tag{2.6}$$

できまる過程 $x(t)$ をブラウン運動と呼ぶが，物理的な不可逆過程の考察のための出発点としては，これでは簡単すぎる。(2.1) は Ornstein-Uhlenbeck 過程と呼ばれている。このモデルには，不可逆過程論の基本定理である揺動散逸定理もすでにその原型を見せている。理想的なブラウン運動の典型をこれに求めたのはこの理由である。

条件 G，W の仮定のもとに Langevin eq. (2.1) を解くにはいろいろの方法があり，それぞれに甚だ教訓的であるが，ここに立入る必要はない。ただ，それから導かれる過程 $u(t)$ の性質をまとめておこう。

a) $u(t)$ は Gaussian (G, L から)

b) $u(t)$ は Markoffian (W から)

c) $u(t)$ の相関関数は単純(指数関数)減衰をもつ

$$\langle u(t_0)\, u(t_0+t)\rangle = \langle u(t_0)^2\rangle e^{-\gamma t} \qquad (2.7)$$

(G, W, L から。Doob の定理)

d) $u(t)$ の遷移確率 $P(u_0 t_0 \to u, t)$ は Fokker-Planck eq

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\gamma u + D_u \frac{\partial}{\partial u}\right) P \qquad (2.8)$$

の基本解

$$P(u_0 t_0 \to u t) = \frac{\left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}}{\left(1 - e^{-2\gamma(t-t_0)}\right)^{1/2}}\, e^{-\dfrac{m(u - u_0 e^{-\gamma(t-t_0)})^2}{2kT(1-e^{-2\gamma(t-t_0)})}} \qquad (2.9)$$

である。こゝに

$$kT = m\langle u^2\rangle_{eq} = \frac{\pi I_R}{m\gamma} \qquad (2.10)$$

$$D_u = \frac{\gamma kT}{m} = \frac{1}{m^2}\int_0^\infty \langle R(t_0) R(t_0+t)\rangle dt \qquad (2.11)$$

T は媒質流体の絶対温度で, (2.10) によってノイズ $R(t)$ の強さを定める。k はボルツマン定数。

(b) Markoffian property は (2.1) が u の1階微分方程式であることと, 条件 W による。$u(t)$ の代りに座標 $x(t)$ ($\dot{x} = u$) をとれば, $x(t)$ だけでは Markoffian にはならない。しかし, もちろん, u と x の2成分ベクトルとしては, 1階であるから Markoffian である。$P(u,t)$ が2階の偏微分方程式である (2.8) にしたがうことは $R(t)$ が Gaussian であるからであ

る。

多次元のブラウン運動, たとえば調和振動子のブラウン運動についても, 条件 G, W, L は同じことである。それらは理想的なブラウン運動の仲間に入れてもいいであろう。しかし, たとえば, ポテンシャルの場にあるブラウン粒子については, 条件 L は破られる。この場合, 粒子の運動量 $p=mu$ と, 坐標 x について, Langevin eq. は

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= p(t)/m \\ \dot{p}(t) &= -\frac{dV(x)}{dx} - \gamma p + R \end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

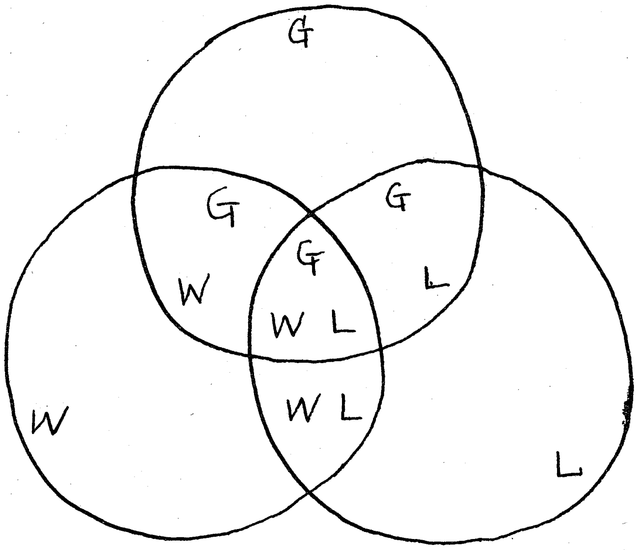
となる。(2.8) に対応して, x, p の分布関数は,

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,p,t) = \left(-\frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\right)P(x,p,t) + \gamma\frac{\partial}{\partial p}\left(p + mkT\frac{\partial}{\partial p}\right)P(x,p,t) \quad (2.13)$$

によって発展する。これは Kramers 方程式とよばれる。過程 (x, p) は Markoffian ではあるが V が x について2次以下でない限り, 線型性 L は成立たず, したがってガウス的でもない。(2.13) は興味ある応用をもつが, 一般にはこれを厳密に解くことはむつかしい。

この例ばかりでなく, IBM のカテゴリーではないが, ブ

ラウン運動の概念と拡張とみられる物理現象は多い。それどころか，一般にマクロな体系における少数の自由度 —— 集団的運動の自由度 collective modes —— の運動は，ブラウン運動の一般化と考えるのがよい。そのようにブラウン運動を拡張すれば，IBM の範囲を越えてそれを特徴づける条件を拡げなければならない。上述の3条件のそれぞれを，下図の円のそれぞれに対応させれば，3円の共通部分がIBMである。その外に，どれか一つ，または二つ，さらには全部を外した7個のカテゴリがあることになる。



条件を外せば，一般的な議論はむつかしくなるから，またちがった立場からの条件を加える必要も起る。以下の議論で，このような一般化を論じつくすことはもとより不可能であるが，このように，IBMの一般化という観点から，物理的に重要と思われるいくつかの問題をとり上げてみたい。

§3. 遅れをもつ抵抗．揺動散逸定理

抵抗，あるいはインピーダンスが周波数ωに依ることは，電気回路でも，ほかの物理的な系でごく普通である。これは抵抗が遅れをもった効果であることを意味する。そのような系のブラウン運動を記述するためには(2.1)を次のように拡張する必要がある。[5-7]

$$m\dot{u}(t) = -m\int_{-\infty}^{t} \gamma(t-t')\,u(t')\,dt' + R(t) \qquad (3.1)$$
$$(+K(t))$$

括弧の中の$K(t)$は外力であるが，平衡状態のブラウン運動はもちろん，$K=0$ の場合である。確率過程の勝手なモデルとしては，Rもγも何であってもよいが，これが物理的なブラウン運動の表現だとすると，以下に述べるように両者の間に関係をつける必要がある。

外力が $K(t)=K_0\cos\omega t$ であるとき，それに対するブラウン粒子のレスポンスは，(3.1)の平均値の方程式からすぐにきまる。ランダム力$R(t)$の平均はゼロであるから，

$$\langle u(t)\rangle = \mathcal{R}_e\,\mu[\omega]\,K_0 e^{i\omega t} \qquad (3.2)$$

とおくと，

$$\mu[\omega] = \frac{1}{m}\frac{1}{i\omega+\gamma[\omega]} \qquad (3.3)$$

ただし，

$$\gamma[\omega]=\int_0^\infty \gamma(t)\,e^{-i\omega t}dt \qquad (3.4)$$

である。一方，線型応答理論 linear response theory[8] から一般に，

$$\mu[\omega]=\frac{1}{kT}\int_0^\infty \langle u(t_0)u(t_0+t)\rangle e^{-i\omega t}dt \qquad (3.5)$$

という定理一第1種揺動散逸定理 first fluctuation-dissipation theorem[9]—が成立つ。ただし u の相関関数は $K=0$ のとき，平衡状態としての $u(t)$ の定常過程に関するものである。T は媒質の温度で，ランダム力のパワーはこれに比例している。

(3.1) は線型であるから，$u(t)$ のパワースペクトルは

$$I_u(\omega)=\frac{1}{m^2}\frac{I_R(\omega)}{|i\omega+\gamma[\omega]|^2} \qquad (3.6)$$

によって $R(t)$ のスペクトル I_R に関係づけられる。これを用いて容易に証明されることであるが，[1] ランダム力について

$$I_R(\omega)=\frac{mkT}{\pi}\,\mathcal{R}e\,\gamma[\omega] \qquad (3.7)$$

あるいは

$$\langle R(t_0)R(t_0+t)\rangle = mkT\gamma(t) \qquad (3.8)$$

を仮定すると，(3.3), (3.5) の関係

$$\frac{m}{kT}\int_0^\infty \langle u(t_0)u(t_0+t)\rangle e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{i\omega+\gamma[\omega]} \qquad (3.9)$$

が成立ち，モデル(3.1)は物理的に妥当なブラウン運動を表わすことになる。

逆に(3.1)から$R(t)$によってきまる定常過程$u(t)$が，第1種 F-D theorem，すなわち(3.9)を満足することを要求すれば(3.7)，また(3.8)を証明することができる。[6)]

ランダム力$R(t)$と遅延抵抗$\gamma(t)$の関係を，第2種揺動散逸定理という。特に(3.7)をNyquistの定理[10)]という。これは電気的なシステムについて端子間の雑音電圧のパワーがインピーダンスと絶対温度できまることを示す。IBMについての(2.10)，(2.11)はこの定理の特殊な場合であり，このような一般化によってその深い意味を理解することができる。

(3.1)の代りに，

$$m\dot{u}(t) = -m\int_{t_0}^{t}\gamma(t-t')u(t')dt' + R'(t) \qquad t \geq t_0 \qquad (3.10)$$

という形のLangevin eq. が用いられることが多い。このランダム力$R'(t)$は，(3.1)の$R(t)$とはちがうが，(3.10)が定常過程$u(t)$を表現し，$u(t)$が(3.9)をみたすことを要求すれば，条件

$$\langle R'(t)u(t_0)\rangle = 0 \qquad t \geq t_0 \qquad (3.11)$$

および$R'(t)$についての第2種 F-D theorem(3.8)が(3.10)から導びかれる。逆に(3.11)を仮定すれば，(3.10)から，(3.9)

および $R'(t)$ について(3.8)が直ちに導びかれる。その鍵は，$u(t)$ および $R'(t)$ が定常過程であるとすることである。

(3.1)で，$t \leq t_0$ での $u(t)$ の ensemble が与えられたとすれば，$t > t_0$ での $u(t)$ の ensemble は，$R(t)$ の ensemble からきまる。(3.10)では $u(t_0)$ の ensemble と $R'(t), t \geq t_0$ の ensemble から $t > t_0$ での $u(t)$ の ensemble がきまる。それが平衡状態としての $u(t)$ の定常過程に漸近するか，どうか。IBM についてはその一義的な近接は証明されるが，$\gamma(t)$ のおくれがある場合，漸近性の問題は，$\gamma(t)$ の性格にも依る筈である。そういう研究は，筆者は知らない。

(3.10)を一般化した式を，ミクロな運動方程式の変形として導く方法がある。[7] これは森の方法とよばれ，物理の実際問題にひろく応用されている。これを簡単に述べよう。

ある力学系について力学量の一組を縦ベクトル $A(t)$，そのエルミート共役を横ベクトル $A^*(t)$，それらの運動方程式を

$$\dot{A}(t) = iLA(t), \qquad \dot{A}^*(t) = -iLA^*(t) \qquad (3.12)$$

とかく。[11] その系の熱平衡状態における力学量 $X(t)$, $Y(t)$ の運動について相関関数

$$\langle X(t_1), Y^*(t_2) \rangle = \langle X(t_1+t), Y^*(t_2+t) \rangle \qquad (3.13)$$

が内積として定義され，[12]

$$\langle iLX, Y^* \rangle = \langle X, -iLY^* \rangle \qquad (3.14)$$

が成立つとする。記号を簡単にするため，任意の時刻 t_0 を $t_0=0$ とし，$A(t_0)=A$，$A^*(t_0)=A^*$ とかき，

$$\langle \dot{A}, A^* \rangle \langle A, A^* \rangle^{-1} = i\Omega \tag{3.15}$$

$$R = \dot{A} - i\Omega A \tag{3.16}$$

$$R(t) = e^{(1-P)iLt} R \tag{3.17}$$

$$PX = \langle X, A^* \rangle \langle A, A^* \rangle^{-1} A \tag{3.18}$$

と定義する。相関 $\langle A, A^* \rangle$ のようなものは行列，Ω も行列である。X を A と同様の力学量の縦ベクトルとすると，(3.18) はベクトル X を A に射影する演算子 P を定義する。(3.17) は，

$$\langle R(t), A^* \rangle = 0 \tag{3.19}$$

を意味する。(3.17)を

$$R(t) = \left[e^{iLt} - \int_0^t e^{iLs} PiL\, e^{(1-P)iL(t-s)} ds \right] R$$

$$= e^{iLt} R - \int_0^t ds \langle iLR(t-s), A^* \rangle \langle A, A^* \rangle^{-1} e^{iLs} A$$

と変形し，$e^{iLt}A = A(t)$，$\langle iLR(t-s), A^* \rangle = \langle R(t-s), -iLA^* \rangle = \langle R(t-s), \dot{A}^* \rangle = \langle R(t-s), R^* - A^* i\Omega \rangle = \langle R(t-s), R^* \rangle$ に注意すれば，これは

$$\dot{A}(t) = i\Omega A(t) - \int_0^t \Gamma(t-s) A(s) ds + R(t) \tag{3.20}$$

にほかならない。こゝに

$$\Gamma(t-s) = \langle R(t-s), R^* \rangle \langle A, A^* \rangle^{-1} \tag{3.21}$$

は (3.8) に，(3.19) は (3.11) に対応する。(3.20) は運動方程式の書き換えにすぎないが，$A(t)$ とか $R(t)$ とか，ミクロの運動によって変る力学量を確率過程と見た形である。観測する量 $A(t)$ よりも，ランダム力とみなされる $R(t)$ に確率過程として simple な仮定をおくことが物理的によい近似であるとする根拠があれば，具体的な問題に有効に応用される。

§ 4. ランダムな周波数変調

非線型 Langevin eq. の最も簡単な，しかし基本的な例として，

$$\dot{x}(t) = i\omega(t)x(t) \tag{4.1}$$

を取上げよう。[13)] こゝに $\omega(t)$ は与えられた定常確率過程であるとする。これは，振動数がランダムに変調されている振動子のモデルで，この解は簡単に，

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{i\int_0^t \omega(t')dt'} x(0) \\ &= e^{i\theta(t)} x(0) \end{aligned} \tag{4.2}$$

であるから，非線型といったが問題は trivial で，ただ

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t) \tag{4.3}$$

という簡単な拡散過程にすぎない。しかし教訓的なのは，

$$\langle x(t)\rangle = x(0)\langle e^{i\int_0^t \omega(t')dt'}\rangle = x(0)\,e^{\psi(t)} \tag{4.4}$$

の挙動である。$\omega(t)$ の相関時間を τ_c とすると，短い時間（$t \ll \tau_c$），長い時間（$t \gg \tau_c$）のそれぞれについて，次のような近似が一般に成立つ。

1) 短時間近似
$$e^{\psi(t)} \sim e^{i\langle\omega\rangle t - \frac{1}{2}\langle\omega^2\rangle_c t^2} \tag{4.5}$$
ただし $\langle\omega^2\rangle_c = \langle\omega^2\rangle - \langle\omega\rangle^2$

2) 長時間近似
$$e^{\psi(t)} \sim e^{i\omega_\infty t - \gamma t} \tag{4.6}$$

短い時間ではそれぞれの振動子はある一つの振動数 ω での振動を持続する。ω の分布のために集団平均の減衰はあるが，これは振動子の coherent な振舞いである。長い時間では，個々の振動子が，ちがった振動数の状態を次々に実現してゆく incoherent な状況にある。$t \gg \tau_c$ で $\psi(t)/t$ が $i\omega_\infty - \gamma$ という漸近値をもつのは，(一般的な) 中心極限定理のあらわれである。もし

$$\langle\omega^2\rangle_c \tau_c^2 \ll 1 \quad \text{または} \quad \gamma\tau_c \ll 1 \tag{4.7}$$

であれば，短時間近似の範囲では $\langle x(t)\rangle$ は殆んど減衰していない，または，減衰は長時間近似の範囲で良く記述される，ということになる。すなわち，ランダムな周波数変調

が充分速く，(4.6)のような単純な指数関数減衰が起る。これは，物理的な系に作用する摂動の効果の現われ方として重要な概念で，*motional narrowing* とよばれる。このような振動子のスペクトルを観測するとき，ランダムな変調のために起るスペクトル線のひろがりが，変調が速くなると消失することからこの言葉は由来している。[14] 次節に述べるようにこれはマルコフ性と本質的な関連をもっている。

ランダム変調の理想化モデルには次の二つがある。

1) Gaussian random modulation:

$\omega(t)$ がガウス過程であれば，

$$e^{\varphi(t)} = \exp\left\{i\langle\omega\rangle t - \int_0^t (t-\tau)\Delta^2\cdot\varphi(\tau)d\tau\right\} \quad (4.8)$$

たゞし，

$$\Delta^2 = \langle\omega^2\rangle_c \equiv \langle\omega^2\rangle - \langle\omega\rangle^2$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Delta^2}\left\langle(\omega(t_0)-\langle\omega\rangle)(\omega(t+t_0)-\langle\omega\rangle)\right\rangle \quad (4.9)$$

2) Poisson random modulation:

$$\omega(t) = \sum_j \alpha\,\delta(t-t_j) \quad (4.10)$$

は，時刻 $t_j\cdots$ がランダムで，かつその衝撃による位相のずれ α がランダム，すなわち，振動子が，時々，邪魔ものに衝突するという像に対応する。単位時間あたりの衝

突の平均回数をνとすると，

$$e^{\psi(t)} = \exp[-\nu t\{(1-\langle\cos\alpha\rangle) - i\langle\sin\alpha\rangle\}] \tag{4.11}$$

(4.8) で $\langle\omega\rangle = 0$，　$\varphi(t) = e^{-t/\tau_c}$ とすれば

$$e^{\psi(t)} = \exp\left[-\Delta^2\tau_c(t-\tau_c+e^{-t/\tau_c})\right] \tag{4.12}$$

これは，(4.5), (4.6) の例証として良く引合いに出される。

$$\tau_c \to 0\ ,\qquad \Delta^2\tau_c \to \tau_2^{-1} \equiv \gamma \tag{4.13}$$

の極限をとれば，$\omega(t)$ は white noise，$\theta(t)$ は単純な拡散 (Wiener 過程)，(4.12) は

$$e^{\psi(t)} = e^{-t/\tau_2} \qquad t>0 \tag{4.14}$$

を与える。

(4.10) は，(2.2) の（一般的な）white noise の典型的な例である。[15]

§ 5. マルコフ過程

ブラウン粒子の空間における拡散を考え，(1.1), (1.2) を

$$\dot{x}(t) = u(t) \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -u(t)\frac{\partial}{\partial x}f(x,t) \tag{5.2}$$

とかく。[16]　$u(t)$ を既知，たとえば，§ 2 で述べたブラウン

運動の速度とすれば，(1.3) に当る遷移確率 $P(x_0, 0 \to x, t)$ は，(5.2) と (4.1) の対応によって次のようにして得られる。$t=0$ で

$$f(x, 0) = \delta(x - x_0)$$

とすれば，

$$P(x,t) \equiv \langle f(x,t) \rangle = \langle e^{-\int_0^t u(t') \frac{\partial}{\partial x} dt'} \rangle \delta(x - x_0)$$

$$= \exp\left[-\langle u^2 \rangle \tau_c (t - \tau_c + e^{-t/\tau_c}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \delta(x - x_0) \tag{5.3}$$

ただし (2.7) の γ を $1/\tau_c$ とかいた。これは，長時間近似 $t \gg \tau_c$ として拡散方程式，

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t), \quad D = \langle u^2 \rangle \tau_c \tag{5.4}$$

が得られることを示す。ただし，$t \gg \tau_c$ でも，x のあまり小さい範囲については，これは意味をなさない。(4.7) に対応する条件は，

$$\sqrt{\langle u^2 \rangle}\, \tau_c \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ll 1 \tag{5.5}$$

である。これはまた，$l = \sqrt{\langle u^2 \rangle}\, \tau_c \ll \Delta x$，すなわち空間の粗視化の粗さ Δx が mean free path l よりもずっと大きいことを意味する。これと，時間の粗視化 $\Delta t \gg \tau_c$ の二つの条件のもとに，ブラウン粒子の空間における拡散は，マルコフ過程として (5.5) で記述される。これは，§1 に述べた粗視化というものの意味を理解するのに，

最も簡単な良い例であろう。ブラウン運動において空間的な拡散方程式は，$l^2/\tau_c = D$ 一定として $x/l \to \infty$，$t/\tau_c \to \infty$ における漸近評価に由来するのであるが，ボルツマン方程式のようなサブマクロのレベル，あるいは流体力学のようなマクロの方程式など，一般に粗視化のあるレベルにおける理想化は，これと同様な漸近評価によって基礎づけられる。[17]

さて，そのような粗視化による理想化として，(1.1)の $R(t)$ が white noise とみなされるとしよう。これによって駆動される確率過程は，それに対応して Markoffian となる。

Stochastic Liouville eq. (1.2)において，$R(t)$ が一般的な意味で white noise であれば，(2.2)と同様：

$$\left\langle e_{\text{ordered}}^{\int_t^{t+\Delta t} \Omega(t')dt'} \right\rangle = e_{\text{ordered}}^{\int_t^{t+\Delta t} \Gamma(t')dt'} \qquad (5.6)$$

が成立つであろう。[18] $\Omega(t)$ は一般に非可換であるので，指数関数はふつうのものでなく，この両辺とも ordered であるが，[19] これから(1.3)の遷移確率に対して

$$\frac{\partial}{\partial t} P(X,t) = \Gamma P(X,t) \qquad (5.7)$$

が導かれる。すなわち，(1.1)で駆動される過程 $X(t)$ はマルコフ過程である。(5.6)は white noise operator $\Omega(t)$ の定義といってもよい。特に(1.1)が $R(t)$ について1次で，か

つ $R(t)$ が Gaussian white noise であるときには，(5.7)の右辺は2階微分までであるから，いわゆる Fokker-Planck 方程式となる。

たとえば，$R(t)$ を Gaussian white noise として

$$\dot{x}(t) = u(x) + v(x)R(t) \tag{5.8}$$

を考えると，

$$\Omega(t) = -\frac{\partial}{\partial x}\{u(x) + v(x)R(t)\} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}\Gamma &= -\frac{\partial}{\partial x}u(x) + \pi I_R \frac{\partial}{\partial x}v(x)\frac{\partial}{\partial x}v(x) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\{u(x) - \pi I_R v(x)v'(x)\} + \frac{\partial}{\partial x}D(x)\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned} \tag{5.10}$$

ここに　$D(x) = \pi I_R v(x)^2$ は拡散係数である。(I_R は $R(t)$ のスペクトル強度)。もっと簡単な例は，(2.1) から (2.8)，(2.12) から (2.13) を導びくことであるが，これらは $v = const$ の場合である。

(5.10)は，確率微分方程式(5.8)をいわゆる Stratonovich 流に解釈することに当る。もし，(5.8)を Ito 流に解釈すれば (5.10) の右辺の drift term で v を含む項はなく，かつ，拡散項で $D(x)$ は2階微分記号のあとにくる。

(1.1) を Ito 流に解釈すると，$F(t)$ が white noise

であればʼ 短い時間Δtの間の発展について

$$\langle (\Delta X)^n \rangle = C_n(X, t)\Delta t + O(\Delta t^2) \qquad (5.10)$$

とおける。これは，(1.3) の確率分布密度について

$$\frac{\partial}{\partial t}P(X,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^n C_n(X,t)P(X,t) \qquad (5.11)$$

を与えるが，これはまた，Chapman-Kolmogorov eq. または物理でいう master eq.（あまりよい言葉ではない）

$$\frac{\partial}{\partial t}P(X,t) = -\int W(X\to X')dX'P(X,t) + \int W(X'\to X)P(X',t)dX' \qquad (5.12)$$

にほかならない。こゝに

$$C_n(X, t) = \int (X'-X)^n W(X\to X', t)dX' \qquad (5.13)$$

は，状態 X から X' への遷移確率の rate $W(X\to X', t)$ の n 次モーメントである。

(1.2) を Stratonovich 流の解釈のもとに適用しても，(5.12) に相当するものは導かれるが，(5.8) の例で見たように，(5.11) ほど簡単な形ではない。

(5.12) の形に Markoff 過程が表わされているとき，それに対応する Langevin eq. を立て，これを有効に利用するということも場合によっては必要になるであろう。その場

合には，Stratonovich 流よりも Ito 流の確率微分方程式を立てる方が考え易い。

§6 大きな系の漸近的挙動

(5.12) のような Markoff 過程は，物理ばかりでなく広い応用をもつ。いま，特に，大きい体系についてのその漸近的性格を考える。birth and death process として，系のサイズを表わすパラメタを Ω とし，X をある種の population

$$x = X/\Omega \qquad (6.1)$$

をその density とする。一様な体系では，$X \to X + r$ の遷移が起る rate は，そのサイズ Ω に比例し，かつ密度 x による，すなわち

$$W(X \to X+r, t) = \Omega\, w(x, r, t) \qquad (6.2)$$

と假定することは，多くの問題で妥当である。これを示量性 extensivity の假定とよぶ。このとき，(5.13) は

$$c_n(x,t) = \int r^n w(x, r, t)\, dr \qquad (6.3)$$

normalized moment of transition rate を定義する。確率分布密度として，$P(x,t)$ を考えると，(5.12) は

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = H\left(x, \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}, t\right) P(x,t), \quad \varepsilon = \Omega^{-1} \qquad (6.4)$$

の形にかゝれる。こゝに

$$H(x,p,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n!}p^{n}c_{n}(x,t) \qquad (6.5)$$
$$=\int dr\,(1-e^{-rp})\,w(x,r,t)$$

である。$\varepsilon\sim 0$ におけるこの方程式の漸近的性質は，筆者らによつて論ぜられているので詳細は述べない。[20,21]

興味あることの一つは，(6.4)と Schrödinger eq. とのアナロジーである。プランク定数 $h\to 0$ の極限が古典力学であつたのと類似して，$\varepsilon\to 0$ の極限は，

$$\dot{y}=c_{1}(y) \qquad (6.6)$$

という決定論である。このまわりのゆらぎ，$x-y(t)$，について，そのモーメントの運動方程式を導びくことができるが，特に

$$\sigma=\langle(x-y(t))^{2}\rangle/\varepsilon \qquad (6.7)$$

については

$$\dot{\sigma}(t)=2\frac{\partial c_{1}(y,t)}{\partial y}\sigma(t)+c_{2}(y,t) \qquad (6.8)$$

となる。[21] これは，ゆらぎの発展が，決定論的運動法則(6.6)によつて支配されることを意味し，非線型過程への散逸揺動定理の拡張とも見られる。興味ある応用は，不安定状態から安定状態への移行に伴なう異常なゆらぎの増大である。[20]

(6.4) の $P(x,t)$ は Ω が大きいとき

$$P(x,t) \sim \exp \Omega \phi(x,t) \tag{6.9}$$

という形をもつのがふつうであろうと思われる。これを筆者は，確率分布密度関数の一般的な extensivity Ansatz と呼んだ。[22] (6.4) について，$P(x,t_0)$ がこの形をもてば，後の時刻にもこの形をもつ，すなわち extensive property の propagation を示すことができる。[20] これは鈴木によってもっと広い条件の非平衡過程へ拡張された。[23] 周知のごとく，extensivity は，熱平衡統計力学においては，熱力学的極限の存在定理であり，非平衡系へのその拡張も，基本的な意味をもつものと思われる。しかし，(6.9) で定義される $\phi(x,t)$ の一義性，解析性はむつかしい問題であろう。ふつうの場合には，変なことは起らないが，相変化のような問題では，ϕ に異常性が現われる筈である。異常性がない素直な場合には，中心極限定理的な意味で (6.9) の漸近形は

$$P(x,t) \sim \exp\left\{-\frac{\Omega}{2\sigma(t)}(x-y(t))^2\right\} \tag{6.10}$$

のように，決定論的 path のまわりの正規分布となる。

$$x-y(t) = \xi/\sqrt{\Omega}\ , \quad P(x,t) = \overline{P}(\xi,t)$$

とおくと，(6.10) は

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{P}(\xi,t) = -\frac{\partial}{\partial \xi} C_1'(y)\xi\bar{P} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} C_2(y)\bar{P} \qquad (6.11)$$

という Fokker-Planck eq. の解である。[21] ただしこゝに y は (6.6) からきまる t の関数とみなされている。これに関連して，(6.4) の右辺の第2項までを残した Fokker-Planck eq.

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} C_1(x,t)P(x,t) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} C_2(x,t)P(x,t) \qquad (6.12)$$

は $\varepsilon \sim 0$ における近似としてはあまり意味がないことに注意しておこう。

N 個の要素（Ising spin）があって，その各々が $+$，または $-$ の状態をランダムにとるとし，$+\to-$，$-\to+$ の遷移の速さをそれぞれ

$$w_{+\to-} = \frac{1}{\tau}e^{-\mu}, \quad w_{-\to+} = \frac{1}{\tau}e^{\mu}$$

とする。釣合いでは $+$ にある確率 p_+，$-$ にある確率 p_- の比は $e^{2\mu}$ となる。N 個のうち，$+$ にあるスピンの数を N_+，$-$ にあるものの数を N_- とすれば，(5.12) は

$$N_+ - N_- = X, \quad N_+ + N_- = N$$

について次のようにかゝれる。

$$\frac{\partial}{\partial t}P(N_+,N_-,t) = -\{e^{-\mu}N_+ + e^{\mu}N_+\}P(N_+,N_-,t)$$
$$+e^{\mu}(N_-+1)P(N_+-1,N_-+1,t) + e^{-\mu}(N_++1)P(N_++1,N_--1,t) \qquad (6.13)$$

これはまた，中心に引きつけられるブラウン運動 ── いわゆる Ehrenfest model[24) ── の連続時間 t への焼直しでもある。これは，(5.12) の型の問題の最も簡単な例であるが，その解は文献に見当らないので，ここに挙げておくと，

$$P(X, 0) = \delta(X - X_0)$$

の初期条件について $P(X, t)$ の母関数は，

$$Q(z, t) = \sum_X P(X, t)\, z^{\frac{X}{2}}$$

$$= \frac{1}{(e^{\mu} + e^{-\mu})^N} \left[(e^{\mu} + e^{-\mu-\gamma t})\, z^{\frac{1}{2}} + e^{-\mu}(1 - e^{-\gamma t})\, z^{-\frac{1}{2}} \right]^{\frac{N+X_0}{2}}$$

$$\times \left[e^{\mu}(1 - e^{-\gamma t})\, z^{\frac{1}{2}} + (e^{-\mu} + e^{\mu-\gamma t})\, z^{-\frac{1}{2}} \right]^{\frac{N-X_0}{2}} \quad (6.14)$$

$P(X, t)$ が extensive であることは明らかである。平衡状態は

$$X_{eq} = N \tanh \mu$$

であるが，$X - X_{eq} \sim O(\sqrt{N})$ で，$X(t)$ は Gaussian，したがって理想的なブラウン運動であるが，その範囲を越えれば Gaussian ではなく，したがって Fokker-Planck eq. (6.12) は意味がない。(6.13) をまともに解かなくてはならないのであるが，この問題では

$$\frac{d}{dt}\langle X(t) \rangle = -\gamma\left(\langle X(t) \rangle - X_{eq}\right) \qquad (6.15)$$

という簡単な指数減衰が常に成立つことに注意する価値がある。これは自由エネルギーの微分が力であり，それによって緩和がきまる[25]という常識的な仮定には必ずしも根拠がないことを教える。

上述のスピン系が相互作用をもち，熱平衡としては，強磁性が低温度で実現されるという，不連続な相転移をもつ場合に，(6.13) を拡張することは甚だ興味がある。スピンの相互作用を分子場モデルに理想化し，かつスピン反転の素過程は熱浴との接触による spontaneous なものとしたモデルを Kinetic Weiss-Ising Model とよぶ。(6.13) の拡張は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}P(N_+, N_-, t) \\
&= -\left[W_{+-}(N_+, N_- \to N_+-1, N_-+1) + W_{-+}(N_+, N_- \to N_++1, N_--1)\right]P(N_+, N_-, t) \\
&\quad + W_{-+}(N_+-1, N_-+1 \to N_+, N_-)P(N_+-1, N_-+1, t) \\
&\quad + W_{+-}(N_++1, N_--1 \to N_+, N_-)P(N_++1, N_--1, t)
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
W_{+-}(N_+, N_- \to N_+-1, N_-+1) &= N_+ e^{-\mu - \frac{\alpha}{N}(N_+-N_-)} \\
W_{-+}(N_+, N_- \to N_++1, N_--1) &= N_- e^{\mu + \frac{\alpha}{N}(N_+-N_-)}
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

$$\mu = \mu_0 H/kT, \qquad \alpha = J/kT$$

のようにかかれる。μ は外からかけた磁場，α はスピン間相互作用の強さをそれぞれ熱運動の尺度 kT で表わしたパラメタである。$\mu = 0$ のとき，$\alpha = 1$ が分岐点であることは，(6.16) の平衡分布

$$P_e(N_+, N_-) = \frac{N!}{N_+!\,N_-!}\, e^{\mu(N_+ - N_-) + \frac{\alpha}{N}(N_+ - N_-)^2} \qquad (6.18)$$

が $\alpha > 1$ では

$$x = \frac{N_+ - N_-}{N}, \qquad x = \tanh \alpha x \qquad (6.19)$$

の二つの解 $x = \pm x_0(\alpha)$ に対応する二つの極大をもつことからわかる。(6.4) は

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = -\Big[(1 - e^{\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}}) e^{-\mu - \alpha x}(1+x) + (1 - e^{-\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}}) e^{\mu + \alpha x}(1-x) \Big] P(x,t) \qquad (6.20)$$

とかかれる。$\varepsilon \to 0$ におけるこの偏微分方程式の漸近的な性質は，確率過程の分岐という観点から甚だ興味あるものであろう。[26)]

§ 7. マルコフ過程演算子の力学

物理では好んで Forward Kolmogorov eq.

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \Gamma\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) P(x,t) \qquad (7.1)$$

を用いる。この adjoint eq. すなわち Backward eq.

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x,t) = \Gamma^{+}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) g(x,t) \qquad (7.2)$$

の意味は，

$g(x,0) \equiv g(x)$ としたとき，

$$g(x,t)=\langle g(x)\rangle_t=\int g(x,t)P(x,0)\,dx$$
$$=\int g(x)P(x,t)\,dx \qquad (7.3)$$

すなわち，初期条件がxに確定していたとき，時刻tにおける$g(x)$の期待値は$g(x,t)$である，ということである。

一般に，$A(x)$，$B(x)\cdots\cdots F(x)$の時間的相関

$$\langle A(x_{t_1})B(x_{t_2})\cdots\cdots F(x_{t_n})\rangle\equiv\langle A(t_1)\cdots\cdots F(t_n)\rangle$$
$$=\int\!\!\cdots\!\!\int F(x_n)(x_n|e^{\Gamma(t_n-t_{n-1})}|x_{n-1})\cdots\cdots(x_3|e^{\Gamma(t_3-t_2)}|x_2)B(x_2)$$
$$(x_2|e^{\Gamma(t_2-t_1)}|x_1)A(x_1)(x_1|e^{\Gamma(t_1-t_0)}|x_0)P(x_0\,t_0)$$
$$dx_n\cdots\cdots dx_2dx_1,\quad t_n>t_{n-1}\cdots>t_2>t_1>t_0 \qquad (7.4)$$

である。こゝに量子力学における bra-ket 記号を用いたが，$(x'|e^{t\Gamma}|x)$ は $(0\ \ t)$ の時間のあいだでの $x\longrightarrow x'$ の遷移確率である。(7.4) は簡単に

$$\int dx'\int dx\,(x'|F(t_n)\cdots\cdots B(t_2)A(t_1)|x)P(x,0) \qquad (7.5)$$

とかゝれる。ただし

$$A(t)=e^{-\Gamma t}Ae^{\Gamma t} \qquad (7.6)$$

は，x や $\partial/\partial x$ を含み，量子力学における Heisenberg 演算子に酷似する。もっと一般に，(7.1) の発展演算子が，時間tをあらわに含むとき，

$$\pi_t\equiv\frac{\partial}{\partial x_t},\quad[\pi_t,x_t]=1 \qquad (7.7)$$

と定義し，"Heisenberg" 運動方程式

$$\dot{\pi}_t = -[\Gamma(x_t, \pi_t, t), \pi_t]$$
$$\dot{x}_t = -[\Gamma(x_t, \pi_t, t), x_t] \qquad (7.8)$$
$$\dot{A}_t = -[\Gamma(x_t, \pi_t, t), A_t], \quad A_t = A(x_t, \pi_t)$$

を，初期条件 $x_{t=0} = x \quad \pi_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x}$ で解き，その解を (7.5) に代入すれば，初期分布 $P(x, 0)$ が与えられたときに所要の相関関数が求められる。マルコフ過程としての非決定論的発展は，ここでは演算子の発展として表現される。量子力学とのこの形式的対応は，実際問題にこれを応用することができる。[27] 特に，確率変数が，場，たとえば，空間座標 $\vec{r}$ をパラメタとする変数 $\psi(\vec{r}, t)$ であるとき，その確率的発展を表現する相関関数，あるいはグリーン関数の計算に，場の量子論について工夫された種々の摂動展開の方法を用いることができる。これらは，Gaussian white noise を含む非線型の Langevin eq. でその発展が規定される場の問題などを取扱うのに有効である。

§8 H-定理について

最後に，Markoff 過程に関する一般的な H-theorem について一言触れておきたい。

Forward Kolmogorov eq.

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \Gamma(x, \frac{\partial}{\partial x}, t) P(x,t) \qquad (8.1)$$

について，時刻 s における二つの異なる初期分布から出発した解を，$\psi_1(x,t)$，$\psi_2(x,t)$ とかく。$C(\xi)$ $(\xi \geqq 0)$ を任意の上に凸な関数として

$$H_C(t) = \int dy\, C\left(\frac{\psi_2(y,t)}{\psi_1(y,t)}\right) \psi_1(y,t) \qquad (8.2)$$

を定義すれば

［定理］ $H_C(t_1) \leqq H_C(t_2)$, $s \leq t_1 \leq t_2$ (8.3)

が成立つ。証明は次の通りである。

$w_i \geqq 0$ $\sum_i w_i = 1$ に対して，上に凸な関数 $C(\xi)$ について

$$\sum_i C(\xi_i) w_i \leqq C(\sum w_i \xi_i) \qquad (8.4)$$

が成立つ。時間区間 (t_1, t_2) における遷移確率を $P(t_1 x | t_2 y)$ とすれば， $P(t_1 x | t_2 y) \geqq 0$ かつ

$$\int \psi_1(x, t_1) dx\, P(t_1 x | t_2 y) = \psi_1(y, t_2) \qquad (8.5)$$

$$\int P(t_1 x | t_2 y) dy = 1 \qquad (8.6)$$

である。

$$w(x) = \frac{\psi_1(x, t_1) P(t_1 x | t_2 y)}{\psi_1(y, t_2)}$$

をえらべば，不等式(8.4)から

$$\int dx\, C\left(\frac{\psi_2(x,t_1)}{\psi_1(x,t_1)}\right)\psi_1(x\,t_1)P(x\,t_1|y\,t_2) \leqq C\left(\frac{\psi_2(y,t_2)}{\psi_1(y,t_2)}\right)\psi_1(y,t_2),$$

これをyについて積分すれば(8.3)を得る。

特に $C(\xi)=-\xi\log\xi$ とすれば，(8.2)は

$$H(t) = -\int dx\ \psi_2(x,t)\log\frac{\psi_2(x,t)}{\psi_1(x,t)} \qquad (8.7)$$

を与える。ψ_1 と ψ_2 を入れ換えたものを加え合せて

$$H(t) = \int dx\,(\psi_2(x,t)-\psi_1(x,t))\log\frac{\psi_1(x,t)}{\psi_2(x,t)} \qquad (8.8)$$

としてもよい。(8.8)の形のH関数についてのH-定理は定常マルコフ過程についてLebowitzらによって与えられているが[28]，この定理はもっと一般で，非定常過程についても成立つ。また，遷移確率行列の対称性(detailed balance)も必要ではない[29]。

特に定常過程で，ある平衡分布(invariant measure)が存在するときには，(8.7)の ψ_1 を平衡分布 ψ_e としてよい。そのようなH関数の増大は(ψ_e が一義的であれば)，平衡への近接を表わす。

ここで注意しておきたいのは，(8.1)の Γ が時間をあらわに含む非定常過程に関するH定理の意味である。この場

合，平衡分布は存在していないが，H定理は，異なる初期条件から出発した二つの過程が，時間の経過とともに一つの確率過程に漸近するか，どうか，という問に対する答の一つの鍵を与えるものと思われる。(8.8)のH関数について

$$H(t) < 0 \quad , \quad H(t_1) \leqq H(t_2),\ t_1 < t_2$$

$$H(t) = 0 \quad \text{if} \quad \psi_1(x,t) = \psi_2(x,t)$$

であるから，$\psi_1 = \psi_2$ になるまで $H(t)$ が増大し続けるなら，非定常マルコフ過程の初期条件によらない終局過程への一義的な近接がいえるわけである。しかし，$\psi_1 \neq \psi_2$ でも，$H(t) \to 0$ となることはある。たとえば，単純な拡散過程はその例である。

物理的現象の多くのものでは，このような意味での終局過程の一義性は成立っている。たとえば，§2のブラウン運動について，時間とともに変る（たとえば周期的な）外力が加わった場合，充分時間が経てば初期条件の影響が消えることは明らかである。エルゴード性の問題を，非定常過程にどう一般化するのか，どれほどのことがなされているか知らないが，興味がある，というだけでなく，非可逆過程の物理として一つの基礎的な問題であると思われる。

Reference および補註

1) 本論の全体に対する参考として「統計物理学」第5章第6章（久保），岩波講座 現代物理学の基礎［第2版）5.

2) R. Kubo: J. Math. Phys. 4 144 (1963)

3) Ref. 1)のほか，有名な review paper として，
S. Chandrasekhar: Rev. Mod. Phys. 15 1 (1943)
M. C. Wang & G. E. Uhlenbeck: Rev. Mod. Phys. 17 323 (1945) がある。こゝでの議論には，特に後者がよい参考となろう。

4) 正確にいえば，ブラウン粒子の密度 ρ_0 が，流体媒質の密度 ρ，よりも遥かに大きいこと，$(\rho/\rho_0 \to 0)$ がさらに要求される。この比が1の程度である場合には，粒子の運動に伴なう流体の流れが，再び粒子に力を及ぼし，§3に述べるような遅れをもつ抵抗が作用する。[30)]

5) R. Kubo: in Tokyo Summer Lectures in Theoretical Physics 1965 Part I Many-Body Theory, ed. R. Kubo (Shokabo)

6) R. Kubo: Rep. on Progres in Physics 29 Part 1 255 (1966).

7) H. Mori: Progr. Theor. Physics (Kyoto) 33 423 (1965)

8) R. Kubo: J. Phys. Soc. Japan 12 570 (1957).

9) 略して FDT という。

10) H. Nyquist: Phys. Rev. 32 110 (1928).

11) これは多少誤解を招く書き方であろう。古典力学の場合

Hamilton eq.
$$\dot{p}_t = -\frac{\partial H(p_t, q_t)}{\partial q_t}, \qquad \dot{q}_t = \frac{\partial H(p_t, q_t)}{\partial p_t} \tag{1}$$

の解は，$t=0$ における p_t，q_t を p，q，と記し

$$p_t = e^{-i\mathcal{L}t} p, \quad q_t = e^{-i\mathcal{L}t} q$$

とあらわされる。但し

$$i\mathcal{L}(p, q)f(p, q) = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}\right)f(p, q)$$

は，ふつうの Liouville operator である。したがって p_t，q_t の関数である力学量 $A_t = A(p_t, q_t)$ について

$$A_t = e^{-i\mathcal{L}t} A(p, q) \tag{2}$$

が成立つ。これは A_t を初期位相 p，q の関数として表わす。量子力学の場合の Heisenberg 運動方程式

$$\dot{A}_t = \frac{1}{i\hbar}[H, A_t] \tag{3}$$

も，元来は（H が時間に依る場合も含めて）(1)と同様の意味である。特に H が t にあらわには依らない場合，解を

$$A_t = e^{\frac{t}{i\hbar}H} A e^{-\frac{tH}{i\hbar}} \tag{4}$$

とかくのは，(2)と同じ意味である。

12) 熱平衡の近くの問題には, canonical correlation[6)]

$$\langle A ; B \rangle = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\lambda \, \mathrm{Tr}\, \rho_e e^{\lambda H} A e^{-\lambda H} B$$

を用いるのが適切である。こゝに $\beta = 1/kT$, ρ_eは平衡をあらわす密度行列 $\rho_e = e^{-\beta H}/\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}$, Hはその系のハミルトニアンである。

13) R. Kubo, in "Fluctuation, Relaxation and Resonance in Magnetic Systems" Scottish Universities' Summer School p. 23 (1961) ed. D. ter Haar, Oliver & Boyd. Ref. 1)

14) この問題の種々の具体的な例については, R. Kubo, A Stochastic Theory of Line-Shape, in Advances in Chemical Physics, Conf. on Stochastic Processes in Chemical Physics, ed. K. Shuler John Wiley 1969 pp. 101–127

15) (4.8), (4.11) は, 擾動の二つの理想的な型を代表している。1) の型は, 弱い擾動が常時働らく場合で, その擾動の大きさ (Δ) とその変化の速さ ($1/\tau_c$) の比 $\Delta \cdot \tau_c$ が小さいとき, その擾動は, その系の変化にマルコフ性を与える。量子力学で擾動によって状態の遷移が確率的に起るとし, その確率を2次擾動計算で求めるのは, まさに (4.13) の γ

を計算することに他ならない。このことを詳細には述べなかったが，本節および§5の所論から読み取れるであろう。2）の型は，強い摂動が稀に起る場合である。一つ一つの摂動の作用は衝突としてチャンと取扱かうが，衝突の生起が確率的とみなされる。実際の物理の問題は，これらの典型から外れている現実を如何に処理するかということである。その方法は近代的な量子統計力学のさまざまな手法である。それらを確率過程論の立場で見直すことは確率過程論としても有用であるが，あまり行なわれていない。

16） 1），13）参照。

$$f(x,t)=\int e^{ikx}f_k(t)\,dk$$

のようにフーリエ展開すれば，(5.2）は

$$\frac{\partial}{\partial t}f_k(t)=-iku(t)f_k(t)$$

となる。確率変数 $f_k(t)$ について，これは(4.1）と同型である。(5.5）は波数 k について $kl\ll 1$ を意味する。

17） H. Mori, M. Tokuyama & T. Morita: Suppl. Progr. Theor. Physics No 64 (1978) p.50. 本講究録 森肇氏の報告

18） R. Kubo: J. Phys. Soc. Japan. 17 1100 (1962), Ref. 2)

19） 異なる t に関して非可換な演算子 $A(t)$ について

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U(t), \qquad \frac{dV}{dt} = V(t)A(t), \quad U(0) = V(0) = 1$$

で定義される指数演算子 $U(t)$, $V(t)$ を

$$U(t) = e_{\leftarrow}^{\int_0^t A(t')dt'}, \quad V(t) = e_{\rightarrow}^{\int_0^t A(t')dt'}$$

のように記し（これは自己流），矢印の向きに order された指数関数演算子という。

20) R. Kubo, K. Matsuo, & K. Kitahara: J. Stat. Phys. 9 51 (1973)

21) N. G. van Kampen: Can. J. Phys. 39 551 (1961)
van Kampen, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, E. G. D. Cohen ed. Amsterdam (1962) p.173.

22) R. Kubo, in *Synergetics*, Haken ed. BG Teubner Stuttgart 1973)

23) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. 53 1657 (1975) 57 746 (1977), 59 1765 (1978). J. Stat. Phys. 20 163 (1979)

24) 単位時間ごとに random walker が ±1 のステップをもつとし，時刻 s に位置 m にいる確率 $P(m,s)$ は

$$P(m,s) = \frac{R+m+1}{2R}P(m+1,s-1) + \frac{R-m+1}{2R}P(m-1,s-1)$$

に従がうとする。R はある整数.

25) ある熱力学変数 X の関数として考えている系の自由エネルギーが $F(X,T)$（T は温度）であるとする。T 一定

条件で，X を動かす熱力学的な力は $-\partial F/\partial X$ であるから，非平衡状態での X の確率 $P(X,t)$ が

$$\frac{\partial}{\partial t}P(X,t)=\frac{\partial}{\partial X}\eta\left(\frac{\partial F}{\partial X}+kT\frac{\partial}{\partial X}\right)P(X,t)$$

で与えられる，と考えたくなる。しかし (6.13) は決してこのようには近似されない ($X\sim O(\sqrt{N})$ の場合を除いて)。

26) たとえば (6.6) が

$$\dot{y}=\gamma y\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)$$

という形をもっていれば $y=0$ は不安定点，$y=\pm a$ は安定点である。$y=0$ の近くから出発して $y=\pm a$ に分岐する過程に伴なうゆらぎの変化はこの種の問題である。これについては M. Suzuki: Suppl. Prog. Theor. Phys. No 64 (1978) 402 を見よ。不安定状態から熱力学的安定状態に移行する過程での空間的なゆらぎの生成は，二成分溶液系などの観測される spinodal decomposition の現象で統計物理としての興味を呼んでいる。

27) K. Kawasaki: Ann. Phys. 61 1 (1970) P. C. Martin, E. D. Siggia & H. A. Rose: Phys. Rev. A 8 423 (1973), U. Deker & H. Haake, Phys. Rev. A 11 2043 (1975), C. P. Enz & L. Garrido: Phys. Rev. A 14 1258 (1976), L. Garrido & M. San Miguel: Prog. Theor. Phys. 59 40, 55 (1978),

C. P. Enz: in Critical Phenomena (Lecture Note in Physics 54, Springer) ed. J. Brey & R. B. Jones (1976) pp. 80–110.

28) J. L. Lebowitz and P. G. Bergmann: Ann. Phys. 1 1 (1957).

29) 定常マルコフ過程について，不変測度が存在する場合，遷移確率の対称性，あるいは detailed balance の仮定なしでH-定理を証明することは多くの人々によってなされたが，その最初は K. Yosida: Proc. Imp. Acad. Tokyo 10 43 (1940) であろう。なお，K. Yosida: Functional Analysis, Springer 1965 p.379 以下参照。伏見康治：確率論及統計論 河出書房（昭16）に吉田氏の所論の引用がある。これより後れて独立にこれに言及したものに E. C. G. Stueckelberg: Helv. Phys. Acta 25 577 (1952) 等がある。

なお，本文に与えた定理(8.3)は，内容的に最も一般であろう (R. Kubo: unpublished note)。関数 $C(\xi)$ として $-\xi \log \xi$ をえらぶ理由は，これが extensivity をもつからである。

30) 補註 4) にさらに補足する。有限な密度 ρ_0，半径 a の球形ブラウン粒子が，密度 ρ，粘性係数 η の流体媒質

中で行なうブラウン運動は，Langevin eq.

$$m^* \dot{u} + \beta u + \alpha \int_{-\infty}^{t} dt' \frac{\dot{u}(t')}{\sqrt{t-t'}} = R(t) \qquad (1)$$

によって記述される。こゝに

$$m^* = m + \frac{2}{3}\pi a^3 \rho, \qquad m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$$

$$\alpha = 6\pi a^2 \rho (\nu/\pi)^{1/2}$$

$$\beta = 6\pi \nu \rho a$$

A. Widom: Phys. Rev. A 3 1027 (1971), R. M. Mazo: J. Chem. Phys. 54 3712 (1971), K. M. Case: Phys. Fluid 14 2091 (1971) etc.

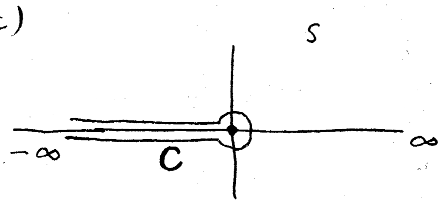
(1) から

$$\gamma[\omega] = \frac{1}{m^*}\left[\beta + \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)(i\omega)^{\frac{1}{2}}\right]$$

(3.9) の逆変換として速度 $u(t)$ の相関関数を求めると，

$$\langle u(t_0) u(t_0+t) \rangle = \frac{kT}{m^*}\phi(t)$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{st} ds}{s + a s^{1/2} + b}$$



ただし 積分路は図の通りである。また

$$a = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\alpha / m^*, \qquad b = \beta / m^*$$

$$\sigma = a b^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{2}\frac{\rho}{\rho_0 + \rho/2}\right)^{1/2}$$

$$\tau = bt$$

として

$$\phi(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2\tau}\sigma x^2 dx}{(x^2-1)^2+\sigma^2 x^2}$$

(R. Kubo: unpublished note) $\sigma\to 0$ の極限では

$\phi(t) = e^{-bt}$ であるが，$\sigma>0$ では tの大きいところで

$$\phi(t) \sim \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}}(bt)^{-\frac{3}{2}}$$

この尾の長い減衰は，B. J. Alder & T. E. Wainwright: Phys. Rev. A1 18 (1970) の計算機シミュレーションによって見出され，(non-Markoffian) long time tail として関心を呼んだ。ただし，$\rho/\rho_0\to 0$ が IBM に必要なことは古くH. A. Lorentz が注意している。

[附記] こゝでは主として古典力学的な系を念頭において述べているが，量子力学的な系の確率過程論的な発展も，こゝに論じた問題に関してはあまり本質的なちがいはない。実際，量子力学的な系への応用は数多くなされている。

1979. 6. 6 稿