数理解析研究所講究録
第 367 巻 1979 年 114-133

不安定な非線型ブラウン運動の理論

東大 理　鈴木増雄

自然現象の中で特異な振舞い、特にカタストロフィクな性質を示すのは、大抵、相互作用の多体的効果に由来する。その場合、今興味のある観測可能な巨視的変数に着目すると、それ以外の変数は、ランダムな力として、確率的に扱えることが多い。こうして、ブラウン運動ないしランジュバン方程式が重要になってくる。巨視的変数を x とすると、それは、次のように書ける：

$$\frac{dx}{dt} = c_1(x) + c_2(x)\eta(t). \tag{1}$$

但し、$\eta(t)$はランダムな力で、多くの場合、簡単のため、ガウシャンでホワイトノイズと仮定される：

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\varepsilon\delta(t-t') \tag{2}$$

そもそも(1)の確率微分方程式の解釈から問題になる。Ito か

Stratonovich か。この数学的問題も考慮に入れて、(1)の非線型ブラウン運動を、不安定性に着目して、ランダムな力の強さ ε が小さい極限で、漸近的に解く。これが、今まで著者が主として、フォッカー・プランク方程式を用いて、定式化してきた不安定点近傍での過渡現象のスケーリング理論[1),2)]のより数学的な精密化になっていることを示す。

基本的なアイデアは、文献1に示されているが、要するに不安定な系では、ε がどんなに小さくても、零で無ければ、x が初期時刻に丁度不安定点にあっても、x はどんどん指数関数的に変動する。そこで、x のゆらぎが巨視的に大きくなって、秩序発生とみなせる位に発展する時間 t_0 (onset time)の領域(スケーリング領域)に焦点を合わせて漸近評価を行う。すなわち、ε を小さくすると、それに対応して、時間 t を大きくしてやれば、いつでも、スケーリング領域に入るようにすることが出来る。この極限をスケーリング極限と呼び、それを sc-lim と書くことにする[2)]。すなわち、時間 t の適当な非線型変換

$$\tau = S(t, \varepsilon, \cdots) \tag{3}$$

を導入して、τ を固定し、$\varepsilon \to 0$ の極限で、t が onset time の領域(スケーリング領域)に入るようにする。この変換に対して、

$$\text{sc-}\lim \equiv \lim_{\varepsilon\to 0,\, t\to\infty,\, \tau \text{ fixed}} \tag{4}$$

と書くことも出来る。今、

$$\text{sc-}\lim \langle (x(t) - x_{sc}(t))^2 \rangle = 0 \tag{5}$$

または、任意の自然数nに対して、

$$\text{sc-}\lim \langle x^n(t) \rangle = \text{sc-}\lim \langle x_{sc}^n(t) \rangle \tag{6}$$

が成立するとき、確率変数$x(t)$は、スケーリング極限で、極限過程$x_{sc}(t)$に近づくと言うことにする。(5)の定義は、強過ぎるかもしれないが、ここでは、簡単のため、(5)の定義に従って議論する。そもそも、(5)の定義でも、(6)の定義でも、$x_{sc}(t)$は一意的には決まらず、$\varepsilon \to 0$（τ固定）で零になる関数の分だけ不定である。したがって、なるべくその不定部分を除いた主要な部分だけをとり出したような確率過程の代表例が$x_{sc}(t)$であるとみるべきである。確率過程そのものをτのみの関数として表現出来れば、一番わかり易いのであるが、少し無理なようである。$x_{sc}(t)$は、tとεをまだ独立変数として含んだ確率過程である。それにもかかわらず、scalingの略称scを添字に付したのは、$x(t)$は求まらない場合でも、時間をスケーリング領域に限定すれば、その漸近解$x_{sc}(t)$が求まり、期待値$\langle x_{sc}^n(t) \rangle$は$\tau$のみの関数になるからである。

　このようなスケーリング領域がいつでも存在するのであろうか。それは、初期値が不安定点近傍にあれば、存在するこ

とがわかる。すなわち、不安定性のために、確率変数は、時間と共にどんどん初期値から、（普通、指数関数的に）離れていく。特に、初期値が丁度不安定点 $x=0$（但し $c_1(0)=0$）にある場合を考えるとわかり易い。ランダムな力 $\eta(t)$ の強さ ε が零であれば、$x(t)$ は決定方程式 $\dot{x}=c_1(x)$ に従うことになり、$t=0$ で $x=0$ であれば、$x(t)\equiv 0$ となり、運動は起らない。そこで、$\varepsilon \neq 0$ で $\varepsilon \to 0$ にしていくと、x が目立つ程度に大きくなる時間は益々長くなる。$f'(0)\equiv\gamma>0$ ならば、ゆらぎ $\langle x^2(t)\rangle$ は、初期時刻（ガウス近似がよい時間領域）では、$\varepsilon \exp(2\gamma t)$ に比例して増大する[3]。このガウス近似（線型近似）は、このゆらぎ $\varepsilon \exp(2\gamma t)$ が小さい時にのみ成立する。これが1の程度になると、すなわち、$\varepsilon \exp(2\gamma t)\sim 1$ になるとガウス近似は破綻して、非線型効果が重要になってくる。その時間領域がとりもなおさず、スケーリング領域で

$$t \sim \frac{1}{2\gamma}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{7}$$

によって表わされ、$\varepsilon \to 0$ と共に大きくなる。従って(3)の非線型変換としては、

$$\tau = \sigma\varepsilon\exp(2\gamma t) \tag{8}$$

とすればよいことがわかる。但し、σ は ε と t に無関係な定数である。

(8)の τ を固定し、$\varepsilon \to 0$ の極限で漸近評価を具体的に行う

には、次のような確率変数の非線型変換

$$\xi = F(x) = \exp \int_{a_0}^{x} \frac{\gamma}{c_1(y)} dy \qquad (9)$$

を導入すると便利である。但し、a_0は、$F'(0)=1$ となるように決める。こうすると、$x \to 0$ では、$\xi = x + O(x^2)$。この変換によって、(1)で $c_2(x)=1$ とおいた式（一般の $c_2(x)$ の場合も同様であるが式が複雑になるので、ここでは以下 $\dot{x} = c_2(x) + \eta(t)$ の場合のみ考察する）は

$$\frac{d}{dt}\xi = \gamma\xi + [\gamma\xi / c_1(F^{-1}(\xi))]\eta(t) \qquad (10)$$

となる。ここで、$F^{-1}(\xi)$は $F(x)$ の逆関数である。今

$$\lim_{\xi \to 0} \gamma\xi / c_1(F^{-1}(\xi)) = 1 \qquad (11)$$

に注意して、

$$f(\xi) = \gamma\xi / c_1(F^{-1}(\xi)) - 1 \quad ; \quad f(0)=0 \qquad (12)$$

と書くことにする。こうして(10)は

$$\frac{d}{dt}\xi = \gamma\xi + (1 + f(\xi))\eta(t) \qquad (13)$$

となる。(9)の変換は、決定方程式を線型化する非線型変換であった訳である。（この非線型変換に時間も含ませれば、(13)の線型部分 $\gamma\xi$ も消えるようにすることが可能である。）

さて、(13)の微分方程式は、次の積分方程式の形に変形出

来る：

$$\xi(t)=e^{\gamma t}\left[\int_0^t e^{-\gamma t'}\{1+f(\xi(t'))\}\eta(t')dt'+\xi(0)\right]. \quad (14)$$

ここで、$f(\xi)$の項が第二の時間領域（スケーリング領域）で無視出来ることが示せれば、我々の目的は果せて、スケーリング解は、

$$\xi_{sc}(t)=e^{\gamma t}\left[\int_0^t e^{-\gamma t'}\eta(t')dt' + \xi(0)\right] \quad (15)$$

とおくと、

$$x_{sc}(t) = F^{-1}(\xi_{sc}(t)) \quad (16)$$

で与えられる。そこで、

$$\text{sc-lim}\left\langle(\xi(t)-\xi_{sc}(t))^2\right\rangle=0 \quad (17)$$

を示すことにしよう。

$$\text{sc-lim}\left\langle(\xi(t)-\xi_{sc}(t))^2\right\rangle$$

$$=\text{sc-lim}\, e^{2\gamma t}\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\left\langle f(\xi(t_1))f(\xi(t_2))\eta(t_1)\eta(t_2)\right\rangle e^{-\gamma(t_1+t_2)}$$

$$=\text{sc-lim}\, e^{2\gamma t}\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\left\langle f(\xi(t_1))f(\xi(t_2))\right\rangle\left\langle\eta(t_1)\eta(t_2)\right\rangle e^{-\gamma(t_1+t_2)}. \quad (18)$$

(18)の最後の等式は、$\eta(t)$がガウシャンのランダムな力であり、$\{\xi(t)\}$の間の相関は指数関数的に増大することから正当

化されるだろう。或いは、ε の摂動の各次数で、等式が証明される。

さて、(18)式は、(2)式を用いると、

$$\text{sc-}\lim 2\varepsilon\int_0^t e^{2\gamma(t-t')}\langle f^2(\xi(t'))\rangle dt' \tag{19}$$

となる。$f(0)=0$ に注意すれば、$f(\xi)=\xi g(\xi)$; $g(0)<\infty$ と書ける。そこで、$\langle f^2(\xi)\rangle$ を次のように書き直そう。

$$\langle f^2(\xi)\rangle=\langle \xi^2 g^2(\xi)\rangle=\varepsilon e^{2\gamma t}h(t,\varepsilon);\ h(t,0)<\infty \tag{20}$$

すると

$$(19)\text{式}=\text{sc-}\lim(2\varepsilon e^{2\gamma t})\cdot\text{sc-}\lim(\varepsilon t)\cdot\text{sc-}\lim\frac{1}{t}\int_0^t h(t',\varepsilon)dt'. \tag{21}$$

明らかに、上式の第2因子 sc-lim (εt) は零になる。ところが、第1因子は、有限であり($\because \tau=$固定)，第3因子も積分の平均値の定理を用いて、

$$\text{sc-}\lim\frac{1}{t}\int_0^t h(t',\varepsilon)dt'=\text{sc-}\lim h(\theta_t t,\varepsilon) \quad . \tag{22}$$

但し、$0<\theta_t<1$。sc-lim $h(t,\varepsilon)=h_{sc}(\tau)$ の存在を仮定すれば、

$$\text{sc-}\lim h(\theta_t t,\varepsilon)=\text{sc-}\lim h_{sc}(\sigma\varepsilon e^{2\gamma\theta_t t})$$

$$=\text{sc-}\lim h_{sc}(\tau\exp[-2(1-\theta_t)\gamma t])$$

$$= \begin{cases} h_{sc}(\tau) < \infty & \text{for } \lim_{t\to\infty} \theta_t = 1 \\ h_{sc}(0) < \infty & \text{for } \lim_{t\to\infty} \theta_t < 1. \end{cases} \tag{23}$$

いずれにしても、(22)は有限になる。よって、(17)式が、

sc-lim $h(t,\varepsilon)$ の存在すなわち、sc-lim $\langle f^2(\xi)\rangle$ の存在

の仮定の下に、証明されたことになる。

例えば、物理的に興味のあるゆらぎ $\langle x^2(t)\rangle$ は、

$$\text{sc-lim}\langle x^2(t)\rangle = \text{sc-lim}\left\langle\left\{F^{-1}(\xi_{sc}(t))\right\}^2\right\rangle \tag{24}$$

によって、顕わに求められることになる。

特に $\xi(0)$ がガウス分布

$$P(\xi(0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\sigma_0}} \exp\left(-\frac{\xi^2(0)}{2\varepsilon\sigma_0}\right) \tag{25}$$

をしていれば、(15)式より、$\xi_{sc}(t)$ も、分散が

$$\varepsilon\sigma(t) = \langle\xi_{sc}^2(t)\rangle = \varepsilon\left(\sigma_0 + \frac{1}{\gamma}\right)e^{2\gamma t} \tag{26}$$

のガウス分布

$$P(\xi_{sc}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon\sigma(t)}} \exp\left(-\frac{\xi_{sc}^2(t)}{2\varepsilon\sigma(t)}\right) \tag{27}$$

に従う。よって、(24)は、もっと顕わに、

$$\text{sc-lim}\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left[F^{-1}(\varepsilon\sigma(t)\xi)\right]^2 d\xi \tag{28}$$

と積分形で表現される。もっと一般に、$x(t)$ の任意の関数

$A(x(t))$の期待値は

$$\text{sc-}\lim \langle A(x(t))\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} A(F^{-1}(\varepsilon\sigma(t)\xi))\,d\xi \tag{29}$$

と表わされる。従って、$\tau = \varepsilon\sigma(t)$と置けば、これがスケーリング変数になっていることがわかる。すなわち、$\langle A(x(t))\rangle$は、この時間領域では、τのみの関数で表わされる。

このスケーリング則の物理的意義は、上式(24)または(28)のように、初期領域で、$O(\varepsilon)$だったゆらぎが、スケーリング領域で、τのみの関数になることによって、オーダーが1の程度に大きく増幅されることであり、これは、もはや、ゆらぎではなく、巨視的秩序形成を表わすものとみることが出来る点にある。

具体的な例を考えてみる。レーザー模型として、その強度をxとすると、現象論的には、次の確率微分方程式を考察するとよい：

$$\frac{d}{dt}x = \gamma x - g x^3 + \eta(t). \tag{30}$$

但し、$\eta(t)$は(2)式をみたすランダムな力とする。(9)の非線型変換は、この場合、

$$\xi = F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-(g/\gamma)x^2}} \tag{31}$$

となり、この逆変換は、

$$x = F^{-1}(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1+(g/\gamma)\xi^2}} \tag{32}$$

で与えられる。従って、ゆらぎ$\langle x^2(t)\rangle$に対するスケーリング解は、

$$\text{sc-}\lim\langle x^2(t)\rangle = \langle x^2\rangle_{st}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\frac{\tau\xi^2}{\tau\xi^2+1}d\xi \tag{33}$$

と表わされる。但し、

$$\tau = (g/\gamma)\cdot\varepsilon\sigma(t) \quad , \quad \langle x^2\rangle_{st} = \frac{\gamma}{g} . \tag{34}$$

上のスケーリング解(33)は、$\tau\to\infty$で、正しい定常解$\langle x^2\rangle_{st}$に近づく。しかも、初期領域では、$\langle x^2(t)\rangle\sim\varepsilon\sigma(t)$となり、$O(\varepsilon)$であるから、この漸近解は、小さなゆらぎが巨視的な秩序にまで発展する様子をεが小さい極限で漸近的に表現していることがわかる。$\langle x^2(t)\rangle$が$\langle x^2\rangle_{st}$の半分程度に巨視的に増幅される時間を onset time t_0と定義すれば、これは、微視的なゆらぎが巨視的なゆらぎに変化する時間の目安を与えるもので、(33)または、もっと一般に(29)より、それは、$\tau\sim 1$によって与えられ、

$$t_0 \sim \frac{1}{2\gamma}\log\left\{\frac{\gamma}{g}\left[\varepsilon\left(\sigma_0+\frac{1}{\gamma}\right)\right]^{-1}\right\} \tag{35}$$

または、一般に、

$$t_0 \sim \frac{1}{2\gamma} \log\left[\varepsilon\left(\sigma_0 + \frac{1}{\gamma}\right)\right]^{-1} \tag{36}$$

となる。

以上の物理的な議論を、確率微分方程式論の数学的方法論で定式化出来ないものであろうか。

最後に、研究会では、ふれる時間が無かったのであるが、上の巨視的秩序形成の問題を、ミクロな立場から議論する理論の概要を述べたい。一般に、kinetic Ising model や TDGL 方程式を考える。今、ミクロな分布関数 $P(t)$ の従う発展方程式が形式的に

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t) = \Gamma P(t) \tag{37}$$

と表わされるとする。但し、Γ は系の発展演算子であり、今簡単のため、線型とする。具体的には、Γ は、例えば、kinetic Ising model の時間発展を表わし、エネルギーの保存しない確率過程を記述するものとする。$t = t_i$ で、$P(t_i)$ は

$$P(t_i) = P_i = e^{-\beta_i \mathcal{H}} \Big/ \mathrm{Tr}\, e^{-\beta_i \mathcal{H}} \tag{38}$$

で記述される平衡状態にあったとし、急に温度を変化させたとする。最終的には新しい温度 T で平衡状態になる。$t \to \infty$ では P_{eq} は

$$P_{eq} = e^{-\beta \mathcal{H}} / \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}} \quad ; \beta = \frac{1}{kT} \tag{39}$$

となる。途中の$P(t)$はどのように振舞うであろうか。エネルギーの保存しない確率過程を考えているので、

$$P(t) = \exp[F(t) - \beta(t)\mathcal{H} + \cdots] \tag{40}$$

と展開すると便利である。指数関数の肩を完備系で展開して、全部の係数が求まれば、厳密解が得られることになるのであるが、それは一般には無理であるから、部分空間に限定して、変分的に$P(t)$を決めることにしよう。

まず、初めに、相転移のダイナミックスとしての一般的特徴を議論する。平衡系の問題として相転移を扱う場合は、自由エネルギーを最小にするような状態を、いろいろな温度やその他の外場の関数として選び出す訳であるが、ここで問題にする相転移のダイナミックスの研究とは、初め無秩序状態にあった系から出発して、時間の経過と共にいかに秩序状態に移って行くか、その秩序発生の時間的経過のメカニズムを調べることであり、特に、秩序発生の始まる時間t_0 (*onset time*)を理論的に、ミクロな立場から求めることである。話を明確にするため、*kinetic Ising model* (ミクロな *stochastic model*)を例にして考察してみよう。初期時刻$t=0$で温度T_0 $(>T_c)$

の平衡状態にあったとする。急に$t=0$で温度を臨界点T_c以下に下げたとする。そこでは、自発磁化が現われるはずである。数学的には、長距離秩序

$$M_s^2(t)=\lim_{|i-j|\to\infty}\langle\sigma_i\sigma_j\rangle_t \quad ; \quad \sigma_i=\pm1 \tag{41}$$

が零でない有限の値を持つ。従って、この長距離秩序パラメタを時間の関数として、すなわち、$M_s(t)$を求めることは、相転移のダイナミックスとしてもっとも基本的な問題である。すでに、Nakajima-Zwanzigの射影演算子を非平衡系に拡張して[4),5)] $M_s(t)$等に対する閉じた方程式を近似的に作ろうとする試みはあるが、$M_s(0)=0$から出発して、途中で、$M_s(t)\neq0$となるようなメカニズムは説明出来ていないようである。それは、得られた閉じた非線型方程式では、初めに$M_s=0$であれば、恒等的に$M_s\equiv0$になってしまうからである。[4)] この困難を克服するには、熱力学的極限で対称性の破れ(symmetry breaking)を保障するのに充分な程度にゆらぎをとり入れなければならない。それには、期待値に関する方程式では不充分で、分布関数を調べることがキーポイントになる。前の簡単な現象論的な例(30)で言えば、ゆらぎを無視して分子場的に扱うと、

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle=\gamma\langle x\rangle-g\langle x\rangle^3 \tag{42}$$

となり、$t=0$で$\langle x\rangle=0$とおくと$\langle x\rangle\equiv 0$になってしまうが、前のスケーリング理論のようにゆらぎを充分入れて、分布関数$P(x,t)$の時間変化を調べれば、single peakからdouble peaksに変る時刻としてonset time t_0が定義され、秩序パラメタはdouble peaksの位置として決められる。

このように、我々の新しい観点は、対称性の破れが議論できるような分布関数を理論の中心にすえることにある。それには、Zubarev[6]やRobertson[4]等がやっているように、次のような変分的な分布関数(又はstatistical operator ないしdensity matrix) $P(t)$を考えると便利である：

$$P(t)=\exp\left(\sum_n\int d^3\mathbf{r}\,\lambda_n(\mathbf{r},t)F_n(\mathbf{r})\right) \tag{43}$$

但し、F_1はハミルトニアン$\mathcal{H}$であるとする。nを無限大までとって完備系を尽してしまえば、(43)は厳密解になる。普通は有限までしかとれないので、変分関数的な意味合いになる。

そこで、Onsager[7]、Prigogine等[8,9]のように変分原理を導入して、$P(t)$を近似的に決めることも出来るが、ここでは、もっと簡単な方法を用いる。得られる結果は、どちらでも全く同じになることが示せる。初期分布が$T=T_i$の温度で規定される平衡状態(38)にあるとする。$t=0$で急に$T=T_f$に変化させた場合の$P(t)$を考察する。ここでは巨視的秩序形

成の定性的理解で満足することにして第1近似の分布関数

$$P(t)=Z^{-1}(t)\exp\left(-\beta(t)\mathcal{H}\right)\ ;\ Z(t)=\mathrm{Tr}\, e^{-\beta(t)\mathcal{H}} \tag{44}$$

を採用する。すなわち、系の時間的変化は、系の"温度"の時間変化として記述される。これは、勿論、近似であって、系の本当の時間発展はこういう平衡分布という経路を通って進行するものでない。しかし、この現象の物理を定性的に理解するには充分役立つであろう。

さて、$\beta(t)$を決定するため、系のエネルギーの時間変化を支配する方程式を調べよう。

まず定義によって(37)より

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{H}\rangle_t=\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}\frac{d}{dt}P(t)=\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}\Gamma P(t). \tag{45}$$

これは、(44)の近似の範囲では、

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{H}\rangle_t=Z^{-1}(t)\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}\Gamma\exp\left(-\beta(t)\mathcal{H}\right) \tag{46}$$

となる。一方、(44)の近似では、

$$\langle\mathcal{H}\rangle_t=Z^{-1}(t)\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}\exp\left(-\beta(t)\mathcal{H}\right) \tag{47}$$

より、これをtで微分して、

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{H}\rangle_t = -\frac{d\beta(t)}{dt}\left\{\langle\mathcal{H}^2\rangle_t - \langle\mathcal{H}\rangle_t^2\right\} \tag{48}$$

となり、(46)と(48)を比較して、次のような$\beta(t)$に対する微分方程式が得られる：

$$\frac{d}{dt}\beta(t) = \frac{-Z^{-1}(t)\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}\Gamma\exp(-\beta(t)\mathcal{H})}{\langle(\mathcal{H}-\langle\mathcal{H}\rangle_t)^2\rangle_t}. \tag{49}$$

この方程式から$\beta(t)$が決定される。(49)の右辺の分母を$\hat{C}_v(\beta(t))$、分子を$F(\beta(t),\beta_f)$とおくと

$$\int_{\beta_i}^{\beta}\frac{\hat{C}_v(x)}{F(x,\beta_f)}dx = t. \tag{50}$$

明らかに、$F(\beta_f,\beta_f)=0$。従って$t\to\infty$で$\beta(t)$はβ_fに近づく。よって、$\beta_f>\beta_c$ ($T<T_c$)ならば、ある時刻t_0 (onset time)で$\beta(t_0)=\beta_c$となる。すなわち、有限のonset timeが存在することがわかる。そのt_0は

$$t_0 = \int_{\beta_i}^{\beta_c}\left[\hat{C}_v(x)/F(x,\beta_f)\right]dx \tag{51}$$

によって与えられる。$\hat{C}_v(\beta)$は比熱に比例しているので、critical slowing down の効果も説明出来る。

二次元 Ising model では厳密に$\hat{C}_v(\beta)$や$F(\beta,\beta_f)$が楕円関数を用いて表現出来るので、スピンが存在する場合としない場合について顕わにt_0や構造因子$S(k,t)$等を求めることが

出来る。

磁場も変化させた場合にも、同様に上の理論を拡張することが出来る。まず、第1近似の分布関数として、

$$P(t)=Z^{-1}(t)\exp\left(-\beta(t)\mathcal{H}-h(t)M\right) \tag{52}$$

を採用する。但し、$Z(t)$ は系の近似的状態和である：

$$Z(t)=\mathrm{Tr}\exp\left(-\beta(t)\mathcal{H}-h(t)M\right). \tag{53}$$

今度は、エネルギー $\langle\mathcal{H}\rangle_t$ と磁化 $\langle M\rangle_t$ の時間変化を支配する方程式を調べる。まず、前と同様、エネルギーについては

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{H}\rangle_t=Z^{-1}(t)\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}\Gamma\exp\left(-\beta(t)\mathcal{H}-h(t)M\right) \tag{54}$$

及び

$$\frac{d}{dt}\langle\mathcal{H}\rangle_t=-\frac{d\beta(t)}{dt}\left\langle\left(\mathcal{H}-\langle\mathcal{H}\rangle_t\right)^2\right\rangle-\frac{dh(t)}{dt}\left\langle\mathcal{H}\left(M-\langle M\rangle_t\right)\right\rangle_t. \tag{55}$$

磁化 $\langle M\rangle_t$ については

$$\frac{d}{dt}\langle M\rangle_t=Z^{-1}(t)\mathrm{Tr}\,M\Gamma\exp\left(-\beta(t)\mathcal{H}-h(t)M\right) \tag{56}$$

及び

$$\frac{d}{dt}\langle M\rangle_t=-\frac{dh(t)}{dt}\left\langle\left(M-\langle M\rangle_t\right)^2\right\rangle-\frac{d\beta(t)}{dt}\left\langle M\left(\mathcal{H}-\langle\mathcal{H}\rangle_t\right)\right\rangle_t \tag{57}$$

(54)と(55)を等置し、(56)と(57)を等置することによって、

$$
\begin{cases}
\hat{C}_v \dfrac{d\beta(t)}{dt} + \hat{C}\dfrac{dh(t)}{dt} = -\Delta E(t) \\
\hat{C}\dfrac{d\beta(t)}{dt} + \hat{\chi}\dfrac{dh(t)}{dt} = -\Delta M(t)
\end{cases}
\tag{58}
$$

が導かれる。但し、

$$
\hat{C}_v = \left\langle \left(\mathcal{H} - \langle \mathcal{H} \rangle_t\right)^2 \right\rangle_t ,
$$

$$
\hat{C} = \left\langle \mathcal{H}(M - \langle M \rangle_t) \right\rangle_t = \left\langle M(\mathcal{H} - \langle \mathcal{H} \rangle_t) \right\rangle_t ,
$$

$$
\hat{\chi} = \left\langle \left(M - \langle M \rangle_t\right)^2 \right\rangle
$$

$$
\Delta E(t) = Z^{-1}(t)\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{H}\Gamma \exp(-\beta(t)\mathcal{H} - h(t)M),
$$

$$
\Delta M(t) = Z^{-1}(t)\,\mathrm{Tr}\,M\Gamma \exp(-\beta(t)\mathcal{H} - h(t)M). \tag{59}
$$

従って、(58)を$d\beta(t)/dt$と$dh(t)/dt$に関して解いて、

$$
\frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{\hat{C}\Delta M(t) - \hat{\chi}\Delta E(t)}{\Delta(t)}, \quad \frac{dh(t)}{dt} = \frac{\hat{C}\Delta E(t) - \hat{C}_v \Delta M(t)}{\Delta(t)}. \tag{60}
$$

但し、$\Delta(t) = \hat{C}_v\hat{\chi} - \hat{C}^2$である。こうして、$\beta(t)$と$h(t)$が決定され、系の時間変化が定性的に理解出来る。もし、Γが

スピンを保存する演算子の場合には、$\Delta M(t)\equiv 0$ となり、(60)はもっと簡単になる。しかし、$h(t)$ は時間変化を起すことに注意しなければならない。

以上の取り扱い方を具体的にGlauber模型やスピノーダル分解に適用する仕事は、別の機会に発表する予定である。[10),11)]

謝辞　久保亮五先生に有益な議論をして頂きましたことを感謝致します。

参考文献

1) M. Suzuki, Phys. Lett. 67A (1978) 339; Prog. Theor. Phys. 56 (1976) 77, 477, 380; ibid supplement 64 (1978); J. Stat. Phys. 16 (1977) 11, 477.

2) M. Suzuki, Synergetics: Far from Equilibrium, ed. A. Pacault and C. Vidal, Springer-Verlag 1979,
及び、第17回ソルベイ会議のプロシーディングス。

3) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. 9 (1973) 51.

4) B. Robertson, Phys. Rev. 144 (1966) 151; The Maximum Entropy Formalism, eds. R.D. Levine and M. Tribus, The MIT Press, Cambridge, 1978.

5) K. Kawasaki and J.D. Gunton, Phys. Rev. A8 (1973) 2048.

6) Zubarev,「非平衡熱統計力学」久保亮五 監訳、丸善 1978.

7) L. Onsager and S. Machlup, Phys. Rev. 91 (1953) 1505.

8) P. Glansdorff and I. Prigogine, Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations (Wiley, New York, 1971). Physica 30 (1964) 351.

9) H. Hasegawa, Prog. Theor. Phys. 58 (1977) 128.

10) M. Suzuki, Phys. Lett.

11) M. Suzuki, J. Stat. Phys.