数理解析研究所講究録
第 367 巻 1979 年 153-162



# 二状態雑音の非線型系に対する影響

東大 理　　北原 和夫[(*)]
稲葉 豊
(*) 現在は 静岡大学 教養

不安定現象を示す非線型系が外部パラメーターの揺ぎによってどのように影響されるかについて，揺ぎが白色雑音でガウス過程の場合には，伊藤或いは Stratonovich の方法で，Fokker-Planck 方程式を導き，定常状態の確率分布を求めることができる。雑音の振幅を上げてゆくと，確率分布の形が急に変わり，一種の相転移現象が起こることが知られている[(1)]。

揺ぎが白色雑音でない場合，即ち，揺ぎがある有限な相関時間 $\tau_c$ を持っている場合，一般的な定常分布を求めることは困難であるが，揺ぎが二状態雑音の場合は，揺ぎの任意の振幅及び任意の相関時間に対して，定常分布を解析することができる[(2)]。

先ず，次の様な非線型微分方程式を考えよう，

$$\dot{x}(t) = F(\alpha(t),\ x(t)). \qquad (1)$$

ここで，$F(\alpha, x)$ は $\alpha$ と $x$ の任意の関数で，$\alpha(t)$ は揺いでいる外部パラメーターである。$\alpha(t)$ は，

$$\alpha(t) = a \quad \text{or} \quad b \tag{2}$$

の２つの値のみをとるものとし，値 $a$，$b$ をとる確率 $P_a(t)$，$P_b(t)$ は，次のような Markov 過程に従うものとする，

$$\begin{cases} \dot{P}_a(t) = -\dfrac{\gamma}{2}\left[P_a(t) - P_b(t)\right] \\ \dot{P}_b(t) = -\dfrac{\gamma}{2}\left[P_b(t) - P_a(t)\right]. \end{cases} \tag{3}$$

この時，時刻 $t$ に，$x(t) = x$，$\alpha(t) = a$ or $b$ となる確率 $P_a(x,t)$，$P_b(x,t)$ は，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} P_a(x,t) = -\dfrac{\partial}{\partial x} F(a,x) P_a(x,t) - \dfrac{\gamma}{2}\left[P_a(x,t) - P_b(x,t)\right] \\ \dfrac{\partial}{\partial t} P_b(x,t) = -\dfrac{\partial}{\partial x} F(b,x) P_b(x,t) - \dfrac{\gamma}{2}\left[P_b(x,t) - P_a(x,t)\right] \end{cases} \tag{4}$$

を満たす。定義から明らかなように，時刻 $t$ に $x(t) = x$ となる確率 $P(x,t)$ は

$$P(x,t) = P_a(x,t) + P_b(x,t) \tag{5}$$

より求められる。式（４）は $P(x,t)$ と，

$$Q(x,t) \equiv P_a(x,t) - P_b(x,t) \tag{6}$$

に対する方程式の形に書換えることができる。そして，自然な境界条件

$$\lim_{t\to-\infty} Q(x,t) = 0 \tag{7}$$

を仮定すれば，$P(x,t)$ について閉じた方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\tilde{f}(x)\, P(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{g}(x)\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-\left[\gamma + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{f}(x)\right](t-t')} \times \frac{\partial}{\partial x}\tilde{g}(x)\, P(x,t') \tag{8}$$

が得られる。ここで，

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\{F(a,x) + F(b,x)\} \tag{9}$$

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{2}\{F(a,x) - F(b,x)\}. \tag{10}$$

式（8）に定常分布 $P(x,t) = P_{st}(x)$ を代入すると，

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x}\tilde{f}(x)\, P_{st}(x) + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{g}(x)\frac{1}{\gamma + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{f}(x)}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{g}(x)\, P_{st}(x) \tag{11}$$

が得られる。$x$ の大きいところで $P_{st}(x)$ 及びその微分が 0 になることを仮定すれば，$\frac{\partial}{\partial x}$ を落とすことができ，

$$\tilde{f}(x)\, P_{st}(x) = \tilde{g}(x)\frac{1}{\gamma + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{f}(x)}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{g}(x)\, P_{st}(x) \tag{12}$$

となり，これは $P_{st}(x)$ に対する1階の常微分方程式

$$\left[\gamma + \frac{\partial}{\partial x}\tilde{f}(x)\right]\left(\tilde{f}(x)/\tilde{g}(x)\right)\cdot P_{st}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\tilde{g}(x)\, P_{st}(x) \tag{13}$$

になる。この解は簡単に求められ，

$$P_{st}(x)=\mathcal{N}\frac{\tilde{g}(x)}{[\tilde{g}(x)]^2-[\tilde{f}(x)]^2}$$
$$\times\exp\left[\gamma\int^x dx'\frac{\tilde{f}(x')}{[\tilde{g}(x')]^2-[\tilde{f}(x')]^2}\right] \tag{14}$$

となる。もっと便利な公式は，

$$P_{st}(x)=\mathcal{N}\left\{\frac{1}{F(a,x)}-\frac{1}{F(b,x)}\right\}$$
$$\times\exp\left[-\frac{\gamma}{2}\int^x dx'\left\{\frac{1}{F(a,x')}+\frac{1}{F(b,x')}\right\}\right] \tag{15}$$

である。上の公式から明らかなように，$F(a,x)=0$ 或いは $F(b,x)=0$ となる点は，$P_{st}(x)$ の特異点になっている。それぞれを $x_a$，$x_b$ と置こう。即ち，$F(a,x_a)=0$，$F(b,x_b)=0$。 定常分布 $P_{st}(x)$ は，$x=x_\alpha\ (\alpha=a,b)$ で次のように振舞う；

（ i ） $\frac{\gamma}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha,x_\alpha)\right]^{-1}+1>0$ の時，無限大に発散する。

（ ii ） $-1<\frac{\gamma}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha,x_\alpha)\right]^{-1}+1<0$ の時，$P_{st}(x_\alpha)$ は 0 になるが，傾きは無限大である。

（ iii ） $\frac{\gamma}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha,x_\alpha)\right]^{-1}+1<-1$ の時，$P_{st}(x_\alpha)=0$ で，傾きも 0 となる。

$x_\alpha$ （$\alpha=a,b$）が安定な定常状態ならば，$\frac{\partial F}{\partial x}(\alpha,x_\alpha)<0$

であるから，上記の（i）〜（iii）は，$\gamma$ の増大に対して（つまり相関時間の減少に対して），安定定常状態の確率が減少することを意味する。

公式（15）より，定常分布 $P_{st}(x)$ の極値は，

$$\gamma = \frac{2}{[F(a,x)]^2 - [F(b,x)]^2} \times \left\{ -[F(a,x)]^2 \frac{\partial F}{\partial x}(b,x) + [F(b,x)]^2 \frac{\partial F}{\partial x}(a,x) \right\} \qquad (16)$$

を解くことによって得られる。

以下応用例を挙げる。

（I）Verhulst の人口模型[3] 増殖率 $\alpha(t)$ が揺いでいる人口模型

$$\dot{x}(t) = \alpha(t)\, x(t) - [x(t)]^2 \qquad (17)$$

を考える。

$$\alpha(t) = \lambda + I(t), \qquad (18)$$

$$I(t) = \Delta \text{ or } -\Delta \qquad (19)$$

とし，揺ぎの相関関数を

$$\langle I(t) I(t') \rangle = \Delta^2 e^{-\gamma |t-t'|} \qquad (20)$$

とする。公式（14）或いは（15）を用いると，$x$ の定常分布は，

$$P_{st}(x) = N x^{\frac{\gamma\lambda}{\Delta^2-\lambda^2}-1} \left| x+\Delta-\lambda \right|^{-\frac{\gamma}{2(\Delta-\lambda)}-1}$$
$$\times \left| x-\Delta-\lambda \right|^{\frac{\gamma}{2(\Delta+\lambda)}-1} \qquad (21)$$

［ $\lambda-\Delta \leq x \leq \lambda+\Delta$ に対して ］

$P_{st}(x) = 0$　　［ $x < \lambda-\Delta$ 及び　$x > \lambda+\Delta$ ］.

この確率分布は，$\Delta$ と $\gamma$ の値によって定性的に全く異なる振舞をする。［図1を参照］

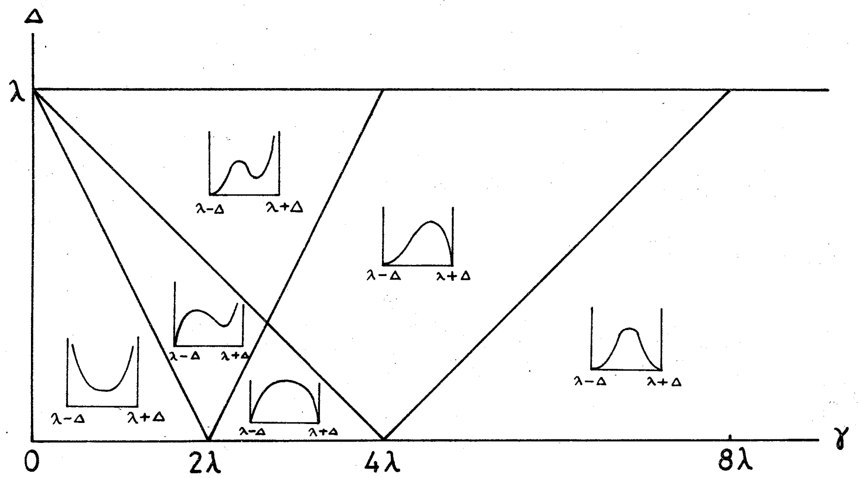


図1. 揺いでいる Verhulst 模型に対する定常確率分布 $P_{st}(x)$ の形

(Ⅱ) がん細胞増殖の模型[(4)] Lefever と Garay によって提唱された増殖の模型は，

$$\dot{x} = \alpha + (1-\theta x)x - \beta x/(1+x). \qquad (22)$$

$\beta$はがん細胞の増殖能力を抑制する細胞の濃度を表わす。この外部パラメーターを二準位雑音としよう。即ち，

$$\beta(t) = \beta_0 + I(t) \tag{23}$$

とし $I(t)$ の相関関数は式（20）の如く与えられるものとする。この系の定常分布は図2のようになる。

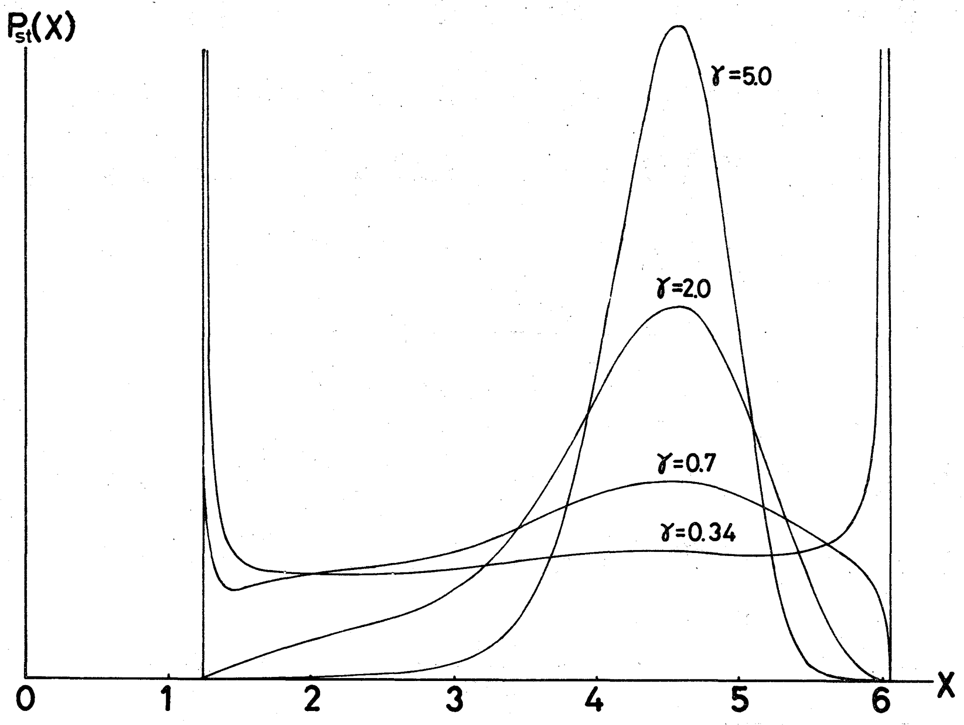


図2. 揺いでいる Lefever - Garay 模型；

$$\dot{x} = \alpha + (1-\theta x)x - [\beta_0 + I(t)]x/(1+x).$$

$$\langle I(t)I(t')\rangle = \Delta^2 e^{-\gamma|t-t'|}. \quad \alpha = 2.4,$$

$$\beta = 5.95, \quad \Delta = 0.35.$$

(Ⅲ) 光を照射した化学反応[5] Nitzan と Ross によって提唱された模型は次の２つの方程式からなる。

$$\begin{cases} \dot{A} = -(k_1+k_2)A + k_2 a \\ \dot{T} = \alpha A - \beta(T-T_e) + \lambda \dot{A} \end{cases} \tag{24}$$

最初の式は，光を吸収する化学物質Aの濃度に対するものであり，二番目は，温度の時間変化を表わし，光の吸収による熱の発生の項 $\alpha A$，外界（温度 $T_e$）への熱の放出の項 $-\beta(T-T_e)$，及び化学反応による熱の発生（吸収）の項 $\lambda\dot{A}$ からなる。温度変化よりも化学反応の方が急速に進行するとすれば，$\dot{A} \simeq 0$ とおくことができて，

$$\dot{T} = \frac{\alpha a}{\frac{k_1}{k_2}+1} - \beta(T-T_e) \tag{25}$$

を得る。ただし，$k_1/k_2 = \kappa e^{\Delta R/T}$ であるから，式(25)は $T$ について非線型である。適当に変数をスケールすると

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{\kappa e^{\Delta r/x}+1} - (x-x_e) \tag{26}$$

という形になる。光を照射している時は $\alpha \neq 0$，照射していない時は $\alpha = 0$ である。今，$\alpha(t) = 1$ or $0$ という二準位雑音と考え，その影響を調べてみると図３のような温度の確率分布が得られる。

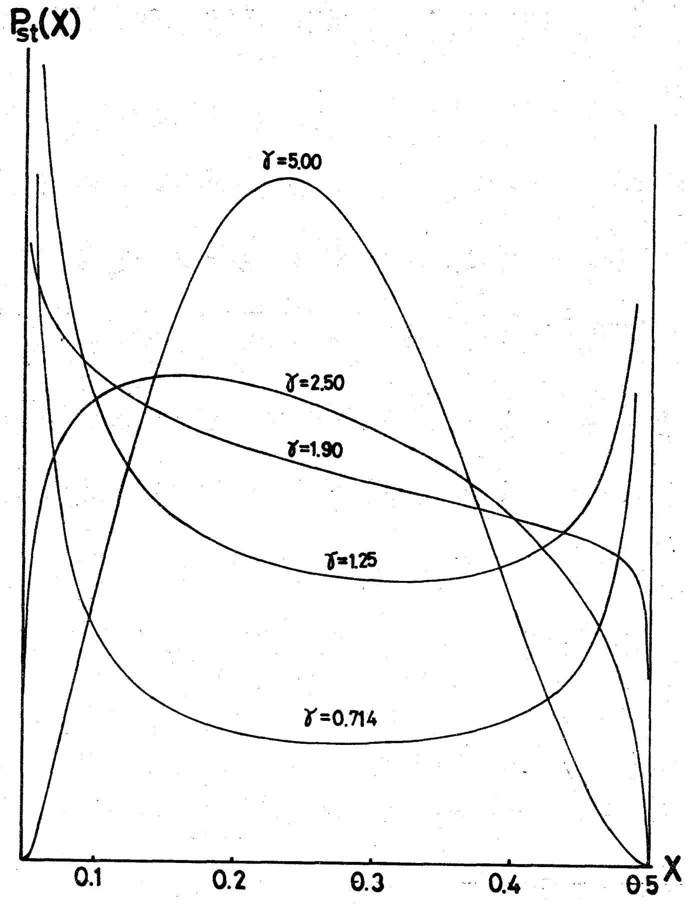


図3. 乱雑に光照射した化学反応の模型

$$\dot{x} = \alpha(t) / [\kappa e^{\Delta r/x} + 1] - (x - x_e)$$

に対する定常確率分布。 $\alpha(t) = 1$ or $0$ で相関時間は $\gamma^{-1}$ 。 $\kappa = 1.0$ , $\Delta r = 0.1$ , $x_e = 0.05$ 。

以上、3つの例からも判るように、揺ぎの振幅 $\Delta^2$ を一定にしても、相関時間を変えることにより、全く定性的に異な

る定常確率分布を得る。一種の相転移とみなすこともできようが，系の変数 $x(t)$ について，$\langle x(t)\,x(t')\rangle$ などにどのような異常が出るか，などについて未だ不明である。

一変数の系に対する摂動が二準位雑音の場合，白色でない効果を調べることができた訳であるが，これをそのまま，多準位雑音に拡張すること（詳細釣合いの成立たない雑音も含まれる！），及び，多変数で記述される系（振動系，混沌系）へ拡張することは不可能である。

引用文献


（1） L. Arnold, W. Horsthemke and R. Lefever, Z. Physik B29 367 (1978).

（2） K. Kitahara, W. Horsthemke and R. Lefever, Phys. Lett. to appear (1979).

（3） 例えば，F. Schlögl, Z. Physik 253 147 (1972).

（4） R.P. Garay and R. Lefever, J. Theor. Biol. 73 417 (1978).

（5） A. Nitzan and J. Ross, J. Chem. Phys. 59 241 (1973).