数理解析研究所講究録
第 367 巻 1979 年 248-267

「情報量」の特徴付け―Brillouin の Negentropy 原理の観点から―

京大 理 中込照明

この論文は一つの中心的主張《ある物理系の状態が何らかの可測空間$(\Omega,\mathcal{B})$上の確率測度pで表わされ，その系についての測定結果が事象$A\in\mathcal{B}$で表わされるという設定のもとで，状態pにおいて測定結果Aを得たときに測定者の受取る情報量$I(A|p)$として幾つかの自然な条件を満すものを考えると，その形が一意的に Brillouin の 'negentropy principle of information' に対応する形，即ち

$$I(A|p)=S(p)-S(p_A),\quad S(p)\equiv -k\int dp\log\frac{dp}{d\mu}\qquad(k>0)$$

に決ってしまう》とそれに関連する諸々の議論とから成立っている。

§1. 序

孤立系の振る舞いは一般に系の Hamiltonian から導かれる Liouvillean $\mathcal{L}$ を使って $\dot{\rho}=\mathcal{L}\rho$ の形の発展方程式で与えら

れる。ところが開放系の場合には，このような発展方程式による記述は，特殊な場合例えば一定不変の熱浴と弱く結びついている系［cf. 1,27,2］などを除いて，一般にはできない。systemについての情報を完全に含んだHamiltonian 乃至それに相当するものを考えることは開放系の場合一般には不可能である。そこで情報量の出入りの問題が開放系を記述する際の重要な側面の一つになると考えられる。「情報量」についてはShannon［3］，Wiener［4］以来様々に議論され［5-20］*) またSzilard，Brillouin 等［21-28］による物理的側面からの議論もなされ，種々の定義や特徴付けが行われてきたが，未だ物理量としての正統な位置は与えられていないようである。この原因の一つとしてはentropy，情報量，不確定性の尺度（uncertainty）といった言葉の乱用が挙げられるであろう。この論文においては，Brillouin の'negentropy principle of information'を一般化する形での情報量及びentropyの特徴付けの一つの試みを提出するのであるが，それは以上の言葉の明瞭な区別を与えるものであり，今後情報量の出入りの問題を考える際の有用な拠所を与えるものになると信ずる。

---

*) ［5-8］は離散型情報量の場合，［9-15］は連続型或は一般型，［16-19］は非確率型であり，［7, 8, 20］には詳しい文献がある。

まずBrillouinの'negentropy……'(以下Brillouinの原理と言う)の説明から始めて，以下この論文の問題としている事の概略を述べよう。Brillouin[23]はmicrocanonical ensembleであらわされるsystemの状態を考え，ensembleを構成しているP_0個の可能な微視的状態の個数をP_1個に減らすのに必要な情報量を$I=-k\log(P_1/P_0)$で定義し，各状態のentropyをBoltzmannの定義$S=k\log P$で与えることによって，

$$S_1=S_0-I \tag{1-1}$$

の関係を得て，情報は負のentropy(即ちnegentropy)として働くという原理を立てた。

そこで筆者は二つの問題を考えた。一つはこのBrillouinの原理を情報量とentropyの間の基本的関係であると見なし，これに更に何らかの自然な条件を付け加えて，逆にそれらから情報量やentropyの持つべき一般的形が規定できないかということであり，もう一つは情報量だけの一般的性質から，このBrillouinの原理に相当するものが導けないかということである。

第一の問題については，まず状態をBrillouinの考えたmicrocanonicalなものから一般の可測空間$(\Omega,\mathcal{B})$上の確率測度pで与えられるものに一般化し，一つの測定結果は事象$A(\in\mathcal{B})$

で与えられるという設定を考え，各状態pに対して entropy $S(p)$が定義され，状態pのもとで測定結果Aを得たとき測定者は情報量$I(A|p)$を受取るものとして，式(1-1)を次のように書いた。

$$\text{(a)} \quad S(p_A) = S(p) - I(A|p) \quad \text{ただし } p_A(\cdot) \equiv p(A\cap\cdot)/p(A)$$

これに更に，(b)平均情報量の普遍性の条件と，(c)ある種の連続性の仮定を置いた。条件(b)は，$0 \leqq t \leqq 1$で定義され少なくとも一点で正となる実数値函数$f(t)$が存在して，任意の(A, p)に対して

$$I(A|p)p(A) + I(A^c|p)p(A^c) = f(p(A))$$

が成立つというものである。これらの仮定を置くと，§2に示すごとく，$S(p)$の形は

$$S(p) = -k\int dp \log \frac{dp}{d\mu} \qquad k > 0$$

に決まり，したがって$I(A|p)$も(a)によって決ってしまう。このS(p)はいわゆる一般化された Boltzmann-Shannon-Gibbs entropy 或はBGS-entropy [29, 30]と呼ばれるもので，一般的な entropy の表式としてよく使われるものである。以上が第一の問題に対する一つの答えである。

第二の問題については，$I(A|p)$ の基本的性質として次の四つ：(d)連続する測定についての加法性，

$$I(A|p_B)+I(B|p)=I(A\cap B|p) \quad \text{if } p(A\cap B)\neq 0$$

(e)局所性，もし $p_A=p_A'$，$p_B=p_B'$ なら

$$I(A|p)-I(A|p')=I(B|p)-I(B|p')$$

(f)平均情報量の普遍性（これは(b)と同じ），及び(g)ある種の連続性の仮定，を置いた。すると§2に示すように，これらから条件(a)を満すようなSの存在がわかり，第一の公理系(a)(b)(c)と第二の公理系(d)(e)(f)(g)とが同等であることが導かれる。以上が第二の問題に対する答えである。

次に以上の公理群の意味を考えてみよう。

(a)(d)(e)の意味：情報量や entropy は system の「状態」に対して定義されるのであるから，これらの公理の意味をはっきりさせるには，まず「状態」概念の意味するものを認識しておかねばならない。Giles [31]によれば，《物理の理論の目的は system の振る舞いを予測することであり，一つの理論は予測のための一連の規則の集りより成立っている。「状態」はこのような理論の中で予測の根拠を与えるという機能を果している。そして予測は system についての情報に基づいて行わ

れるのだから，結局「状態」とは systemについての情報の総体にほかならない〉ということになる。更に，〈その情報は systemを一定の仕方で準備したことによって得られるのだから，「状態」は具体的には一つの'method of preparation'に対応させられるが，可能なすべての測定について同一の予測をなしうる二つの'method of preparation'は「状態」の機能としては同等だから，同一視されるべきである。したがって，一つの「状態」はこの同一視による'method of preparation'の一つの類に対応させられる〉ことになる。そこでもし予測が，可能な結果に対する確率分布で与えられるとし，また微視的状態というものを仮定するなら，この'method of preparation'の類はその予測についての機能の面からは微視的状態の上の確率分布で特徴付けられることになる。確率測度 p によって表われれる状態というものを，Ωを微視的状態の全体と見なして，上述のように解釈するならば，その状態 p が意味する情報の総量を計る尺度 $N(p)$ が存在すると仮定することは自然であり，また測定によって結果 $A(\in\mathcal{B})$ を得れば状態が p から p_A に変化することも容易に納得できる。更にこの時，情報量は $I(A|p)$ だけ増えるわけだから，$N(p_A)=N(p)+I(A|p)$ を得る。すると，条件(d)と(e)は直ちに導くことができる。またentropy S を $S(p)\equiv -N(p)$ で定義すれば，上式は(a)

そのものになる。逆に条件(a)はentropyという量がsystemについての知識の水準を示す尺度に負符号をつけたものであることを規定する条件であると言ってもよい。このとき，Nはnegentropyと呼ばれる量になる。このようにGiles流の状態解釈のもとにentropyを上述のように規定するならentropy増大則は当然のものとなる。即ち「ある一定の方法で準備したsystemをその後何もせずにほうっておく」という'method of preparation'に対して情報量は減ることはあっても増えることはないということを述べているに過ぎないからである。（もっとも，熱力学的entropyが上述の規定に簡単に納まるかどうかは問題であるが。）

<u>(b)の意味</u>：この条件(b)は同一の測定を多数行って得られる情報量の平均値は，測定結果の予測に含まれる不確定性を計る尺度（uncertainty）として使いうるということを，可能な測定結果が二つしかない場合に述べたものである。情報量をuncertaintyに結びつける考えはよく使われる考え方であるが[5]，必ずしも自然なものとは言えない。uncertaintyという量は確率分布$p(A_1),\dots,p(A_n)$（$A_1,\dots,A_n$は可能な結果の全体）で与えられた予測に対して定義される量$U(p(A_1),\dots,p(A_n))$であるから，平均の情報量$\sum_i p(A_i)\, I(A_i|p)$がUとして使えるためには少なくともそれは$p(A_1),\dots,p(A_n)$だけの函数とならね

ばならない。またUはその意味からして，非負であって，また恒等的に0であってはならない。残念ながら，これらの条件を平均情報量の性質として要求しうる十分に自然な論理を筆者はまだ持ち合せていない。そこでこの要求を可能なかぎり弱めて(b)のような形で述べた。(a)と組み合せれば，以上の要求はすべてみたされ，また$U(p_1, \ldots, p_m)$の形もShannonの与えたものに決まる。(§2－定理1)

以下§2では公理系と定理の数学的定式化が述べられ§3ではその結果にもとづいた諸々の議論がなされる。

§2．数学的定式化

2-1．記号及び定義

(i) 集合：$(\Omega, \mathcal{B})$を一つの可測空間とし，その上に定義される凡ての(正の)σ-有限測度の全体を$M(\Omega, \mathcal{B})$と置き，このうち特に確率測度(即ち$p(\Omega)=1$となる測度p)の全体を$V(\Omega, \mathcal{B})$と書く。各$\mu \in M(\Omega, \mathcal{B})$に対して，次の二つの集合を定義する。

$$V(\mu) = \{ \mu \in V(\Omega, \mathcal{B})\,;\ p \ll \mu \}$$

$$V_0(\mu) = \{ p \in V(\mu)\,;\ \frac{dp}{d\mu} \text{ は階段函数である} \}$$

ここに$p \ll \mu$はpがμについて絶対連続であることを示し，$\frac{dp}{d\mu}$はRadon-Nikodymの密度である。また階段函数とは有限個の特性函数1_A $(A \in \mathcal{B})$の一次結合で表わされる函数のこ

とである。

(ii) 収束：列 $\mu_n \in M(\Omega, \mathcal{B})$ $(n=1,2,\ldots)$ 及び $\mu \in M(\Omega,\mathcal{B})$ に対して $\mu \ll \nu$, $\mu_n \ll \nu$ $(n=1,2,\ldots)$ となる任意の $\nu \in M(\Omega,\mathcal{B})$ に対して $\frac{d\mu_n}{d\nu} \longrightarrow \frac{d\mu}{d\nu}$ ν-a.e. $(n\to\infty)$ となるとき $\mu_n \xrightarrow{D} \mu$ $(n\to\infty)$ と書く。この定義においては，任意の ν をある ν に変えても同じである。

(iii) その他：(1) $A \in \mathcal{B}$ $p \in V(\Omega,\mathcal{B})$ に対して $p(A)\neq 0$ のとき，条件付確率 $p_A \in V(\Omega,\mathcal{B})$ が $p_A(B) = p(A\cap B)/p(A)$ $(\forall B \in \mathcal{B})$ で定義される。(2) $\mathcal{B}$ の部分集合 $\{A_1,\ldots,A_n\}$ が $A_i \cap A_j = \phi$ $(i\neq j)$ $\bigcup_i A_i = \Omega$ となるとき，それを Ω の $(n-)$ 分割と呼ぶ。

2−2．情報空間の定義

$V(\Omega,\mathcal{B})$ の部分集合 $\mathcal{P}$ が次の三つの条件をみたすとせよ。

(i) $p \in \mathcal{P}$ $A \in \mathcal{B}$ $p(A)\neq 0$ なら $p_A \in \mathcal{P}$

(ii) $\exists \lambda \in \mathcal{P}$ s.t. $V_0(\lambda) \subset \mathcal{P} \subset V(\lambda)$

(iii) $\exists p \in \mathcal{P}$ $\exists \{A_1, A_2, A_3\}$ (Ω の 3−分割) s.t. $p(A_i)\neq 0$ $(i=1,2,3)$

このとき組 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ を情報可測空間と呼び，(ii) に出てくる λ を $\mathcal{P}$ の基本元と呼ぶ。

注：$\mathcal{P}$ が二つの基本元 λ, λ' をもつなら，それらは互に絶対対連続である。

次に写像 I： $\mathcal{B}\times\mathcal{P} \to \mathcal{R}$ (the real line) ($(A,p) \longmapsto I(A|p)$) が以下の四つの公理を満すとする。このとき，I を情報量と

呼び，組 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P}, I)$ を情報空間と呼ぶ。

公理 A-1.（連続性）(a) $p_n, p, q \in \mathcal{P}$　$\alpha > 0$　$p_n < p + \alpha q$　$p_n \xrightarrow{D} p\ (n \to \infty)$ ならば　$p_n(A) I(A|p_n) \longrightarrow p(A) I(A|p)\ (n \to \infty)$　$\forall A \in \mathcal{B}$。

(b) $A_n, A \in \mathcal{B}$　$p \in \mathcal{P}$　$p(A_n \triangle A) \to 0\ (n \to \infty)$ ならば

$p(A_n) I(A_n|p) \longrightarrow p(A) I(A|p)$，ただし $A \triangle B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$。

公理 A-2.（継続測定に対する加法性）

$p(A \cap B) \neq 0$ のとき，$I(B|p_A) + I(A|p) = I(A \cap B|p)$

公理 A-3.（局所性）　二つの確率測度 $p, p' \in \mathcal{P}$ 及び $A, B \in \mathcal{B}$ に対して，$p_A = p'_A$，$p_B = p'_B$ ならば

$I(A|p) - I(A|p') = I(B|p) - I(B|p')$。

公理 A-4.（平均情報量の普遍性）$0 \leqq t \leqq 1$ で定義された，少なくとも一点で正となる実数値函数 $f(t)$ が存在して，

$p(A) I(A|p) + p(A^c) I(A^c|p) = f(p(A))$　$\forall A \in \mathcal{B}$　$\forall p \in \mathcal{P}$。

定義．Ω の分割 $\{A_1, \ldots, A_n\}$ 及び $p \in \mathcal{P}$ に対する平均情報量 J を次に定義する。

$$J(\{A_1, \ldots, A_n\}|p) \equiv \sum_{i=1}^{n} p(A_i) I(A_i|p) \quad 。$$

2-3．基本定理

定理 1．情報空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P}, I)$ に対して正の定数 k が一意的に存在して，平均情報量は常に次の形に表わされる。

$$J(\{A_1, \ldots, A_n\}|p) = -k \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \log p(A_i) \qquad (2\text{-}1)$$

定理2. 情報空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P}, I)$ に対して，正の定数 k が一意的に存在し，また $\mathcal{P}$ の基本元 λ と互に絶対連続な σ-有限測度 μ が正の定数倍を除いて一意的に存在して，情報量 I は次のように書かれる。

$$I(A|p) = -k\int dp \log\frac{dp}{d\mu} + k\int dp_A \log\frac{dp}{d\mu} \quad \text{if } p(A) \neq 0 \quad (2\text{-}2)$$

逆に，σ-有限測度空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 及び正の定数 k が与えられれば，$(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P}_\mu, I_{\mu,k})$ は情報空間になる。ただし，

$$\mathcal{P}_\mu = \{\, p \in V(\mu) \ ; \ \int dp \left|\log\frac{dp}{d\mu}\right| < \infty \,\}$$

であり，$I_{\mu,k}$ は $p(A) \neq 0$ なる (A, p) に対しては式 (2-2) で，それ以外の (A, p) に対してはかってな実数値を与えて定義される $\mathcal{B} \times \mathcal{P}_\mu$ 上の実数値函数である。

注. (1) 定理1に出てくる k と定理2に出てくる k とは一致する。(2) かってな情報空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P}, I)$ に対して，上の定理2で決まる μ と k とを取れば $I_{\mu,k}$ は I の拡張になり，この情報空間は $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P}_\mu, I_{\mu,k})$ まで拡張される。

定理3. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ を情報可測空間とする。I を $\mathcal{B} \times \mathcal{P} \to R$ なる写像とすると，$(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P}, I)$ が情報空間になることと，次の三つの公理 B-1, B-2, B-3 を満す写像 $S : \mathcal{P} \to R$ が存在することとは同値である。

公理 B-1. (連続性) (a) $p_n, p, q \in \mathcal{P}$, $\alpha > 0$, $p_n < p + \alpha q$, $p_n \xrightarrow{D} p \ (n \to \infty)$

ならば $p_n(A)S(p_{nA}) \to p(A)S(p_A)$ $(n\to\infty)$ $\forall A\in\mathcal{B}$。

(b) $A_n, A\in\mathcal{B}$ $p\in\mathcal{P}$ $p(A_n \triangle A)\to 0$ $(n\to\infty)$ ならば

$p(A_n)S(p_{A_n}) \to p(A)S(p_A)$ $(n\to\infty)$。

ただし，$p(A)=0$ のときは常に $p(A)S(p_A)=0$ と置く。

公理 B-2.（Brillouin の原理）

$$I(A|p) = S(p) - S(p_A) \quad \text{if } p(A)\neq 0$$

公理 B-3. 公理 A-4 に同じ。

系. 情報可測空間 $(\Omega,\mathcal{B},\mathcal{P})$ と二つの写像 $I:\mathcal{B}\times\mathcal{P}\to R$, $S:\mathcal{P}\to R$ とからなる組が公理 B-1, B-2, B-3 を満すなら，それに対して，正の定数 k が一意的に決まり，また $\mathcal{P}$ の基本元 λ に互に絶対連続な σ-有限測度 μ が正の定数倍を除いて一意的に決まって，entropy S は次のように表わされる。

$$S(p) = -k\int dp \log\frac{dp}{d\mu} \qquad \forall p\in\mathcal{P} \qquad (2-3)$$

逆に，σ-有限測度空間 $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ 及び正の定数 k が与えられるならば，$(\Omega,\mathcal{B},\mathcal{P}_\mu)$ 及び $I_{\mu,k}$, $S_{\mu,k}$ の組は公理 B-1, B-2 B-3 を満す。ここに $\mathcal{P}_\mu$, $I_{\mu,k}$ は定理 2 におけるものと同じであり，$S_{\mu,k}$ は式 (2-3) で定義される。

証明の概略. まず平均情報量 $J(\{A_1,\cdots,A_n\}|p)$ が $p(A_1),\ldots,p(A_n)$ だけの函数 $H(p(A_1),\ldots,p(A_n))$ であることを示し，そして，その函数 H が Faddeev の与えた公理 [6, 32, 20] を凡て満すこと

を示す。それによって，Hの形がShannonの与えた情報量の形に決まることになり定理1が証明される。次に写像Φ_p：$\mathcal{B}\to\mathbb{R}$を各$p\in\mathcal{P}$に対して，

$$\Phi_p(A)\equiv p(A)I(A|p)+kp(A)\log p(A)$$

によって定義する。kは定理1で出て来たものである。この写像Φ_pが$\mathcal{B}$上のσ-加法的な有限集合函数であることが分かり，Radon-Nikodymの密度$\frac{d\Phi_p}{dp}$が定義される。そして，これが$\mathcal{P}$の基本元λに対して，

$$\frac{d\Phi_p}{dp}-k\frac{d\Phi_\lambda}{d\lambda}-\log\frac{dp}{d\lambda}=C_{p,\lambda}\quad p\text{-a.e.}$$

を満すことを示す。ここに$C_{p,\lambda}$はΩ上の定数函数。そこで，

$$\mu(A)\equiv\int_A\exp\left(-\frac{1}{k}\frac{d\Phi_\lambda}{d\lambda}\right)d\lambda\qquad A\in\mathcal{B}$$

を定義すると，これが条件を満すσ有限測度であることが分かるのである。このようにして定理2が示され，続いて定理3も系も直ちに示される。詳しくは[37]参照のこと。

§3. μの性質とその物理的意，その他

以下は§2の議論から導ける事柄発展させられる事柄を，かなり雑然と，それほど論理的厳密さを求めることなく書き並べたものである。

3-1. μの意味. 情報空間$(\Omega,\mathcal{B},\mathcal{P},I)$に対して，定理2に

よって定まる σ-有限測度 μ 及び正の定数 k を取る。このとき $\mu(\Omega)<\infty$ であって，$\tilde{\mu}\equiv\mu/\mu(\Omega)\in\mathcal{P}$ ならば $p\in\mathcal{P}$ に対する以下の四つの条件は同等である。（注．$\mu(\Omega)<\infty$ ならば $\tilde{\mu}\in\mathcal{P}_{\mu}$ となるから，$\tilde{\mu}\notin\mathcal{P}$ のときは $(\Omega,\mathcal{B},\mathcal{P}_{\mu,k}\,I_{\mu,k})$ に拡張して考えれば，ここの議論は使える。）

(a) $p=\tilde{\mu}$

(b) $\max_{p'\in\mathcal{P}} S(p')=S(p)$

(c) $p(A)=\exp\{\frac{1}{k}(S(p_A)-S(p))\}$ if $p(A)\neq 0$

(d) $I(A|p)=-k\log p(A)$

（証明略す。[37] 参照。）

このことから $\tilde{\mu}$ は entropy 最大の原理を満す状態に対応することがわかり，したがって熱力学的な平衡状態を意味するものであると解釈される。そこで，(c) の関係は，平衡状態におけるゆらぎと entropy の関係を与える Einstein の関係式 [33] であると見なせる。また (d) は一つの事象 A に対する情報量の普通の定義 [34, 35] であるが，上に述べた定理は，この関係が成立つのは平衡状態の場合即ち $p=\tilde{\mu}$ の場合だけであると言っているのである。非平衡状態においては，Einstein の関係も一つの事象についての普通の情報量の定義も成り立たないことが，ここでの情報量－entropy の定式化のもとで示されたわけである。

3-2．$I(A|p)$ の定義の拡張．今までは一つの測定過程 $p\to p_A$ に対して得られる情報量のみを考えたのであるが，ここで，もっと一般の過程 $p\to p'$ について得られる情報量の定式化を考えてみよう。このような拡張の必要性は，熱力学的な過程に伴う情報量の変化を定式化する試みにともなって生ずるのであるが，それだけではなく，測定過程をより現実的に表わそうとすることからも生ずる（3-4参照のこと）。さて，情報可測空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ における過程 $p\to p'$ $(p, p'\in\mathcal{P})$ に対する情報量 $I(p'|p)\,(\in R)$ として次の三つの条件を満すものを考える。

C-1．（連続性）$I(p'|p)$ が p 及び p' について A-1 の (a) の形の連続性をもつ。

C-2．（継続過程に対する加法性）$I(p''|p')+I(p'|p)=I(p''|p)$

C-3．（測定過程での平均情報量の普遍性）$0\leq t\leq 1$ で定義され少なくとも一点で正となる実函数 $f(t)$ が存在して，

$$I(p_A|p)\,p(A)+I(p_{A^c}|p)\,p(A^c)=f(p(A))$$

となる。

このとき，$I(A|p)\equiv I(p_A|p)$ とおくと，公理 A-1, …, A-4 は凡て満されることから

$$I(p'|p)=S(p)-S(p')$$

と書けることが簡単に示せる。ただし，$S(p)$ は式 (2-3) で

定義されるものである。

このI$(p'|p)$の定式化は過程の初めと終とにのみ依存して，その中間でどんな過程を取るかに全く依らないという点で不十分であるが，中間過程まで含めた一般的定式化は困難で今の所できていない。以下の§§3-3，3-4では中間過程を考えなくてもできる議論がなされている。

3-3．熱浴と接している系． 一つの系が孤立している場合の情報量 $I_0(p'|p)$ とその系がある熱浴に接している場合の情報量 $I_1(p'|p)$ との間に次の関係を設定しよう。

$$I_1(p'|p) = I_0(p'|p) + \frac{1}{T} Q(p';p) \qquad (3\text{-}1)$$

ここにTは熱浴の温度であり，$Q(p';p) = \int dp' \epsilon - \int dp\, \epsilon$ である。ϵは系のエネルギー函数（そのようなものがΩ上の可測函数として存在するとして）である。$Q(p',p)$は$p \Rightarrow p'$の過程によって熱浴から系にながれ込んだエネルギーの平均量である。この関係(3-1)は，もちろん，熱力学における熱とentropyの関係にヒントを得たものであるが，これはエネルギーが一定量の情報を運ぶことを表わしている。I_1，I_0に対して定理2で定まるμ, kに相当するものをそれぞれμ_1, k_1；μ_0, k_0とおくなら，関係(3-1)より

$$k_1 = k_0 \,, \quad d\mu_1 = c\, e^{-\frac{\epsilon}{kT}} d\mu_0 \qquad (c > 0)$$

をうる。即ち熱浴に接している系の平衡状態は Canonical 分布で与えられる。ここに μ_0 は孤立している場合の平衡状態だから状態密度を表わすものと見なされる。

3-4. fuzzy事象の情報量. 測定結果は実際には一つの明瞭な事象 $A \in \mathcal{B}$ で示されることは希であり，一般には幾らか曖昧さを含んだ statement で与えられる。即ち一つの fuzzy 事象で表わされることになる。fuzzy事象 A は Ω 上に定義される一つの帰属函数 $m_A(\omega)$ で表わされる。m_A は集合の特性函数の拡張であって $0 \leq m_A(\omega) \leq 1$ を満すものである。$m_A(\omega) = 1$ or 0 なら，A は普通の事象になる。fuzzy 事象 A の確率 $p(A)$ は $p(A) = \int m_A dp$ で定義され，また A に対する条件付き確率測度 p_A は $p_A(B) = \int_B m_A dp \,/\, p(A)$ $(B \in \mathcal{B})$ で与えられる。そこで状態 p での測定で fuzzy 事象 A で表わされる測定結果を得たときの情報量は §3-2 の拡張された定義を使えば簡単に，

$$I(p_A \mid p) = S(p) - S(p_A)$$

で与えられる。特に平衡状態を考えれば，

$$\begin{aligned} I(p_A \mid p) &= -k \log p(A) + \frac{1}{p(A)} k \int dp\, m_A \log m_A \qquad (3\text{-}2) \\ &\leq -k \log p(A) \end{aligned}$$

となる。普通の事象を得たときより少ない情報を受取るわけ

である。(fuzzy set については[36]を参照のこと。そこには，情報量として式(3-2)に相当するものが出されている。)

3-5. 非平衡状態での測定. この論文における情報量 $I(A|\rho)$ の定義では，ρ がもし非平衡状態の場合には，その値が負になる場合がありうる。これは測定によって，かえって情報が失われることを意味する。ただし平均情報量は定理1で分かるごとく負にはならない。測定によって情報が失われるということが物理的にどういうことなのかは分からない。今後，非平衡状態における測定の意味をもっと突っ込んで考察する必要があるであろう。

参考文献

1. A. Kossakowski, Rep. Math. Phys. 3(1972) 247.

2. E.B. Davies, Quantum Theory of Open System, London, Academic Press 1976.

3. C.E. Shannon and W. Weaver, Mathematical Theory of Communication, Univ. of Illinois Press, Urbana, 1949.

4. N. Wiener, Cybernetics, John Wiley & Sons, New York, 1948, (2nd edition: MIT Press, Cambridge, 1961).

5. A. I. Khinchin, Mathematical Foundations of

Information Theory, Dover, New York, 1957.
6. A. D. Faddeev, Uspekhi. Math. Nauk. 11 (1956) 227.
7. J. Aczél and Z. Daróczy, On Measures of Information and their Characterizations, Academic Press, New York, 1975.
8. I. J. Taneja, J. Stat. Phys. 14 (1976) 263.
9. E. Reich, Journ. Math. Phys. M. I. T. 30 (1951) 156.
10. H. Hatori, Kōdai Math. Sem. Rep. 10 (1958) 172.
11. S. Ikeda, Ann. Inst. Stat. Math. 11 (1959-60) 131, 13 (1961-62) 259, 14 (1962-63) 73.
12. L. L. Campbell, Inf. Control 21 (1972) 329.
13. B-S. K. Skagerstam, Z. Naturforsch, 29a (1974) 1239.
14. W. Ochs, Rep. Math. Phys. 9 (1976) 331.
15. B. Forte and C. C. A. Sastri, J. Math. Phys. 16 (1975) 1453.
16. R. S. Ingarden and K. Urbanik, Colloq. Math. 9 (1962) 131.
17. R. S. Ingarden, Fortschr. Phys. 12 (1964) 567, 13 (1965) 755.
18. K. Urbanik, Rep. Math. Phys. 4 (1973) 289.
19. J. Černý and P. Brunovský, Inf. Control, 25 (1975) 134.
20. 国沢清典，梅垣寿春編，情報理論の進歩，岩波，1965.
21. L. Szilard, Z. Phys. 53 (1929) 840.
22. J. Rothstein, Science 114 (1951) 171.
23. L. Brillouin, Science and Information Theory, Academic

24. H. Grad, Communication on Pure and Appl. Math 14 (1961) 323.

25. E. T. Jaynes, in _Statistical Physics,_ Brandeis Lectures. Vol. 3 p. 181-218 (ed. K. W. Ford) Benjamin, New York, 1963.

26. M. Tribus and E. C. McIrvine, Sci. Am. 1971 (Sept.) p. 179.

27. R. S. Ingarden and A. Kossakowski, Ann Phys. 89 (1975) 451

28. B.-S. K. Skagerstam, J. Stat. Phys. 12 (1975) 449.

29. W. Ochs, Rep. Math. Phys. 9 (1976) 135.

30. A. Wehrl, Rev. Mod. Phys. 50 (1978) 221.

31. R. Giles, _Mathematical Fountations of Thermodynamics_ Oxford, Pergamon Press, 1964.

32. H. Tverberg, Math. Scand. 6 (1958) 297.

33. P. Glansdorff and I. Prigodine, Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations, Wiley-Interscience, London, 1971.

34. N. Abramson, _Information Theory and Coding,_ McGraw-Hill New York, 1963

35. S. Goldman, _Information Theory_, Prentice-Hall, New York, 1953.

36. 西田俊夫, 作田英二, _ファジィ集合とその応用_, 北森出版, 1978.

37. T. Nakagomi, Characterizations of the 'Information about an event' (prepri.)